

# МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ – 5 СЕМЕСТР

А. А. Пожарский

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b>	2
<b>1 занятие</b>	
1. Комплексные числа.	4
2. Регулярные функции комплексного переменного.	8
<b>2 занятие</b>	
3. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части.	13
4. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши.	18
<b>3 занятие</b>	
5. <b>1-ая контрольная работа</b> (задачи: 1, 2; 30 минут).	21
6. Ряды Тейлора элементарных функций.	22
7. Нахождение нескольких первых членов ряда Тейлора.	23
<b>4 занятие</b>	
8. Ряд Лорана. Ряды Лорана рациональных функций.	26
9. Классификация изолированных особых точек.	32
<b>5 занятие</b>	
10. Нахождение главной части ряда Лорана функции в окрестности ее полюса.	37
<b>6 занятие</b>	
11. <b>2-ая контрольная работа</b> (задачи: 3, 4; 30 минут).	39
12. Вычисление вычетов функции.	40
<b>7 занятие</b>	
13. Теорема о вычетах. Вычисление интегралов по замкнутому контуру.	44
14. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду.	47
<b>8 занятие</b>	
15. <b>3-ая контрольная работа</b> (задачи: 5, 6; 30 минут).	50
16. Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси.	51
<b>9 занятие</b>	
17. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси.	55
18. Вычисление интегралов по вещественной оси от функций, содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования.	58
<b>10 занятие</b>	
19. <b>4-ая контрольная работа</b> (задачи: 7, 8; 30 минут).	61
20. Интеграл в смысле главного значения.	62

<b>11 занятие</b>	
21. <b>5-ая контрольная работа</b> (задача: 9; 15 минут). Переписывание перед коллоквиумом	65
<b>12 занятие</b>	
22. Однозначные регулярные ветви, аналитическое продолжение, точки ветвления.	66
23. Римановы поверхности простейших многозначных функций: $\sqrt[n]{z-a}$ , $\ln z$ (при наличии времени).	73
24. Римановы поверхности многозначных функций вида: $\sqrt[n]{(z-a)(z-b)}$ , ... (при наличии времени).	76
<b>13 занятие</b>	
25. Вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси (степенные и логарифмические особенности).	84
26. Вычисление интегралов от многозначных функций по отрезку (степенные особенности) (при наличии времени).	91
<b>14 занятие</b>	
27. <b>6-ая контрольная работа</b> (задачи: 10, 11; 45 минут).	96
28. Свойства конформных отображений. Теорема Римана.	97
29. Отображения: $z^n$ , $\sqrt[n]{z}$ , $e^z$ , $\ln z$ .	99
<b>15 занятие</b>	
30. Дробно-линейные отображения. Отображение круга на полуплоскость.	104
31. Отображение луночек.	108
<b>16 занятие</b>	
32. Физические приложения (поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости).	112
33. Физические приложения (электростатическое поле).	115
<b>17 занятие</b>	
Физические приложения (повторение)	
34. <b>7-ая контрольная работа</b> (задачи: 12, 13; 45 мин.).	117
<b>18 занятие</b>	
35. Преобразование Лапласа, основные свойства, таблица основных изображений.	118
36. Формула обращения Меллина.	121
<b>19 занятие</b>	
37. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	124
<b>20 занятие</b>	
38. <b>8-ая контрольная работа</b> (задача: 14; 15 минут).	130
39. О-символика.	131
40. Асимптотика интегралов типа Лапласа.	132
<b>21 занятие</b>	
41. Асимптотика интегралов типа Фурье.	137
42. Нетривиальные случаи поиска асимптотического поведения интегралов.	141
<b>22 занятие</b>	
43. <b>9-ая контрольная работа</b> (задачи: 15, 16; 30 минут).	144
44. Метод перевала.	145
<b>23 занятие</b>	
45. <b>10-ая контрольная работа</b> (задача: 17; 20 минут). Переписывание	153

## Предисловие

Предлагаемое «методическое пособие» предназначено для студентов и преподавателей физического факультета СПбГУ. «Пособие» содержит теоретический и практический материал, который предполагается изучать на практических занятиях по математической физике в пятом семестре.

Для удобства использования «пособия» весь материал разбит на 23 секции, каждая из которых примерно соответствует одному двух-часовому практическому занятию. Порядок изложения материала в каждой главе соответствует порядку его изложения на практических занятиях. В конце каждого раздела приводятся формулировки задач для самостоятельного решения.

Настоящее «пособие» может содержать опечатки и, быть может, ошибки. Автор будет признателен за любые исправления, замечания и всевозможные пожелания, которые можно отправлять по адресу: *sofyto@mail.ru* (Пожарский Алексей Андреевич).

# 1. Комплексные числа.

**Определение 1.1.** Комплексными числами  $z$  называют объекты вида  $x + iy$ , где  $x$  и  $y$  – вещественные числа, если для этих объектов следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения.

- (1) Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называют равными, если  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ .
- (2) Суммой комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называют комплексное число  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ .
- (3) Произведением комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называют комплексное число  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .
  - Иначе говоря, комплексные числа складывают и умножают, как многочлены относительно символа  $i$ , но символ  $i^2$  заменяют числом  $-1$ .
  - Число  $x$  называют вещественной частью (или действительной частью) комплексного числа  $z = x + iy$  и обозначают символом  $\operatorname{Re} z$ .
  - Число  $y$  называют мнимой частью комплексного числа  $z = x + iy$  и обозначают символом  $\operatorname{Im} z$ .
  - Символ  $i$  называют мнимой единицей.

**Пример 1.2.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $\frac{1+i}{1-i}$ .

**Решение.**

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{Re} \left( \frac{1+i}{1-i} \right) = 0$ ,  $\operatorname{Im} \left( \frac{1+i}{1-i} \right) = 1$ .

**Определение 1.3.** Модулем комплексного числа  $z = x + iy$  называют величину

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Любое число  $\varphi$ , удовлетворяющее равенствам

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

называют аргументом комплексного числа  $z = x + iy$  и обозначают  $\arg z$ . Величина  $\arg z$  определяется только для  $z \neq 0$ .

Комплексные числа удобно изображать точками на плоскости. Каждому комплексному числу  $z = x + iy$  ставится в соответствие точка с координатами  $(x, y)$ . При этом модуль  $|z|$  комплексного числа  $z$  равен расстоянию от точки  $(x, y)$  до начала координат, а аргумент  $\arg z$  – углу  $\varphi$  между положительным направлением оси абсцисс и лучом, соединяющим начало координат и точку  $(x, y)$ , см. рисунок 1.

**Пример 1.4.** Найти модуль и все аргументы комплексного числа  $1 + i$ .

**Решение.** Воспользуемся определением 1.3

$$|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$

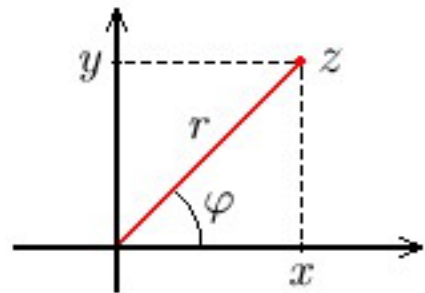


Рис. 1. Здесь  $z = x + iy$ ,  $r = |z|$  и  $\varphi = \arg z$ .

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

**Ответ:**  $|1 + i| = \sqrt{2}$ ,  $\arg = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 1.5.** Функцию  $e^z$  для комплексных значений  $z$  определяют как сумму ряда

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

который сходится при  $|z| < \infty$ .

**Теорема 1.6.** Любое комплексное число можно записать в показательной форме  $z = |z|e^{i \arg z}$ .

**Пример 1.7.** Записать комплексное число  $i - 1$  в показательной форме.

**Решение.** Воспользуемся теоремой 1.6

$$|i - 1| = \sqrt{2}, \quad \arg(i - 1) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В качестве  $\arg(i - 1)$  можно взять любое из найденных значений, например,  $\arg(i - 1) = \frac{3\pi}{4}$ .  $\square$

**Ответ:**  $i - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$ .

**Теорема 1.8.** Для любого  $\varphi \in \mathbb{C}$  справедливы формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

**Пример 1.9.** Упростить выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1.$$

**Решение.** Из теоремы 1.8 следует, что  $\sin(n\varphi) = \operatorname{Im}(e^{in\varphi})$  при вещественных  $\varphi$ . Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \operatorname{Im}(e^{in\varphi}) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{in\varphi} \right) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{i\varphi})^n \right).$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{i\varphi})^n \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - ae^{i\varphi}} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - a \cos \varphi - ia \sin \varphi} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{1 - a \cos \varphi + ia \sin \varphi}{(1 - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \right) = \frac{a \sin \varphi}{(1 - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$ .

**Определение 1.10.** Логарифмом комплексного числа  $z$  называют величину

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z.$$

Величину  $\operatorname{Ln} z$  определяют только для  $z \neq 0$ .

**Определение 1.11.** Величину  $z^a$  для комплексных значений  $z$  и  $a$  определяют равенством

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Величину  $z^a$  определяют только для  $z \neq 0$ .

**Пример 1.12.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $i^i$ .

**Решение.** Воспользуемся определением 1.11

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\frac{\pi}{2}i + 2\pi in)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{Re}(i^i) = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\operatorname{Im}(i^i) = 0$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 1.13.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $\frac{2-i}{3+i}$ .

**Ответ:**  $\frac{2-i}{3+i} = \frac{1-i}{2}$ .

**Задача 1.14.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $\frac{1+2i}{2+3i}$ .

**Ответ:**  $\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{8+i}{13}$ .

**Задача 1.15.** Найти вещественную и мнимую части, а также модуль и все аргументы комплексного числа  $\frac{3+4i}{(3-4i)^2}$ .

**Ответ:**  $\frac{3+4i}{(3-4i)^2} = -\frac{3}{25} + \frac{4i}{25}$ ,  $\left| \frac{3+4i}{(3-4i)^2} \right| = \frac{1}{5}$ ,  $\arg \left( \frac{3+4i}{(3-4i)^2} \right) = 3 \arctg \left( \frac{4}{3} \right) + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 1.16.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $(i-1)^{98}$ .

**Ответ:**  $(i-1)^{98} = -2^{49}i$ .

**Задача 1.17.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $(\sqrt{3}+i)^{100}$ .

**Ответ:**  $(\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(-1+i\sqrt{3})$ .

**Задача 1.18.** Найти вещественную и мнимую части числа  $\sin(a+ib)$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Ответ:**  $\sin(a+ib) = \sin a \operatorname{ch} b + i \cos a \operatorname{sh} b$ .

**Задача 1.19.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $(\operatorname{Ln}(1+i))^2$ .

**Ответ:**  $(\operatorname{Ln}(1+i))^2 = \frac{\ln^2 2}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \ln 2$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 1.20.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $\operatorname{Ln}((2i)^i)$ .

**Ответ:**  $\operatorname{Ln}((2i)^i) = i \ln 2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n + 2\pi i k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 1.21.** Найти вещественную и мнимую части комплексного числа  $(1+i)^i$ .

**Ответ:**  $(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi n} (\cos(\ln \sqrt{2}) + i \sin(\ln \sqrt{2}))$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 1.22.** Упростить выражение  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos \{(3n+1)\varphi\}$ , где  $\varphi \in \mathbb{R}$  и  $0 < a < 1$ .

**Ответ:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos \{(3n+1)\varphi\} = \frac{\cos \varphi - a \cos(2\varphi)}{1 - 2a \cos(3\varphi) + a^2}$ .

**Задача 1.23.** Упростить выражение  $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \{(2n-1)\varphi\}$ , где  $\varphi \in \mathbb{R}$  и  $|a| < 1$ .

**Ответ:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \{(2n-1)\varphi\} = \frac{a(a+1) \sin \varphi}{1-2a \cos(2\varphi)+a^2}$ .

**Задача 1.24.** Упростить выражение  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin \{(4n+1)\varphi\}$ , где  $\varphi \in \mathbb{R}$  и  $|a| < 1$ .

**Ответ:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin \{(4n+1)\varphi\} = \frac{\sin \varphi + a \cos(3\varphi)}{1-2a \cos(4\varphi)+a^2}$ .

**Задача 1.25.** Найдите все корни уравнения  $\cos z = 3$ .

**Ответ:**  $z = i \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 1.26.** Найдите все корни уравнения  $\sin z = i$ .

**Ответ:**  $z = i \ln(\sqrt{2} - 1) + (2n+1)\pi$ ,  $z = i \ln(\sqrt{2} + 1) + 2n\pi$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 2. Регулярные функции комплексного переменного.

**Определение 2.1.** Функцию  $f(z)$  называют дифференцируемой в смысле комплексного анализа в точке  $z_0$ , если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

называемый производной функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ .

**Определение 2.2.** Функцию  $f(z)$  называют регулярной в области  $D$ , если она дифференцируема в смысле комплексного анализа в каждой точке этой области<sup>1</sup>.

**Пример 2.3.** Найти область, в которой функция  $f(z) = z^2$  регулярна, и вычислить ее производную в этой области.

**Решение.** Воспользуемся определением 2.1

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = z + z_0.$$

Отсюда следует, что для любого  $z_0 \in \mathbb{C}$  существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0. \quad \square$$

**Ответ:** Функция  $f(z) = z^2$  регулярна в  $\mathbb{C}$  и  $f'(z) = 2z$ .

**Пример 2.4.** Найти все точки, в которых функция  $f(z) = \operatorname{Re} z$  дифференцируема в смысле комплексного анализа.

**Решение.** Введем обозначения  $z = x + iy$ ,  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  и  $\Delta z = z - z_0$ . Воспользуемся определением 2.1

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что если  $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$  (т. е. точка  $z$  стремится к  $z_0$  вдоль оси  $Ox$ ), то

$$\lim_{\Delta z = \Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = 1.$$

Аналогично, если  $\Delta z = \Delta y \rightarrow 0$  (т. е. точка  $z$  стремится к  $z_0$  вдоль оси  $Oy$ ), то

$$\lim_{\Delta z = \Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0, \Delta x = 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = 0.$$

Таким образом, предел отношения (2.1) различен в зависимости от направления подхода точки  $z$  к  $z_0$  при всех  $z \in \mathbb{C}$ . Согласно определению 2.1 это означает, что производная функции  $f(z)$  не существует ни при каких  $z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Ответ:** Функция  $f(z) = \operatorname{Re} z$  не является дифференцируемой в смысле комплексного анализа ни при каких  $z \in \mathbb{C}$ .

Из примеров 2.3 и 2.4 видно, что для проверки регулярности с использованием определения 2.1 требуется прикладывать заметные усилия даже в случае весьма простых функций. Это одна из причин, по которым может быть полезна следующая теорема.

<sup>1</sup>Иногда, ради упрощения некоторых доказательств, дополнительно предполагают, что производная  $f'(z)$  является непрерывной функцией в области  $D$ .

**Теорема 2.5.** Пусть  $f(z)$  – функция комплексного переменного  $z = x + iy$  и

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Пусть вещественно-значные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в области  $D$ . Тогда для регулярности функции  $f(z)$  в области  $D$  (в точке  $z_0 \in D$ ) необходимо и достаточно, чтобы функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  удовлетворяли условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

в области  $D$  (в точке  $z_0 \in D$ ).

**Пример 2.6.** Найти все точки, в которых функция  $f(z) = x^2 - 2iy$  дифференцируема в смысле комплексного анализа.

**Решение.** Проверим условия Коши-Римана

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2, \\ v(x, y) = -2y, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = -2, \\ 0 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \square$$

**Ответ:** Функция  $f(z) = x^2 - 2iy$  дифференцируема в смысле комплексного анализа при  $z = x + iy$  таких, что  $x = -1$ .

**Пример 2.7.** Найти область, в которой функция  $f(z) = e^{2z}$  регулярна.

**Решение.** Выделим вещественную и мнимую части функции  $f(z)$

$$\begin{aligned} e^{2z} &= e^{2x+2iy} = e^{2x}e^{2iy} = e^{2x} \cos(2y) + ie^{2x} \sin(2y), \\ u(x, y) &= e^{2x} \cos(2y), \quad v(x, y) = e^{2x} \sin(2y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2e^{2x} \cos(2y), & \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2e^{2x} \sin(2y), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2e^{2x} \sin(2y), & \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2e^{2x} \cos(2y). \end{cases} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что условия Коши-Римана выполнены при всех  $z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Ответ:** Функция  $f(z) = e^{2z}$  регулярна во всей комплексной плоскости.

Иногда бывает удобно вместо переменных  $x$  и  $y$  использовать переменные  $z$  и  $\bar{z}$

$$\begin{cases} z = x + iy, & \begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{cases} \end{cases} \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение операции  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , которые определены равенствами

$$\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

**Замечание 2.8.** Не следует путать операцию  $\frac{\partial}{\partial z}$  с операцией дифференцирования, которая введена в определении 2.1.

**Пример 2.9.** Доказать, что условия Коши-Римана эквивалентны условию  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

**Решение.** Перейдем в выражении  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  к переменным  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{2} (u_x(x, y) + iv_x(x, y) + iu_y(x, y) - v_y(x, y)) = \\ &= \frac{1}{2} (u_x(x, y) - v_y(x, y)) + \frac{i}{2} (v_x(x, y) + u_y(x, y)). \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое утверждение.  $\square$

Обсудим результаты примера 2.9. Пусть нам задана *элементарная* комплексно-значная функция  $f$ , зависящая от переменных  $x$  и  $y$ . С помощью замены переменных (2.3) можно перейти к переменным  $z$  и  $\bar{z}$ . Пример 2.9 показывает, что такая функция  $f$  регулярна тогда и только тогда, когда она явно не зависит от переменной  $\bar{z}$ . Например, функция  $e^z$  элементарная и зависит только от переменной  $z$ , поэтому она регулярна.

Функция  $\operatorname{Re}(z)$  зависит только от переменной  $z$ , но не является элементарной. Чтобы применить к ней результаты примера 2.9 перепишем ее в переменных  $x$  и  $y$ ,  $\operatorname{Re}(z) = x$ . Функция  $x$  уже элементарная и ее можно выразить через переменные  $z$  и  $\bar{z}$  по формулам (2.3),  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ . Функция  $\frac{z+\bar{z}}{2}$  явно зависит от  $\bar{z}$ , а потому не является регулярной.

**Теорема 2.10.** *Производные (в смысле определения 2.1) элементарных функций можно вычислять по обычным правилам, известным из вещественного анализа. В частности,*

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (e^z)' = e^z, \quad (\ln z)' = \frac{1}{z},$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Пусть функции  $f(z)$  и  $g(z)$  регулярны в некоторых, быть может различных, областях. Тогда производная от суммы, произведения, частного и композиции вычисляется по обычным правилам, известным из вещественного анализа,

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z), \quad (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad (f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z).$$

При этом каждое равенство справедливо в той области, в которой корректно определены обе части этого равенства.

**Замечание 2.11.** Функции  $|z|$ ,  $\operatorname{Re}(z) = x$ ,  $\operatorname{Im}(z) = y$  не являются ни элементарными, ни регулярными и к ним не может быть применена теорема 2.10.

**Пример 2.12.** Найти область, в которой функция  $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$  регулярна, и вычислить ее производную.

**Решение.** Согласно теореме 2.10 функция  $f(z)$  регулярна при  $z \neq -1$ . Ее производную можно вычислить с помощью той же теоремы

$$f'(z) = \frac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2} = \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}. \quad \square$$

**Ответ:** Функция  $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$  регулярна при  $z \neq -1$  и  $f'(z) = \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 2.13.** Найти все точки, в которых функция  $f(z) = x + i \sin y$  дифференцируема в смысле комплексного анализа, и вычислить ее производную.

**Ответ:** Функция  $f(z) = x + i \sin y$  дифференцируема при  $z = x + iy$  таких, что  $y = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В этих точках  $f'(z) = 1$ .

**Задача 2.14.** Найти все точки, в которых функция  $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$  дифференцируема в смысле комплексного анализа, и вычислить ее производную.

**Ответ:** Функция  $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$  дифференцируема при  $z = 0$  и  $f'(0) = 0$ .

**Задача 2.15.** Найти все точки, в которых функция  $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + 2i \operatorname{Im}(z)$  дифференцируема в смысле комплексного анализа, и вычислить ее производную.

**Ответ:** Функция  $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + 2i \operatorname{Im}(z)$  дифференцируема при  $z = 1$  и  $f'(1) = 2$ .

**Задача 2.16.** Найти область, в которой функция  $f(z) = ze^{3z}$  регулярна, и вычислить ее производную.

**Ответ:** Функция  $f(z) = ze^{3z}$  регулярна во всей комплексной плоскости и  $f'(z) = (1 + 3z)e^{3z}$ .

**Задача 2.17.** Найти область, в которой функция  $f(z) = (z - 1)^{-2}$  регулярна, и вычислить ее производную.

**Ответ:** Функция  $f(z) = (z - 1)^{-2}$  регулярна при  $z \neq 1$  и  $f'(z) = -2(z - 1)^{-3}$ .

**Задача 2.18.** Найти область, в которой функция  $f(z) = \cos\left(\frac{1}{e^z - 1}\right)$  регулярна, и вычислить ее производную.

**Ответ:** Функция  $f(z)$  регулярна при  $z \neq 2\pi in$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и  $f'(z) = \sin\left(\frac{1}{e^z - 1}\right) \frac{e^z}{(e^z - 1)^2}$ .

**Задача 2.19.** Доказать, не используя теорему 2.5, что регулярная функция в области удовлетворяет в этой области условиям Коши-Римана.

**Задача 2.20.** Доказать, что условия Коши-Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

**Задача 2.21.** Используя результат задачи 2.20 доказать, что функция  $f(z) = z^n$  при  $n \in \mathbb{N}$  регулярна во всей комплексной плоскости.

**Задача 2.22.** Пусть на  $\mathbb{C}$  задана функция

$$f(z) = \frac{\sin x}{y} + iy \cos x, \quad z = x + iy.$$

Найти

- (1) множество  $D_r$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле вещественного анализа;
- (2) множество  $D_c$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле комплексного анализа;
- (3) на множестве  $D_c$  найти производную  $f'$  в смысле комплексного анализа.

**Ответ:**  $D_r = \{z \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$ ,  $D_c = \{z \mid \operatorname{Re} z = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} z = 1\} \cup \{z \mid \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} z = -1\}$ ,  $\forall z \in D_c f'(z) = \frac{\cos x}{y} - iy \sin x$ .

**Задача 2.23.** Пусть на  $\mathbb{C}$  задана функция

$$f(z) = \frac{x}{y} + ixy, \quad z = x + iy.$$

Найти

- (1) множество  $D_r$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле вещественного анализа;
- (2) множество  $D_c$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле комплексного анализа;

(3) на множестве  $D_c$  найти производную  $f'$  в смысле комплексного анализа.

**Ответ:**

**Задача 2.24.** Пусть на  $\mathbb{C}$  задана функция

$$f(z) = \frac{y^2}{x} - ix^2y, \quad z = x + iy.$$

Найти

- (1) множество  $D_r$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле вещественного анализа;
- (2) множество  $D_c$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле комплексного анализа;
- (3) на множестве  $D_c$  найти производную  $f'$  в смысле комплексного анализа.

**Ответ:**

### 3. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части.

**Определение 3.1.** Функция  $u(x, y)$  называется гармонической в области  $D$ , если  $\Delta u = 0$  в этой области, где  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ .

**Пример 3.2.** Пусть  $f(z)$  регулярная функция в области  $D$ . Доказать, что ее вещественная и мнимая части являются гармоническими функциями.

**Решение.** Воспользуемся условиями Коши-Римана

$$\begin{aligned}\Delta u &= \partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u) = \partial_x(\partial_y v) + \partial_y(-\partial_x v) = 0, \\ \Delta v &= \partial_x(\partial_x v) + \partial_y(\partial_y v) = \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y(\partial_x u) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

**Определение 3.3.** Область  $D$  называется односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в  $D$ , может быть непрерывно продеформирован к некоторой точке области  $D$ .

**Теорема 3.4.** Пусть  $u(x, y)$  (или  $v(x, y)$ ) – гармоническая функция в односвязной области  $D$ . Тогда существует гармоническая функция  $v(x, y)$  (соответственно  $u(x, y)$ ) такая, что функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  регулярна в области  $D$ , где  $z = x + iy$ .

**Доказательство.** Пусть задана гармоническая функция  $u(x, y)$  и нам требуется найти функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую условиям теоремы. Из требования регулярности функции  $f(z)$  следует, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  должны удовлетворять условиям Коши-Римана в области  $D$ . Отсюда можно найти дифференциал функции  $v(x, y)$

$$dv = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy. \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) позволяет найти функцию  $v(x, y)$  в терминах криволинейного интеграла второго рода

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y}. \quad (3.2)$$

Здесь  $(x_0, y_0)$  – произвольная точка области  $D$ , а интеграл в равенстве (3.2) берется по любому контуру, лежащему в области  $D$  и соединяющему точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ . Последний интеграл в равенстве (3.2) не зависит от пути интегрирования в силу гармоничности функции  $u(x, y)$ <sup>2</sup>.

Для завершения доказательства остается проверить, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  удовлетворяют условиям Коши-Римана. Эти условия легко выводятся из формулы (3.2) и независимости соответствующего интеграла от пути интегрирования.

Доказательство теоремы в случае когда регулярная функция  $f(z)$  восстанавливается по ее мнимой части  $v(x, y)$  проводится аналогично.  $\square$

**Пример 3.5.** Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по ее мнимой части  $v(x, y) = 2xy$ .

**Решение.** Несложно проверить, что  $v(x, y)$  гармоническая функция во всей комплексной плоскости. Согласно теореме 3.4 вещественная часть  $u(x, y)$  может быть восстановлена с помощью

<sup>2</sup>Для того чтобы интеграл  $\int_{(a,b)}^{(c,d)} g dx + h dy$  не зависел от пути интегрирования, лежащего в односвязной области  $D$ , необходимо и достаточно, чтобы в области  $D$  выполнялось соотношение  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ .

криволинейного интеграла

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} du = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{x} - \frac{\partial v(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} d\tilde{y}. \quad (3.3)$$

Подставим функцию  $v(x, y) = 2xy$  в (3.3) и выберем контур интегрирования как на рисунке 2. В результате получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{\gamma_1} 2\tilde{x} d\tilde{x} - 2\tilde{y} d\tilde{y} + \int_{\gamma_2} 2\tilde{x} d\tilde{x} - 2\tilde{y} d\tilde{y} = \\ &= 2 \int_{\gamma_1} \tilde{x} d\tilde{x} - 2 \int_{\gamma_2} \tilde{y} d\tilde{y} = 2 \int_{x_0}^x \tilde{x} d\tilde{x} - 2 \int_{y_0}^y \tilde{y} d\tilde{y} = \\ &= \tilde{x}^2 \Big|_{x_0}^x - \tilde{y}^2 \Big|_{y_0}^y = x^2 - y^2 + y_0^2 - x_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy + C = \\ &= (x + iy)^2 + C = z^2 + C, \end{aligned}$$

где  $C$  – произвольная вещественная постоянная.  $\square$

**Ответ:**  $f(z) = z^2 + C$ , где  $C$  – произвольная вещественная постоянная.

Заметим, что в примере 3.5 для перехода от переменных  $x$  и  $y$  к комплексной переменной  $z$  необходимо было догадаться выделить полный квадрат. Несмотря на то, что сделать это было не сложно, для других примеров подобный переход может оказаться значительно менее очевидной процедурой. Для того чтобы описать более короткую процедуру восстановления регулярной функции, нам понадобится следующая теорема.

**Теорема 3.6** (Теорема единственности). *Пусть функции  $f(z)$  и  $g(z)$  регулярны в области  $D$  и их значения совпадают на некоторой последовательности точек  $a_n$ , сходящейся к внутренней точке  $a$  области  $D$ . Тогда функции  $f(z)$  и  $g(z)$  совпадают всюду в  $D$ .*

Предположим теперь, что в области  $D$  задана регулярная функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , и область  $D$  содержит некоторый интервал  $(x_0, x_1)$  вещественной оси. Предположим также, что корректно определена вспомогательная функция  $g(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$  для комплексных  $z$ . Это предположение будет выполнено, если функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  являются элементарными. Заметим теперь, что функции  $f(z)$  и  $g(z)$  совпадают на интервале  $(x_0, x_1)$  вещественной оси

$$f(z) = u(x, 0) + iv(x, 0) = g(z), \quad \text{где } z = x + i0, \quad x \in (x_0, x_1).$$

Применяя теорему 3.6, получим, что функции  $f(z)$  и  $g(z)$  совпадают всюду в  $D$

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0), \quad z \in D. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) позволяет восстанавливать регулярную функцию  $f(z)$  по значениям ее вещественной и мнимой частей на вещественной оси. Это, например, означает, что нам достаточно вычислить интеграл в формуле (3.2) (или (3.3)) только при  $y = 0$  и этого будет достаточно для восстановления  $f(z)$  по формуле (3.4).

Приведем теперь для удобства план восстановления регулярной функции  $f(z)$  по ее вещественной части  $u(x, y)$ .

(1) Проверяем, что функция  $u(x, y)$  гармоническая.

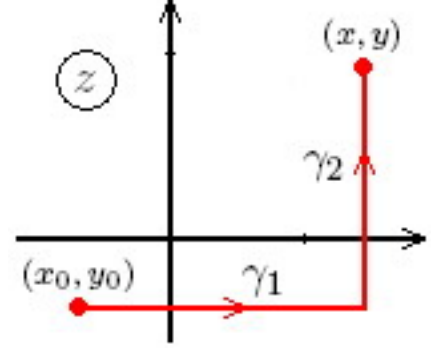


Рис. 2. Контур интегрирования  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ .

(2) Находим  $v(x, y)$  при  $y = 0$

$$v(x, 0) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(\tilde{x}, 0)}{\partial y} d\tilde{x}.$$

(3) Восстанавливаем  $f(z)$  по формуле (3.4).

Приведем также план восстановления регулярной функции  $f(z)$  по ее мнимой части  $v(x, y)$ .

(1) Проверяем, что функция  $v(x, y)$  гармоническая.

(2) Находим  $u(x, y)$  при  $y = 0$

$$u(x, 0) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial y} d\tilde{x}.$$

(3) Восстанавливаем  $f(z)$  по формуле (3.4).

**Пример 3.7.** Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по ее вещественной части

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

**Решение.** Решение проводим в три шага.

*Шаг 1:* Легко проверить, что  $u(x, y)$  – гармоническая функция во всей комплексной плоскости.

*Шаг 2:* Находим мнимую часть  $v(x, y)$  на вещественной оси

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y, \quad v(x, 0) = - \int_{x_0}^x e^{\tilde{x}} d\tilde{x} = - e^{\tilde{x}} \Big|_{x_0}^x = -e^x + e^{x_0}. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) удобно переписать в виде

$$v(x, 0) = -e^x + C,$$

где  $C$  – произвольная вещественная постоянная.

*Шаг 3:* Находим  $f(z)$  по формуле (3.4)

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = -ie^z + iC, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Ответ:**  $f(z) = -ie^z + iC, C \in \mathbb{R}$ .

**Пример 3.8.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = 0$  и ее мнимая часть равна  $v(x, y) = (y \cos x + x \sin x)e^{-y}$ .

**Решение.** Решение проводим в три шага.

*Шаг 1:* Легко проверить, что  $v(x, y)$  – гармоническая функция во всей комплексной плоскости

$$\begin{aligned} \partial_x v(x, y) &= (-y \sin x + \sin x + x \cos x)e^{-y}, & \partial_x^2 v(x, y) &= (-y \cos x + 2 \cos x - x \sin x)e^{-y}, \\ \partial_y v(x, y) &= (\cos x - y \cos x - x \sin x)e^{-y}, & \partial_y^2 v(x, y) &= (-2 \cos x + y \cos x + x \sin x)e^{-y}. \end{aligned}$$

*Шаг 2:* Находим вещественную часть  $u(x, y)$  на вещественной оси

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^x (\cos \tilde{x} - \tilde{x} \sin \tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x \cos \tilde{x} d\tilde{x} + \int_0^x \tilde{x} d \cos \tilde{x} = \\ &= \int_0^x \cos \tilde{x} d\tilde{x} + \tilde{x} \cos \tilde{x} \Big|_0^x - \int_0^x \cos \tilde{x} d\tilde{x} = x \cos x. \end{aligned}$$

Мы сразу выбрали  $x_0 = 0$ , чтобы добиться выполнения условия  $f(0) = 0$ .

*Шаг 3:* Находим  $f(z)$  по формуле (3.4)

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z \cos z + iz \sin z = ze^{iz}.$$

**Ответ:**  $f(z) = ze^{iz}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 3.9.** Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по ее мнимой части  $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

**Ответ:**  $f(z) = iz^3 + C$ , где  $C$  – произвольная вещественная постоянная.

**Задача 3.10.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = 1$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$ .

**Ответ:**  $f(z) = \operatorname{ch} z$ .

**Задача 3.11.** Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(1) = 0$  и ее мнимая часть равна  $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

**Ответ:**  $f(z) = 2i \ln z$ .

**Задача 3.12.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(1) = 1$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

**Ответ:**  $f(z) = z^{-1}$ .

**Задача 3.13.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = 2$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = xy + \frac{2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}$ .

**Ответ:**  $f(z) = -i \frac{z^2}{2} + \frac{2i}{z+i}$ .

**Задача 3.14.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = -i$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = xy^3 - x^3y + \frac{3x}{x^2 + (y+3)^2}$ .

**Ответ:**  $f(z) = i \frac{z^4}{4} + \frac{3}{z+3i}$ .

**Задача 3.15.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что ее вещественная часть равна  $u(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ .

**Ответ:**  $f(z) = iz^{-2} + iC$ , где  $C$  – произвольная вещественная постоянная.

**Задача 3.16.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что ее мнимая часть равна  $v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$ .

**Ответ:**  $f(z) = z^{-3} + C$ , где  $C$  – произвольная вещественная постоянная.

**Задача 3.17.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = 1 + \frac{i}{2}$  и ее мнимая часть равна  $v(x, y) = \frac{(x+2) \cos y + y \sin y}{(x+2)^2 + y^2} e^x - 6xy$ .

**Ответ:**  $f(z) = e^z \frac{i}{z+2} - 3z^2 + 1$ .

**Задача 3.18.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = 1$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = e^{2xy} \cos(x^2 - y^2)$ .

**Ответ:**  $f(z) = e^{-iz^2}$ .

**Задача 3.19.** Пусть на мнимой оси заданы вещественная  $u(0, y)$  и мнимая  $v(0, y)$  части регулярной функции  $f(z)$ . Как восстановить функцию  $f(z)$ ?

**Ответ:**  $f(z) = u(0, -iz) + iv(0, -iz)$ .

**Задача 3.20.** Где в доказательстве теоремы 3.4 используется односвязность области  $D$ ?

**Задача 3.21.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $|f(z)| = e^{x^2 - y^2}$ .<sup>3</sup>

**Ответ:**  $f(z) = e^{z^2} e^{i\psi}$ , где  $\psi$  – произвольная вещественная постоянная.

**Задача 3.22.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^{-y}$ .

**Ответ:**  $f(z) = z^2 e^{iz} e^{i\psi}$ , где  $\psi$  – произвольная вещественная постоянная.

**Задача 3.23.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(0) = 0$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = r^8 \cos(8\varphi)$ , где  $r, \varphi$  – полярные координаты  $z$ .<sup>4</sup>

**Ответ:**  $f(z) = z^8$ .

**Задача 3.24.** Найти регулярную функцию  $f(z)$  такую, что  $f(1) = 0$  и ее вещественная часть равна  $u(x, y) = r \ln r \cos \varphi - r \varphi \sin \varphi$ , где  $r, \varphi$  – полярные координаты  $z$ .

**Ответ:**  $f(z) = z \ln z$ .

**Задача 3.25.** Пусть функция  $f(z)$  регулярна в круге  $|z| < 2$ , и  $f(z) = 1 - z$  при  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . Найдите значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 1 + i$  и обоснуйте свой ответ.

**Ответ:**  $f(1 + i) = -i$ .

**Задача 3.26.** Функция  $f(z)$  регулярна в круге  $|z - 1| < 1$ , и  $f(1/n) = 0$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Следует ли из теоремы единственности, что  $f(z) \equiv 0$ ? Обоснуйте свой ответ.

**Ответ:** Нет. Рассмотрим, например,  $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ .

---

<sup>3</sup>Рассмотрите вспомогательную функцию  $g(z) = \ln f(z)$ .

<sup>4</sup>Воспользуйтесь результатом задачи 2.20.

## 4. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши.

**Определение 4.1.** Пусть  $\gamma$  – контур в комплексной плоскости, который начинается в точке  $a$  и заканчивается в  $b$ . Пусть  $f(z)$  – непрерывная функция, заданная на кривой  $\gamma$ . Интегралом от  $f(z)$  вдоль контура  $\gamma$  называют величину

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k). \quad (4.1)$$

Здесь  $z_1 = a, z_2, \dots, z_{n+1} = b$  – последовательные точки, которые разбивают контур  $\gamma$  на  $n$  частей,  $\zeta_k$  – произвольная точка, лежащая на участке  $[z_k, z_{k+1}]$  кривой  $\gamma$ , и предел (4.1) берется в предположении, что  $\max_k |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$ .

Интеграл по замкнутому контуру  $\gamma$  обозначают символом  $\oint_{\gamma} f(z) dz$ .

Для вычисления интеграла (4.1) полезна следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Пусть  $z = \zeta(t)$  – непрерывно дифференцируемое отображение интервала  $[\alpha, \beta]$  вещественной оси на контур  $\gamma$ , причем  $\zeta(a) = \alpha$  и  $\zeta(b) = \beta$ . Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt.$$

Отображение  $z = \zeta(t)$  называют параметризацией контура  $\gamma$ .

**Пример 4.3.** Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z},$$

где контур интегрирования обходится против часовой стрелки.

**Решение.** Поскольку контур интегрирования – окружность, удобно параметризовать его углом  $\varphi$  в полярных координатах  $z = e^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Отсюда

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \left( dz = de^{i\varphi} = ie^{i\varphi} d\varphi \right) = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad \square$$

**Ответ:**  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ .

**Пример 4.4.** Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , где контур  $\gamma$  – ломаная, последовательно соединяющая точки  $-1, 1$  и  $1+i$ .

**Решение.** Разбивая контур интегрирования на два отрезка  $\gamma_1 = [-1, 1]$  и  $\gamma_2 = [1, 1+i]$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_{\gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \left( \gamma_1 : z = x, x \in [-1, 1], \gamma_2 : z = 1 + iy, y \in [0, 1] \right) = \\ &= \int_{-1}^1 x dx + \int_0^1 (1 - iy)i dy = 0 + i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + i. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = \frac{1}{2} + i$ .

**Теорема 4.5** (Теорема Коши). Пусть  $f(z)$  – регулярная функция в односвязной области  $D$ . Тогда для всех контуров  $\gamma$ , лежащих в области  $D$  и имеющих общие концы, интеграл  $\int_{\gamma} f(z) dz$  имеет одно и то же значение.

**Пример 4.6.** Вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}, \quad (4.2)$$

где контур  $\gamma$  – ломаная, последовательно соединяющая точки  $1, -i, -1, i$  и  $2$ , см. рисунок 3.

**Решение.** Функция  $\frac{1}{z^2}$  регулярна при  $z \neq 0$ . Из теоремы 4.5 следует, что если деформировать контур  $\gamma$  не пересекая точки  $z = 0$ , то значение интеграла (4.2) не будет меняться. Прodeформируем контур  $\gamma$  в новый контур  $\tilde{\gamma}$  как показано на рисунке 4. При этом значение интеграла (4.2) не изменится.

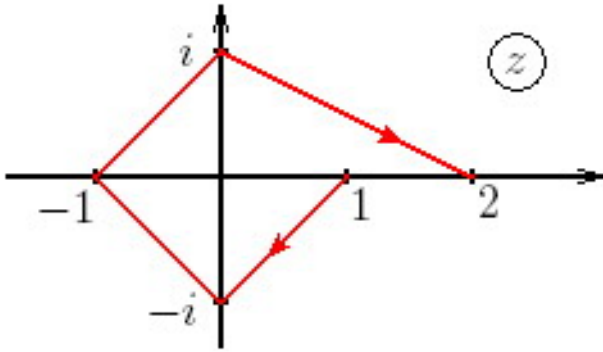


Рис. 3. Контур  $\gamma$  выделен красным цветом.

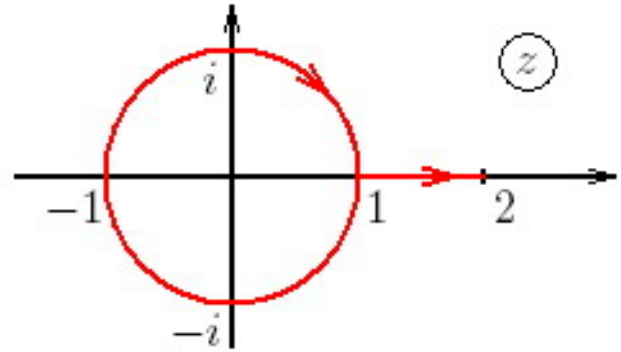


Рис. 4. Контур  $\tilde{\gamma}$ , полученный деформированием контура  $\gamma$ , выделен красным цветом.

Далее, разбивая контур интегрирования  $\tilde{\gamma}$  на два  $\tilde{\gamma}_1 = \{z : |z| = 1\}$  и  $\tilde{\gamma}_2 = [1, 2]$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} &= \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z^2} = \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{dz}{z^2} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \frac{dz}{z^2} = \left( \tilde{\gamma}_1 : z = e^{i\varphi}, \varphi \in [2\pi, 0], \tilde{\gamma}_2 : z = x, x \in [1, 2] \right) = \\ &= \int_{2\pi}^0 \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{2i\varphi}} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = i \int_{2\pi}^0 e^{-i\varphi} d\varphi - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = i \frac{1}{(-i)} e^{-i\varphi} \Big|_{2\pi}^0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что  $e^{-2\pi i} = 1$ .  $\square$

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}.$

**Домашнее задание:**

**Задача 4.7.** Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$ , где контур  $\gamma$  соединяет точки 0 и 2 вдоль верхней дуги окружности  $|z - 1| = 1$ .

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = 2 - \frac{\pi}{2}i.$

**Задача 4.8.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3}$ , где контур интегрирования обходится против часовой стрелки.

**Ответ:**  $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3} = 0.$

**Задача 4.9.** Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ , где контур  $\gamma$  — ломаная, последовательно соединяющая точки  $i$ ,  $1$ ,  $-i$ ,  $-2$  и  $2i$ .

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln 2 - 2\pi i.$

**Задача 4.10.** Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \frac{|z|^2+1}{z} dz$ , где контур  $\gamma$  — ломаная, последовательно соединяющая точки  $1$ ,  $i$ ,  $-1$ .

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \frac{|z|^2+1}{z} dz = (2 + \pi)i.$

**Задача 4.11.** Вычислить интеграл  $\int_0^{1+i} e^{\bar{z}} dz.$

**Ответ:**

**Задача 4.12.** Вычислить интеграл  $\int_0^{1+i} e^{\operatorname{Re} z} dz.$

**Ответ:**

## 5. 1-ая контрольная работа (задачи: 1, 2; 30 минут).

**Комментарии к задаче 1.** Студент должен понимать разницу между дифференцируемостью в смысле вещественного и комплексного анализа, уметь выписывать условия Коши-Римана (при их «решении» не должно возникать сложных систем уравнений), а также вычислять производную в смысле комплексного анализа. Можно давать более сложные примеры на семинарах, но не нужно выносить сложные или длинные вычислительные задачи на контрольную.

**Комментарии к задаче 2.** Студент должен вспомнить про криволинейный интеграл второго рода и уметь применять его для решения данной задачи. Учить решать методом прямого интегрирования (вначале по  $x$  с добавлением произвольной постоянной зависящей от  $y$ , а потом по  $y$ ) крайне не рекомендуется, поскольку основной целью является напоминание про криволинейный интеграл второго рода. Не нужно давать сложные вычислительные задачи.

### Вариант контрольной работы №1.

**Задача 1.** Пусть на  $\mathbb{C}$  задана функция

$$f(z) = 2xe^y + i(2y - x^2), \quad z = x + iy.$$

Найти

- (1) множество  $D_r$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле вещественного анализа;
- (2) множество  $D_c$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле комплексного анализа;
- (3) на множестве  $D_c$  производную  $f'$  в смысле комплексного анализа.

**Ответ:**  $D_r = \mathbb{C}$ ,  $D_c = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ ,  $\forall z \in D_c \ f'(z) = 2 - 2ix$ .

**Задача 2.** Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по ее мнимой части

$$v(x, y) = x^2 - y^2 - e^y \sin x.$$

**Ответ:**  $f(z) = iz^2 + e^{-iz} + C$ , где  $C \in \mathbb{R}$ .

### Вариант контрольной работы №1.

**Задача 1.** Пусть на  $\mathbb{C}$  задана функция

$$f(z) = \frac{2x}{y+1} + i(2y + x^2), \quad z = x + iy.$$

Найти

- (1) множество  $D_r$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле вещественного анализа;
- (2) множество  $D_c$ , на котором функция  $f$  дифференцируема в смысле комплексного анализа;
- (3) на множестве  $D_c$  производную  $f'$  в смысле комплексного анализа.

**Ответ:**  $D_r = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Im} z = -1\}$ ,  $D_c = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ ,  $\forall z \in D_c \ f'(z) = 2 + 2ix$ .

**Задача 2.** Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по ее вещественной части

$$u(x, y) = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + 3y.$$

**Ответ:**  $f(z) = e^{iz^2} - 3iz + iC$ , где  $C \in \mathbb{R}$ .

## 6. Ряды Тейлора элементарных функций.

Одним из важнейших следствий интегральной формулы Коши является следующая теорема.

**Теорема 6.1.** Пусть  $f(z)$  – регулярная функция в круге  $|z - z_0| < R$ . Тогда функция  $f(z)$  допускает разложение в сходящийся в этом круге ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (6.1)$$

Разложение (6.1) единственно. Степенной ряд (6.1) называется рядом Тейлора функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z = z_0$ .

**Теорема 6.2.** Справедливы следующие разложения в ряды Тейлора в окрестности точки  $z = 0$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots, \quad |z| < 1, \quad (6.2)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < \infty, \quad (6.3)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{6} z^3 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z + \frac{1}{6} z^3 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < \infty,$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -z - \frac{1}{2} z^2 - \dots, \quad |z| < 1,$$

$$(1+z)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} z^n = 1 + \mu z + \frac{\mu(\mu-1)}{2} z^2 + \dots, \quad |z| < 1. \quad (6.4)$$

При этом для многозначных функций  $\ln(1-z)$  и  $(1+z)^\mu$  имеются в виду ветви, фиксированные равенствами  $\ln(1-z) = 0$  и  $(1+z)^\mu = 1$  при  $z = 0$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 6.3.** Непосредственным вычислением  $f^{(n)}(0)$  разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  функцию  $f(z) = \frac{1}{2-z}$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$

**Задача 6.4.** Разложить функцию  $f(z) = z^3$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 1$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $z^3 = 1 + 3(z-1) + 3(z-1)^2 + (z-1)^3, \quad |z-1| < \infty.$

## 7. Нахождение нескольких первых членов ряда Тейлора.

**Пример 7.1.** Разложить функцию

$$f(z) = \frac{3-z}{(1-2z)(2+z)}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  и указать область сходимости ряда.

**Решение.** Функция  $f(z)$  регулярна во всей комплексной плоскости за исключением двух точек  $z_1 = \frac{1}{2}$  и  $z_2 = -2$ . Из теоремы 6.1 следует, что область сходимости ряда Тейлора совпадает с кругом (с центром в точке  $z = 0$ ) максимального радиуса, в котором функция  $f(z)$  регулярна. Отсюда легко заключить, что ряд Тейлора будет сходиться в круге  $\{z : |z| < \frac{1}{2}\}$ .

Для того чтобы найти ряд Тейлора функции  $f(z)$ , разложим ее на простейшие дроби

$$\frac{3-z}{(1-2z)(2+z)} = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{2+z}. \quad (7.1)$$

Используя стандартные разложения из теоремы 6.2, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \\ \frac{1}{2+z} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7.1) найдем

$$\frac{3-z}{(1-2z)(2+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n. \quad \square$$

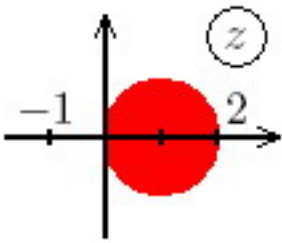
**Ответ:**  $\frac{3-z}{(1-2z)(2+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n, |z| < \frac{1}{2}$ .

**Пример 7.2.** Разложить функцию

$$f(z) = \frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 1$  и указать область сходимости ряда.

**Решение.** Функция  $f(z)$  регулярна во всей комплексной плоскости за исключением двух точек  $z_1 = -1$  и  $z_2 = 2$ . Для того чтобы определить область сходимости ряда Тейлора, достаточно найти круг максимального радиуса с центром в точке  $z = 1$ , не пересекающий точки  $z = -1$  и  $z = 2$  (см. пример 7.1). Отсюда находим, что ряд Тейлора функции  $f(z)$  будет сходиться в области  $|z-1| < 1$ , см. рисунок 5.



Разложим функцию  $f(z)$  на простейшие дроби

$$\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1+z}. \quad (7.2)$$

Рис. 5. Область  $|z-1| < 1$  выделена красным цветом. Используя стандартные разложения из теоремы 6.2, получим

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n,$$

$$\frac{2}{1+z} = \frac{2}{2+(z-1)} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n.$$

Здесь мы выделили коэффициент  $(z-1)$ , поскольку ряд Тейлора нужно построить в окрестности точки<sup>5</sup>  $z_0 = 1$ . Отсюда и из (7.2) найдем

$$\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n.$$

**Ответ:**  $\frac{5-2z-z^2}{(1+z)(2-z)} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n, |z-1| < 1.$

**Определение 7.3.** *Запись*

$$f(z) = O(g(z)) \quad \text{при } z \rightarrow z_0$$

означает, что существуют постоянная  $C$  и окрестность  $V$  точки  $z_0$  такие, что

$$|f(z)| \leq C|g(z)| \quad \text{при } z \in V.$$

**Пример 7.4.** *Разложить функцию*

$$\frac{e^z}{1-z}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  с точностью до  $O(z^3)$  и указать область сходимости ряда.

**Решение.** Функция  $\frac{e^z}{1-z}$  имеет единственную особую точку  $z = 1$ , расположенную на границе круга  $|z| < 1$ . Поэтому ее ряд Тейлора будет сходиться в круге  $|z| < 1$ .

Используя стандартные разложения, получим

$$\frac{e^z}{1-z} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3)\right) (1 + z + z^2 + O(z^3)) = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + O(z^3). \quad \square$$

**Ответ:**  $\frac{e^z}{1-z} = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + O(z^3), |z| < 1.$

**Пример 7.5.** *Разложить функцию  $\sin(e^{2z})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  с точностью до  $O(z^3)$  и указать область сходимости ряда.*

**Решение.** Функция  $\sin(e^{2z})$  регулярна в  $\mathbb{C}$ , а следовательно ее ряд Тейлора сходится во всей комплексной плоскости.

Используя стандартные разложения, получим

$$\begin{aligned} \sin(e^{2z}) &= \sin(1 + 2z + 2z^2 + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) \cos(2z + 2z^2 + O(z^3)) + \cos(1) \sin(2z + 2z^2 + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) \left(1 - \frac{1}{2}(2z + 2z^2 + O(z^3))^2 + O(z^4)\right) + \cos(1) (2z + 2z^2 + O(z^3) + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) (1 - 2z^2 + O(z^3)) + \cos(1) (2z + 2z^2 + O(z^3)) = \\ &= \sin(1) + 2\cos(1)z + 2(\cos(1) - \sin(1))z^2 + O(z^3). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Чтобы этого избежать, и искать разложение в окрестности точки ноль, можно предварительно сделать сдвиг  $\zeta = z - z_0$  (в данном примере  $\zeta = z - 1$ ).

Заметим, что было бы неправильно во втором равенстве воспользоваться стандартным разложением в ряд Тейлора для синуса

$$\sin(e^{2z}) = \sin(1 + 2z + 2z^2 + O(z^3)) = (1 + 2z + 2z^2 + O(z^3)) - O(1 + 2z + 2z^2 + O(z^3))^3 = O(1).$$

Сколько бы мы ни выписали членов в разложении синуса, поправочный член все равно будет оцениваться как  $O(1)$ , и в место ряда Тейлора мы всегда будем получать лишь оценку  $O(1)$ .  $\square$

**Ответ:**  $\sin(e^{2z}) = \sin(1) + 2\cos(1)z + 2(\cos(1) - \sin(1))z^2 + O(z^3)$ ,  $|z| < \infty$ .

### Домашнее задание:

**Задача 7.6.** Разложить функцию  $\frac{3-z^2}{(1+z)(2+z)}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $\frac{3-z^2}{(1+z)(2+z)} = -1 + \frac{2}{1+z} + \frac{1}{2+z} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$ ,  $|z| < 1$ .

**Задача 7.7.** Разложить функцию  $z^{-2}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = -1$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $z^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ ,  $|z+1| < 1$ .

**Задача 7.8.** Разложить функцию  $e^z(1+z)^{10}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  с точностью до  $O(z^3)$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $e^z(1+z)^{10} = 1 + 11z + \frac{111}{2}z^2 + O(z^3)$ ,  $|z| < 1$ .

**Задача 7.9.** Разложить функцию  $(z + \cos(2z))^{-1}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  с точностью до  $O(z^3)$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{z+\cos(2z)} = 1 - z + 3z^2 + O(z^3)$ .

**Задача 7.10.** Разложить функцию  $\cos(\cos(2z))$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  с точностью до  $O(z^4)$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $\cos(\cos(2z)) = \cos(1) + 2\sin(1)z^2 + O(z^4)$ ,  $|z| < \infty$ .

**Задача 7.11.** Разложить функцию  $\operatorname{tg}(\sin(z))$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  с точностью до  $O(z^5)$ .

**Ответ:**  $\operatorname{tg}(\sin(z)) = z + \frac{1}{6}z^3 + O(z^5)$ .

**Задача 7.12.** Разложить функцию  $e^{z \ln z}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 1$  с точностью до  $O((z-1)^4)$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $e^{z \ln z} = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \frac{1}{2}(z-1)^3 + O((z-1)^4)$ ,  $|z-1| < 1$ .

## 8. Ряд Лорана. Ряды Лорана рациональных функций.

**Теорема 8.1.** Пусть  $f(z)$  – регулярная функция в кольце  $r < |z - z_0| < R$ . Тогда функция  $f(z)$  допускает разложение в сходящийся в этом кольце ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.1)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (8.2)$$

Здесь  $\rho$  – произвольное число такое, что  $r < \rho < R$  и контур интегрирования обходится против часовой стрелки. Данное разложение единственно. Степенной ряд (8.1) называется рядом Лорана функции  $f(z)$  с центром в точке  $z = z_0$ .

**Пример 8.2.** Указать все области в которых функция  $\frac{1}{\sin z}$  может быть разложена в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 0$ .

**Решение.** Функция  $\frac{1}{\sin z}$  регулярна в области  $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n\}$ . Отсюда и из теоремы 8.1 следует, что эта функция допускает разложение в ряд Лорана в следующих областях

$$0 < |z| < \pi, \quad \pi < |z| < 2\pi, \quad \dots, \quad \pi n < |z| < \pi(n+1), \quad \dots, \quad (8.3)$$

см. рисунок 6. Каждая из этих областей является кольцом максимального размера, не содержащим особых точек функции  $\frac{1}{\sin z}$ . При этом в каждой из указанных областей разложения в ряд Лорана будут различными.  $\square$

**Ответ:**  $\pi(n-1) < |z| < \pi n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

**Пример 8.3.** Разложить функцию  $e^{\frac{1}{z^2}}$  в ряд Лорана в кольце  $0 < |z| < \infty$ .

**Решение.** Заметим, что  $\frac{1}{|z^2|} < \infty$  в кольце  $0 < |z| < \infty$ . Поэтому мы можем воспользоваться стандартным разложением (6.3) для экспоненты

$$e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}, \quad 0 < |z| < \infty. \quad \square$$

**Ответ:**  $e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$ , при  $0 < |z| < \infty$ .

**Пример 8.4.** Разложить функцию  $\frac{1}{1-z}$  в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 0$  во всех возможных областях.

**Решение.** Функция  $\frac{1}{1-z}$  имеет одну особую точку  $z = 1$ , поэтому ее можно разложить в ряд Лорана в двух областях  $|z| < 1$  и  $1 < |z| < \infty$ . Еще раз повторим, что эти области – круг и кольцо максимального размера с центром в точке  $z_0 = 0$ , которые не содержат особых точек функции  $\frac{1}{1-z}$ . Граница же этих областей должна содержать по крайней мере одну особую точку исследуемой функции.

Разложим функцию  $\frac{1}{1-z}$  в ряд Лорана в области  $|z| < 1$ . Несложно понять, что ряд Лорана в данном случае совпадает с рядом Тейлора с центром в точке  $z_0 = 0$ . Это является следствием

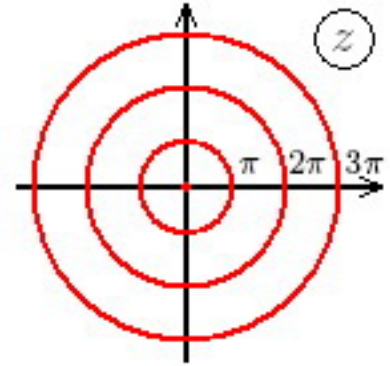


Рис. 6. Красным цветом выделены границы областей, заданных в (8.3).

того факта, что функция  $\frac{1}{1-z}$  регулярна в окрестности точки  $z_0 = 0$ . Используя стандартные разложения, получим

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Разложим функцию  $\frac{1}{1-z}$  в ряд Лорана в области  $|z| > 1$ . Для того, чтобы воспользоваться стандартным разложением (6.2), необходимо предварительно выделить параметр, который по модулю меньше единицы. Таким параметром является  $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1. \quad \square$$

**Ответ:**  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , при  $|z| < 1$ ;  $\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$  при  $|z| > 1$ .

Мы рассмотрели несколько простых примеров, в которых отыскание рядов Лорана сводилось к применению стандартных разложений из теоремы 6.2. В общем случае, не смотря на явную формулу (8.2) для коэффициентов ряда Лорана, построение этого ряда может оказаться весьма затруднительной задачей. Для эффективного вычисления коэффициентов ряда Лорана существует ряд приемов, некоторые из которых мы рассмотрим ниже.

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема.

**Теорема 8.5.** Пусть задана рациональная функция, которую нам удобно записать в виде

$$R(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}}.$$

Здесь  $z_1, \dots, z_k$  – попарно различные комплексные числа,  $n$  – целое неотрицательное число и  $n_1, \dots, n_k$  – натуральные числа. Тогда существуют такие постоянные  $A_{p,n}$ , что

$$R(z) = G_{\infty}(z) + \sum_{p=1}^k G_p(z). \quad (8.4)$$

Здесь  $G_p(z)$  – вклады от особых точек  $z_p$  и  $G_{\infty}(z)$  – вклад от бесконечности

$$G_p(z) = \frac{A_{p,1}}{z - z_p} + \frac{A_{p,2}}{(z - z_p)^2} + \dots + \frac{A_{p,n_p}}{(z - z_p)^{n_p}},$$

$$\begin{cases} G_{\infty}(z) = 0, & \text{если } \sum_{p=1}^k n_k > n, \\ G_{\infty}(z) = A_{\infty,0} + A_{\infty,1}z + \dots + A_{\infty,n_{\infty}}z^{n'}, & \text{если } n' = n - \sum_{p=1}^k n_k \geq 0, \end{cases}$$

Разложение (8.4) называется разложением на простейшие дроби.

**Замечание 8.6.** В теореме 8.5 ничего не говорится о том как находить постоянные  $A_{p,n}$ . Для того чтобы их определить, можно, например, привести выражение в правой части (8.4) к общему знаменателю и, далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в числителях обеих частей равенства (8.4), получить систему линейных уравнений на коэффициенты  $A_{p,n}$ . Решая полученную систему, можно определить постоянные  $A_{p,n}$ . Заметим также, что это не самый короткий способ определения постоянных  $A_{p,n}$ . Другой, более короткий способ, будет описан в следующем примере.

**Пример 8.7.** Разложить рациональную функцию

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)}$$

на простейшие дроби.

**Решение.** Согласно теореме 8.5 существуют постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = A + \frac{B}{z - 2} + \frac{C}{z + 4}. \quad (8.5)$$

Для определения постоянной  $A$ , устремим  $z$  к бесконечности в равенстве (8.5). В результате получим, что  $A = 2$ .

Для определения постоянной  $B$ , домножим обе части равенства (8.5) на  $(z - 2)$  и после этого положим  $z = 2$ . В результате получим

$$B = \left. \frac{2z^2 + 6z - 14}{z + 4} \right|_{z=2} = 1.$$

Для определения постоянной  $C$ , домножим обе части равенства (8.5) на  $(z + 4)$  и после этого положим  $z = -4$ . В результате получим

$$C = \left. \frac{2z^2 + 6z - 14}{z - 2} \right|_{z=-4} = 1.$$

Подставляя найденные значения для постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  в (8.5), получим требуемое разложение

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = 2 + \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z + 4}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = 2 + \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z + 4}$ .

**Пример 8.8.** Разложить рациональную функцию  $\frac{1}{z^2(z - 1)}$  на простейшие дроби.

**Решение.** Согласно теореме 8.5 существуют постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что

$$\frac{1}{z^2(z - 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z - 1}. \quad (8.6)$$

Для определения постоянной  $C$ , домножим обе части равенства (8.6) на  $(z - 1)$  и после этого положим  $z = 1$ . В результате получим

$$C = \left. \frac{1}{z^2} \right|_{z=1} = 1.$$

Для определения постоянной  $B$ , домножим обе части равенства (8.6) на  $z^2$  и после этого положим  $z = 0$ . В результате получим

$$B = \left. \frac{1}{z - 1} \right|_{z=0} = -1.$$

Для определения постоянной  $A$ , домножим обе части равенства (8.6) на  $z$  и после этого устремим  $z$  к точке ноль. В результате получим

$$A = \left. \frac{1}{z(z - 1)} - \frac{B}{z} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{1}{z(z - 1)} + \frac{1}{z} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{1}{z - 1} \right|_{z \rightarrow 0} = -1.$$

Подставляя найденные значения для постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  в (8.6), получим требуемое разложение.  $\square$

**Ответ:**  $\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}$ .

Пусть теперь требуется разложить некоторую *рациональную* функцию  $R(z)$  в ряд Лорана с центром в точке  $z_0$  в кольце  $r < |z - z_0| < R$ , которое, напомним, не должно содержать особых точек функции  $R(z)$ . Приведем план построения ряда Лорана в этом случае.

- (1) Раскладываем рациональную функцию  $R(z)$  на простейшие дроби.
- (2) Делаем сдвиг  $z = \zeta + z_0$ . Это полезно сделать, для того чтобы строить ряд Лорана с центром в точке ноль.
- (3) Используя стандартное разложение (6.2), раскладываем в ряд Лорана дроби

$$\frac{1}{z - z_p} = \frac{1}{\zeta + z_0 - z_p}.$$

При этом, если  $|z_p - z_0| < r$ , то  $|\frac{z_p - z_0}{\zeta}| < 1$  и в качестве малого параметра нужно взять  $\frac{z_p - z_0}{\zeta}$ . В противном случае, т. е. при  $|z_p - z_0| > R$ , получим, что  $|\frac{\zeta}{z_p - z_0}| < 1$  и малым параметром будет  $\frac{\zeta}{z_p - z_0}$ , см. рисунок 7. Для разложения в ряд Лорана дроби  $\frac{1}{(z - z_p)^m}$ ,

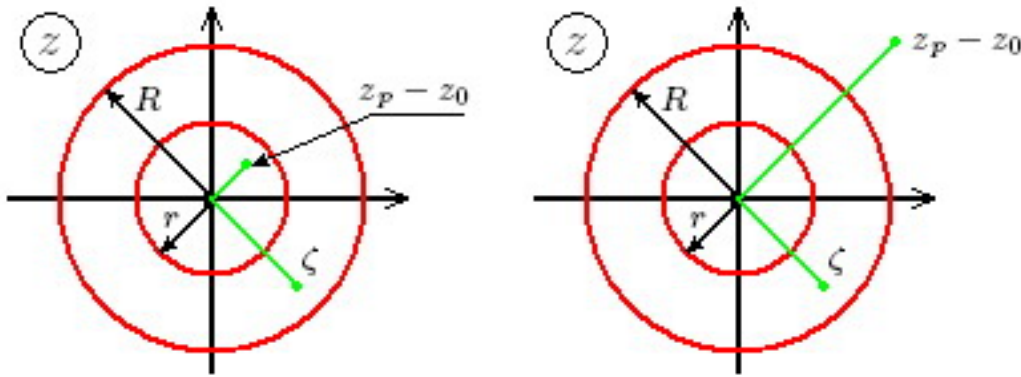


Рис. 7. Точка  $z_0$  помещена в начало координат. На левой картинке изображен случай  $|z_p - z_0| < r$ , на правой –  $|z_p - z_0| > R$ .

необходимо  $m - 1$  раз продифференцировать по  $z$  разложение в ряд Лорана дроби  $\frac{1}{z - z_p}$ .

- (4) Раскладываем в ряд Лорана функцию  $G_\infty(z) = G_\infty(\zeta + z_0)$ . Для данной функции ряд Лорана вырождается в конечный ряд Тейлора, т. е. в полином.
- (5) Возвращаемся к переменной  $z$  по формуле  $\zeta = z - z_0$ .
  - Ответ выписываем в виде суммы (8.4).

**Пример 8.9.** Разложить функцию

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)}$$

в ряд Лорана в кольце  $2 < |z| < 4$ .

**Решение.** Решение проводим согласно нашему плану.

*Шаг 1:* Раскладываем исследуемую функцию на простейшие дроби

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z - 2)(z + 4)} = 2 + \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z + 4}.$$

*Шаг 2:* Центром кольца  $2 < |z| < 4$  является точка  $z_0 = 0$ . Поэтому сдвиг выполнять не нужно.

*Шаг 3:* Раскладываем в ряд Лорана простейшие дроби

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

Здесь мы учли, что  $|\frac{2}{z}| < 1$  и  $|\frac{z}{4}| < 1$ .

Собирая полученные формулы вместе, найдем

$$\frac{2z^2 + 6z - 14}{(z-2)(z+4)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\frac{2z^2+6z-14}{(z-2)(z+4)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n$ ,  $2 < |z| < 4$ .

**Пример 8.10.** Разложить функцию

$$\frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)}$$

в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 1$  в кольце, содержащем точку  $z = 3$  и указать область сходимости полученного ряда.

**Решение.** Решение проводим согласно нашему плану.

*Шаг 1:* Раскладываем исследуемую функцию на простейшие дроби

$$\frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)} = 2 + z + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+4}.$$

*Шаг 2:* Несложно понять, что ряд Лорана требуется искать в кольце  $1 < |z-1| < 5$ . Выполняем сдвиг  $z = \zeta + 1$

$$\left. \frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)} \right|_{z=\zeta+1} = \left( 2 + z + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+4} \right)_{z=\zeta+1} = 3 + \zeta + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+5}, \quad 1 < |\zeta| < 5.$$

*Шаг 3:* Раскладываем в ряд Лорана простейшие дроби

$$\frac{1}{\zeta-1} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{1}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}}, \quad \frac{1}{|\zeta|} < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta+5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{\zeta}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \zeta^n, \quad \frac{|\zeta|}{5} < 1.$$

*Шаг 4:* Функция  $G_{\infty}(z)|_{z=\zeta+1} = 3 + \zeta$  уже разложена в ряд по степеням  $\zeta$ .

*Шаг 5:* Возвращаемся к переменной  $z$  по формуле  $\zeta = z - 1$

$$\begin{aligned} \frac{z^3 + 4z^2 - 2z - 14}{(z-2)(z+4)} &= \zeta + 3 + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+5} \Big|_{\zeta=z-1} = \zeta + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \zeta^n \Big|_{\zeta=z-1} = \\ &= (z-1) + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} (z-1)^n, \quad 1 < |z-1| < 5. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{z^3+4z^2-2z-14}{(z-2)(z+4)} = (z-1) + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{5^{n+1}}, 1 < |z-1| < 5.$

**Домашнее задание:**

**Задача 8.11.** Указать все области в которых функция  $\frac{\sin z}{z(z-1)(z-3)}$  может быть разложена в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 1$ .

**Ответ:**  $0 < |z-1| < 1, 1 < |z-1| < 2, 2 < |z-1| < \infty.$

**Задача 8.12.** Разложить функцию  $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$  в ряд Лорана в кольце  $0 < |z-1| < \infty$ .

**Ответ:**  $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-1)^{-2n-1}, 0 < |z-1| < \infty.$

**Задача 8.13.** Разложить функцию  $\frac{3z^2+3z-9}{(z-1)(z+2)}$  в ряд Лорана в кольце  $1 < |z| < 2$ .

**Ответ:**  $\frac{3z^2+3z-9}{(z-1)(z+2)} = 3 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, 1 < |z| < 2.$

**Задача 8.14.** Разложить функцию  $\frac{2}{z^2+2z}$  в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 2$  в кольце, содержащем точку  $z = -1$ , и указать область сходимости полученного ряда.

**Ответ:**  $\frac{2}{z^2+2z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-2)^n}{4^{n+1}}, 2 < |z-2| < 4.$

**Задача 8.15.** Разложить функцию из задачи 8.13 в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = -1$  в кольце, содержащем точку  $z = \frac{1}{2}$ , и указать область сходимости полученного ряда.

**Ответ:**  $\frac{3z^2+3z-9}{(z-1)(z+2)} = 3 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+1)^{n+1}}, 1 < |z+1| < 2.$

**Задача 8.16.** Разложить функцию  $\frac{2z^2+6z+8}{z^2+4}$  в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = i$  в кольце, содержащем точку  $z = -i$ , и указать область сходимости полученного ряда.

**Ответ:**  $\frac{2z^2+6z+8}{z^2+4} = 2 + \frac{3}{z-2i} + \frac{3}{z+2i} = 2 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-i)^n}{(3i)^{n+1}}, 1 < |z-i| < 3.$

**Задача 8.17.** Разложить функцию  $\frac{z^4+2z^3+2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$  в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 1$  в кольце, содержащем точку  $z = -\frac{1}{2}$ , и указать область сходимости полученного ряда.

**Ответ:**  $\frac{z^4+2z^3+2z^2+4z+1}{z(z+1)^2} = z + \frac{1}{z} + \frac{2}{(z+1)^2} = 1 + (z-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)(z-1)^n}{2^{n+1}}, 1 < |z-1| < 2.$

## 9. Классификация изолированных особых точек.

**Определение 9.1.** Точка  $z_0$  называется изолированной особой точкой функции  $f(z)$ , если существует окрестность  $0 < |z - z_0| < \rho$  (или  $\rho < |z| < \infty$ , если  $z_0 = \infty$ ) этой точки, в которой функция  $f(z)$  регулярна.

**Пример 9.2.** Найти все изолированные особые точки функции  $\frac{1}{\sin z}$ .

**Решение.** Функция  $\frac{1}{\sin z}$  имеет особенности в точках  $z = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и при  $z = \infty$ .

Легко видеть, что в окрестности точек  $z = \pi n$  функция  $\frac{1}{\sin z}$  регулярна, поэтому это изолированные особые точки.

Мы видим, что особые точки  $z = \pi n$  накапливаются на бесконечности, поэтому невозможно выделить окрестность  $\rho < |z| < \infty$ , в которой функция  $\frac{1}{\sin z}$  регулярна. Таким образом,  $z = \infty$  неизолированная особая точка.  $\square$

**Ответ:** Изолированные особые точки:  $z = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; неизолированная особая точка:  $z = \infty$ .

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции в окрестности этих точек.

**Определение 9.3.** Пусть  $z_0$  – изолированная особая точка функции  $f(z)$ .

- (1) Если предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  существует и конечен, то  $z_0$  называется устранимой особой точкой функции  $f(z)$ .
- (2) Если предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  существует и равен бесконечности, то точка  $z_0$  называется полюсом функции  $f(z)$ .
- (3) Если предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует, то  $z_0$  называется существенно особой точкой функции  $f(z)$ .

В окрестности изолированной особой точки  $z_0$  функция  $f(z)$  может быть разложена в ряд Лорана, см. теорему 8.1 на стр. 26,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \rho, \quad \text{при } z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > \rho, \quad \text{при } z_0 = \infty.$$

**Определение 9.4.** Главной частью ряда Лорана называется сумма тех членов этого ряда, которые стремятся к бесконечности при  $z \rightarrow z_0$ . При  $z_0 \neq \infty$  главная часть ряда Лорана состоит из отрицательных степеней  $(z - z_0)$ , а при  $z_0 = \infty$  из положительных степеней  $z$ .

**Теорема 9.5.**

- (1) Для того чтобы  $z_0$  была устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  равнялась нулю.
- (2) Для того чтобы точка  $z_0$  была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  содержала лишь конечное число нетривиальных членов.
- (3) Для того чтобы  $z_0$  была существенно особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  содержала бесконечное число нетривиальных членов.

**Определение 9.6.** Точка  $z_0 \neq \infty$ , в окрестности которой функция  $f(z)$  регулярна, называется нулем функции  $f(z)$  порядка  $m \geq 1$ , если ее ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$  имеет вид

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

где  $c_m \neq 0$ .

Точка  $z_0 = \infty$ , в проколотой окрестности которой функция  $f(z)$  регулярна, называется нулем порядка  $m \geq 1$ , если ее ряд Лорана в проколотой окрестности точки  $z_0$  имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m-1}}{z^{m+1}} + \dots,$$

где  $c_{-m} \neq 0$ .

Говорят, что функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  полюс порядка  $m$ , если функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет в этой точке ноль порядка  $m$ .

**Пример 9.7.** Пусть функция  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

где  $z_0 \neq \infty$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , функция  $\varphi(z)$  регулярна в окрестности точки  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

- (1) Доказать, что если  $m > 0$ , то функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  ноль порядка  $m$ .
- (2) Доказать, что если  $m < 0$ , то функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  полюс порядка  $|m|$ .

**Решение.** Докажем первое утверждение. Так как функция  $\varphi(z)$  регулярна в окрестности точки  $z_0$ , то она может быть разложена в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, \quad d_0 = \varphi(z_0) \neq 0.$$

Отсюда

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n+m} = d_0 (z - z_0)^m + d_1 (z - z_0)^{m+1} + \dots.$$

Для доказательства осталось вспомнить, что  $d_0 \neq 0$  и воспользоваться определением 9.6.

Докажем второе утверждение. Так как  $\varphi(z_0) \neq 0$ , то функция  $\frac{1}{\varphi(z)}$  регулярна в окрестности точки  $z_0$  (см. теорему 2.10) и может быть разложена в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n, \quad q_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\varphi(z)} = (z - z_0)^{|m|} \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^{n+|m|} = \\ &= q_0 (z - z_0)^{|m|} + q_1 (z - z_0)^{|m|+1} + \dots \end{aligned}$$

Для доказательства осталось вспомнить, что  $q_0 \neq 0$  и воспользоваться определением 9.6.  $\square$

**Пример 9.8.** Найти все особые точки и нули функции  $f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$  и указать их тип.

**Решение.** Функция имеет три изолированные особые точки  $z = -1, 1, \infty$ . Перепишем функцию  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 1} = \frac{2}{(z - 1)(z + 1)}.$$

Используя результаты примера (9.7) легко получить, что точки  $z = -1, 1$  – полюса первого порядка.

Вместе с тем, при больших  $z$  функция  $f(z)$  ведет себя как  $\frac{2}{z^2}$ . Отсюда следует, что ее ряд Лорана в окрестности  $z = \infty$  имеет вид

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \dots$$

Поэтому  $z = \infty$  – ноль второго порядка.  $\square$

**Ответ:**  $z = -1, 1$  – полюса первого порядка;  $z = \infty$  – ноль второго порядка.

**Пример 9.9.** Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos(z^2)} \quad (9.1)$$

и указать их тип.

**Решение.** Особые точки функции  $f(z)$  располагаются в нулях функции  $1 - \cos(z^2)$  и на бесконечности. Найдем нули функции  $1 - \cos(z^2)$

$$\cos(z^2) = 1 \iff z^2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} z = 0, \\ z = \pm\sqrt{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ z = \pm i\sqrt{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В окрестности точки  $z = 0$

$$1 - \cos(z^2) = 1 - \left(1 - \frac{z^4}{2} + O(z^8)\right) = \frac{z^4}{2} + \dots$$

$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos(z^2)} = \frac{2z}{z^4 + O(z^8)} = \frac{1}{z^3} \frac{2}{1 + O(z^4)}.$$

Таким образом, точка  $z = 0$  – полюс третьего порядка.

В окрестностях точек  $z_* = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$  функцию  $1 - \cos(z^2)$  раскладывать в ряд Тейлора неудобно. Проще вычислить несколько первых производных

$$(1 - \cos(z^2))' \Big|_{z=z_*} = 2z \sin z^2 \Big|_{z=z_*} = 0,$$

$$(1 - \cos(z^2))'' \Big|_{z=z_*} = 2 \sin(z^2) + 4z^2 \cos(z^2) \Big|_{z=z_*} = 4z_*^2 \neq 0.$$

Отсюда следует, что ряд Тейлора функции  $1 - \cos(z^2)$  в окрестностях точек  $z_*$  начинается со второй степени (см. теорему 6.1). Учитывая, что числитель в (9.1) при  $z = z_*$  не обращается в ноль получим, что точки  $z = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$  полюса второго порядка.

Поскольку особые точки накапливаются на бесконечности, то  $z = \infty$  – неизоллированная особая точка.  $\square$

**Ответ:**  $z = 0$  – полюс третьего порядка;  $z = \pm\sqrt{2\pi k}, \pm i\sqrt{2\pi k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$  – полюса второго порядка;  $z = \infty$  – неизоллированная особая точка.

**Пример 9.10.** Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sin \frac{z}{z+1}$$

и указать их тип.

**Решение.** У функции  $f(z)$  три изолированные особые точки:  $z = -1, 0, \infty$ . В точке  $z = 0$  у функции  $\sin \frac{z}{z+1}$  ноль первого порядка, поскольку

$$\left( \sin \frac{z}{z+1} \right)'_{z=0} = \cos \left( \frac{z}{z+1} \right) \frac{z+1-z}{(z+1)^2} \Big|_{z=0} = 1 \neq 0.$$

Отсюда и из того, что у функции  $\frac{1}{z^3}$  в нуле полюс третьего порядка следует, что у  $f(z)$  точка  $z = 0$  – полюс второго порядка.

При  $z \rightarrow -1$  вдоль вещественной оси функция  $\sin \frac{z}{z+1}$  осциллирует, а потому не имеет предела. Это же касается и функции  $f(z)$ . Поэтому  $z = -1$  – существенно особая точка.

При  $z \rightarrow \infty$  существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} \sin \frac{z}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} \lim_{z \rightarrow \infty} \sin \frac{z}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} \sin 1 = 0.$$

Поэтому  $z = \infty$  – устранимая особая точка.  $\square$

**Ответ:**  $z = 0$  – полюс второго порядка;  $z = -1$  – существенно особая точка;  $z = \infty$  – устранимая особая точка.

### Домашнее задание:

**Задача 9.11.** Найти все нули функции  $\sin(z^4)$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = 0$  – ноль четвертого порядка;  $z = \pm \sqrt[4]{\pi n}, \pm i \sqrt[4]{\pi n}, n \in \mathbb{N}$  – нули первого порядка.

**Задача 9.12.** Определить порядок нуля функции  $\cos(\sin z) - 1$  в точке  $z = 0$ .

**Ответ:** Ноль второго порядка.

**Задача 9.13.** Определить порядок нуля функции  $\sin^2(e^z - z - \cos z)$  в точке  $z = 0$ .

**Ответ:** Ноль четвертого порядка.

**Задача 9.14.** Определить тип особенности функции  $(z^3 - \sin^3 z)^{-2}$  в точке  $z = 0$ .

**Ответ:** Полюс 10-го порядка.

**Задача 9.15.** Определить тип особенности функции  $(1 - \cos(2z) - 2z \sin z)^{-3}$  в точке  $z = 0$ .

**Ответ:** Полюс 12-го порядка.

**Задача 9.16.** Найти все особые точки и нули функции  $\frac{z-1}{z^4-16}$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = 1$  – ноль первого порядка;  $z = \pm 2, \pm 2i$  – полюса первого порядка;  $z = \infty$  – устранимая особая точка (ноль третьего порядка).

**Задача 9.17.** Найти все особые точки и нули функции  $\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = \frac{1+\pi n}{1-\pi n}, n \in \mathbb{Z}$  – нули первого порядка;  $z = -1$  – существенно особая точка;  $z = \infty$  – устранимая особая точка (не ноль и не полюс).

**Задача 9.18.** Найти все особые точки функции  $\frac{1}{1-e^{z^2}}$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = 0$  – полюс второго порядка;  $z = \pm \sqrt{2\pi i n}, n \in \mathbb{N}$  – полюса первого порядка;  $z = \infty$  – неизоллированная особая точка.

**Задача 9.19.** Найти все особые точки функции  $\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(1-e^z)\sin z}$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = 0$  – полюс второго порядка;  $z = \pm\pi n, \pm 2i\pi n, n \in \mathbb{N}$  – полюса первого порядка;  $z = 1$  – существенно особая точка;  $z = \infty$  – неизолированная особая точка.

**Задача 9.20.** Найти все особые точки функции  $\frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{\sin(z^2)(1-e^z)}$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = -1$  – существенно особая точка;  $z = 0$  – полюс третьего порядка;  $z = \pm 2\pi i n, \pm\sqrt{\pi n}, \pm i\sqrt{\pi n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$  – полюса первого порядка;  $z = \infty$  – неизолированная особая точка.

**Задача 9.21.** Найти все особые точки функции  $\frac{1}{(z+z^2)\cos\frac{\pi}{2+z^2}}$  и указать их тип.

**Ответ:**  $z = 0$  – полюс третьего порядка;  $z = -1, \pm i\sqrt{2 - \frac{2}{2n+1}}$ , где  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  – полюса первого порядка;  $z = \pm i\sqrt{2}$  – неизолированные особые точки;  $z = \infty$  – ноль второго порядка.

## 10. Нахождение главной части ряда Лорана функции в окрестности ее полюса.

**Пример 10.1.** Найти главную часть ряда Лорана функции

$$\frac{e^z}{z \sin z}$$

в окрестности точки  $z = 0$ .

**Решение.** Воспользуемся стандартными разложениями в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z \sin z} &= \frac{1 + z + O(z^2)}{z(z + O(z^3))} = \frac{1}{z^2} \frac{1 + z + O(z^2)}{(1 + O(z^2))} = \frac{1}{z^2} (1 + z + O(z^2))(1 + O(z^2)) = \\ &= \frac{1}{z^2} (1 + z + O(z^2)) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + O(1). \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ .

**Пример 10.2.** Найти главную часть ряда Лорана функции

$$\frac{\sin z}{z^2(1 - e^{2z})^2}$$

в окрестности  $z = 0$ .

**Решение.** Воспользуемся стандартными разложениями в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2(1 - e^{2z})^2} &= \frac{z - \frac{1}{6}z^3 + O(z^5)}{z^2 \left(1 - 1 - 2z - 2z^2 - \frac{4}{3}z^3 + O(z^4)\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{z \left(2z + 2z^2 + \frac{4}{3}z^3 + O(z^4)\right)^2} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{4z^3 \left(1 + z + \frac{2}{3}z^2 + O(z^3)\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{4z^3 \left(1 + 2z + \frac{7}{3}z^2 + O(z^3)\right)} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)}{4z^3} \left(1 - \left(2z + \frac{7}{3}z^2 + O(z^3)\right) + \left(2z + \frac{7}{3}z^2 + O(z^3)\right)^2 + O(z^3)\right) = \\ &= \frac{1}{4z^3} \left(1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)\right) \left(1 - 2z + \frac{5}{3}z^2 + O(z^3)\right) = \frac{1}{4z^3} \left(1 - 2z + \frac{3}{2}z^2 + O(z^3)\right) = \\ &= \frac{1}{4z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8z} + O(1). \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{4z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8z}$ .

**Пример 10.3.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{1}{\sin(\pi z)}$  в окрестности всех ее изолированных особых точек.

**Решение.** Изолированные особые точки имеют вид  $z = n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Все эти точки – полюса первого порядка. Разложим функцию  $\sin(\pi z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = n$

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \sin(\pi z) \Big|_{z=n} + (\sin(\pi z))' \Big|_{z=n} (z - n) + O((z - n)^2) = \\ &= \pi \cos(\pi n)(z - n) + O((z - n)^2) = (-1)^n \pi (z - n) + O((z - n)^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{(-1)^n \pi (z - n)} \frac{1}{1 + O(z - n)} = \frac{1}{(-1)^n \pi (z - n)} + O(1). \quad \square$$

**Ответ:** В окрестности полюса  $z = n$  главная часть ряда Лорана имеет вид  $\frac{1}{(-1)^n \pi(z-n)}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 10.4.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{\sin z}{\cos z - \cos 2}$  в окрестности  $z = 2$ .

**Ответ:**  $-\frac{1}{z-2}$ .

**Задача 10.5.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{2-z}{\sin(e^z-1)}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{2}{z}$ .

**Задача 10.6.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{2+z^2}{(z-1)^2}$  в окрестности  $z = 1$ .

**Ответ:**  $\frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1}$ .

**Задача 10.7.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{1+z}{z \ln z}$  в окрестности  $z = 1$ .

**Ответ:**  $\frac{2}{z-1}$ .

**Задача 10.8.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $e^z \operatorname{ctg}^2 z$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ .

**Задача 10.9.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{1+z}{(1-z)(1-\cos z)}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{2}{z^2} + \frac{4}{z}$ .

**Задача 10.10.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{e^{2z}}{\arcsin z \sin z}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$ .

**Задача 10.11.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{e^z}{e^{2z} + e^z - 2 - 3z}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{2}{5z^2} + \frac{4}{25z}$ .

**Задача 10.12.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{z}{(z^2+2z-3)^2}$  в окрестности  $z = 1$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{32(z-1)^2} + \frac{1}{16(z-1)}$ .

**Задача 10.13.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{1+z}{e^z - \cos z - \sin z}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z}$ .

**Задача 10.14.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{1+3z}{z^3(1-2z)}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{z^3} + \frac{5}{z^2} + \frac{10}{z}$ .

**Задача 10.15.** Найти главную часть ряда Лорана функции  $\frac{1+z}{(1-ze^z)(z-\sin z)}$  в окрестности  $z = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{6}{z^3} + \frac{12}{z^2} + \frac{183}{10z}$ .

## 11. 2-ая контрольная работа (задачи: 3, 4; 30 минут).

**Комментарии к задаче 3.** Студент должен уметь указывать область сходимости ряда Лорана по функции, раскладывать рациональную функцию на простейшие дроби, уметь раскладывать простейшие дроби в ряд Лорана. На контрольную нужно выносить рациональные функции с двумя полюсами в  $\mathbb{C}$  и устранимой особенностью на бесконечности.

**Комментарии к задаче 4.** Студент должен уметь раскладывать функции в ряд Тейлора. Особенно стоит повторить классическую формулу Тейлора ( $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots$ ), без нее многие задачи становятся трудными (студенты не всегда знают как применить классические разложения элементарных функций, если необходимо строить разложение не в окрестности нуля). Студент должен уметь применять разложения в ряды Тейлора для разложения функции в ряд Лорана и, в том числе, правильно писать оценку для остаточных членов. На контрольную не стоит выносить полюсы выше второго порядка.

### Вариант контрольной работы №2.

**Задача 3.** Разложить функцию

$$\frac{z^2 - 2}{(z - 1)(z - 2)}$$

в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = -1$  в области содержащей точку  $z = 1.5$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $\frac{z^2-2}{(z-1)(z-2)} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^{n+1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$ , где  $2 < |z + 1| < 3$ .

**Задача 4.** Найти главную часть ряда Лорана функции

$$\frac{z + 1}{(e^z - e)^2}$$

в окрестности точки  $z_0 = 1$ .

**Ответ:**  $\frac{2}{e^2(z-1)^2} - \frac{1}{e^2(z-1)}$ .

### Вариант контрольной работы №2.

**Задача 3.** Разложить функцию

$$\frac{3 - z^2}{z^2 + 3iz}$$

в ряд Лорана с центром в точке  $z_0 = 4$  в области содержащей точку  $z = i$  и указать область сходимости ряда.

**Ответ:**  $\frac{3-z^2}{z^2+3iz} = -1 - \frac{i}{z} + \frac{4i}{z+3i} = -1 - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(z-4)^{n+1}} + 4i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-4)^n}{(4+3i)^{n+1}}$ , где  $4 < |z - 4| < 5$ .

**Задача 4.** Найти главную часть ряда Лорана функции

$$\left(\frac{z}{\ln z}\right)^2$$

в окрестности точки  $z_0 = 1$ , где под  $\ln z$  понимается ветвь, регулярная в окрестности точки  $z_0 = 1$ , и, удовлетворяющая условию  $\ln 1 = 0$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1}$ .

## 12. Вычисление вычетов функции.

**Определение 12.1.** Пусть  $z_0$  – изолированная особая точка функции  $f(z)$  и ее разложение в ряд Лорана в выколотой окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{если } z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{если } z_0 = \infty.$$

Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$  называется величина

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}, \quad \text{если } z_0 \neq \infty,$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad \text{если } z_0 = \infty.$$

**Пример 12.2.** Найти вычет функции  $\frac{z}{1-\cos z}$  в нуле.

**Решение.** Найдем главную часть ряда Лорана

$$\frac{z}{1-\cos z} = \frac{z}{\frac{1}{2}z^2 + O(z^4)} = \frac{2}{z} \frac{1}{1+O(z^2)} = \frac{2}{z} + O(z).$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=0} \left( \frac{z}{1-\cos z} \right) = 2. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \left( \frac{z}{1-\cos z} \right) = 2.$

Для вычисления вычета в полюсе функции может быть полезна следующая теорема.

**Теорема 12.3.**

- (1) Пусть функция  $f(z)$  представима в виде  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  регулярны в точке  $z_0 \neq \infty$  и  $z_0$  – ноль первого порядка функции  $\psi(z)$ . Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

- (2) Пусть функция  $f(z)$  представима в виде  $f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z)$ , где функция  $\varphi(z)$  регулярна в точке  $z_0 \neq \infty$ . Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(z_0).$$

**Пример 12.4.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{1+z}{z(z^2-1)}.$$

**Решение.** Воспользуемся пунктом (1) теоремы 12.3, полагая  $\varphi(z) = \frac{1+z}{z}$  и  $\psi(z) = z^2 - 1$ ,

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{1+z}{z(z^2-1)} = \left. \frac{1+z}{z(z^2-1)'} \right|_{z=1} = \left. \frac{1+z}{2z^2} \right|_{z=1} = 1. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=1} \frac{1+z}{z(z^2-1)} = 1.$

**Пример 12.5.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin(2z)(1+z^2)}.$$

**Решение.** Воспользуемся пунктом (1) теоремы 12.3, полагая  $\varphi(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$  и  $\psi(z) = \sin(2z)$ ,

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin(2z)(1+z^2)} = \frac{e^z}{(1+z^2)(\sin(2z))'} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2 \cos(2z)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin(2z)(1+z^2)} = \frac{1}{2}.$

**Пример 12.6.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^3}.$$

**Решение.** Воспользуемся пунктом (2) теоремы 12.3, полагая  $m = 3$ ,

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^3} = \frac{1}{2} (e^{2z})'' \Big|_{z=0} = 2 e^{2z} \Big|_{z=0} = 2. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^3} = 2.$

**Пример 12.7.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2}.$$

**Решение.** Воспользуемся пунктом (2) теоремы 12.3, полагая  $m = 2$ ,

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2} = \left( \frac{z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{(z+i)^2 - 2z(z+i)}{(z+i)^4} \Big|_{z=i} = \frac{-4+4}{16} = 0. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2} = 0.$

Для вычисления вычета на бесконечности может быть полезна следующая теорема.

**Теорема 12.8.** Пусть  $z = \infty$  – устранимая особая точка функции  $f(z)$ . Тогда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

**Пример 12.9.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{1+z^2}.$$

**Решение.** Воспользуемся теоремой 12.8

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left( 0 - \frac{z}{1+z^2} \right) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{1+z^2} = -1. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{1+z^2} = -1.$

Иногда, для вычисления вычета удобнее найти несколько первых членов ряда Лорана.

**Пример 12.10.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=\infty} z \cos \left( \frac{z}{1+z^2} \right).$$

**Решение.** Найдем несколько первых членов ряда Лорана в окрестности точки  $z = \infty$

$$\begin{aligned} z \cos \left( \frac{z}{1+z^2} \right) &= z \cos \left( \frac{1}{z} \frac{1}{1+z^{-2}} \right) = z \cos \left( \frac{1}{z} (1 - z^{-2} + O(z^{-4})) \right) = \\ &= z \cos (z^{-1} + O(z^{-3})) = z \left( 1 - \frac{1}{2} (z^{-1} + O(z^{-3}))^2 + O(z^{-4}) \right) = z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} z \cos \left( \frac{z}{1+z^2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\infty} z \cos \left( \frac{z}{1+z^2} \right) = \frac{1}{2}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 12.11.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{1+z^3}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{3}$ .

**Задача 12.12.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1-z}{(1-e^z)(1+z)^5 \cos z}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1-z}{(1-e^z)(1+z)^5 \cos z} = -1$ .

**Задача 12.13.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z}{\cos z - \cos 1}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z}{\cos z - \cos 1} = -1$ .

**Задача 12.14.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z}{2 \sin^2 z - 1}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z}{2 \sin^2 z - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

**Задача 12.15.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{e^z}{\operatorname{tg}^2 z - 1}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{e^z}{\operatorname{tg}^2 z - 1} = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}}$ .

**Задача 12.16.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{3-z}{\operatorname{tg}(e^z-1)}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{3-z}{\operatorname{tg}(e^z-1)} = 3$ .

**Задача 12.17.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z}{(e^z-1)^3}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z}{(e^z-1)^3} = -\frac{3}{2}$ .

**Задача 12.18.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{\sin(z^{-1})}{(z+1)^3}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{\sin(z^{-1})}{(z+1)^3} = \frac{1}{2} \sin 1 - \cos 1$ .

**Задача 12.19.** *Найти вычет*  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin z - z \cos z}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin z - z \cos z} = \frac{9}{5}$ .

**Задача 12.20.** Найти вычет  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin\left(\frac{z}{z+1}\right)}{1-\cos z^2}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin\left(\frac{z}{z+1}\right)}{1-\cos(z^2)} = \frac{5}{3}$ .

**Задача 12.21.** Найти вычет  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-z^2}\right)}{(1-e^z)\sin(z^2)}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-z^2}\right)}{(1-e^z)\sin(z^2)} = -\frac{13e}{12}$ .

**Задача 12.22.** Найти вычет  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1+z}{(e^z-1)\sin^2 z}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1+z}{(e^z-1)\sin^2 z} = -\frac{1}{12}$ .

**Задача 12.23.** Найти вычет  $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^2}{(1+z)(2-z)}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^2}{(1+z)(2-z)} = 1$ .

**Задача 12.24.** Найти вычет  $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{(1-z)(2+z)}$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)} = \frac{e}{3} + \frac{1}{3e^2}$ .

### 13. Теорема о вычетах. Вычисление интегралов по замкнутому контуру.

Полезность понятия вычета оправдывает следующая теорема.

**Теорема 13.1** (Теорема о вычетах). Пусть функция  $f(z)$  регулярна в области  $D$ , за исключением конечного числа точек  $z_k \in D$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и непрерывна вплоть до границы  $\partial D$ , за исключением тех же точек. Граница  $\partial D$  области  $D$  предполагается состоящей из конечного числа кусочно гладких ограниченных контуров. Тогда

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z),$$

где граница  $\partial D$  обходится в положительном направлении (т. е. при движении по границе  $\partial D$  в направлении интегрирования область  $D$  остается слева).

**Пример 13.2.** Вычислить интеграл

$$\oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+4)}.$$

**Решение.** Используя теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+4)} &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=0} \left( \frac{1}{z^2(z^2+4)} \right) + \operatorname{res}_{z=-2i} \left( \frac{1}{z^2(z^2+4)} \right) \right) = \\ &= 2\pi i \left( \left( \frac{1}{z^2+4} \right)' \Big|_{z=0} + \frac{1}{2z^3} \Big|_{z=-2i} \right) = 2\pi i \left( -\frac{2z}{(z^2+4)^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{16i} \right) = \frac{\pi}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+4)} = \frac{\pi}{8}.$

**Пример 13.3.** Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)}. \quad (13.1)$$

**Решение.** Используя теорему о вычетах, можно получить две различные формулы для вычисления интеграла (13.1). Полагая  $D = \{|z| < 2\}$ , найдем

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = 2\pi i \sum_{z_*=\pm 1, \pm i} \operatorname{res}_{z=z_*} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)}.$$

Для  $D = \{|z| > 2\}$  теорема о вычетах дает

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = -2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=3} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} + \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} \right). \quad (13.2)$$

Знак минус в формуле (13.2) появился из-за того, что область  $|z| > 2$  остается справа при обходе контура против часовой стрелки.

Для вычисления интеграла (13.1) проще воспользоваться формулой (13.2). Простые вычисления дают

$$\operatorname{res}_{z=3} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = \frac{27}{80}, \quad \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = 0,$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = \frac{27\pi i}{40}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)(z-3)} = \frac{27\pi i}{40}.$

**Пример 13.4.** Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} dz.$$

**Решение.** Как и в примере 13.3 разумнее вычислять интеграл по вычетам, расположенным в области  $|z| > 2$ ,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} = 2\pi i. \quad \square$$

**Ответ:**  $\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z-1} dz = 2\pi i.$

**Домашнее задание:**

**Задача 13.5.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z+1|=1} \frac{e^z}{z^3+1} dz.$

**Ответ:**  $\oint_{|z+1|=1} \frac{e^z}{z^3+1} dz = \frac{2\pi i}{3e}.$

**Задача 13.6.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z|=\sqrt{2}} \frac{e^{\alpha z}}{\sin(z^2+1)} dz$ , где  $\alpha$  – комплексная постоянная.

**Ответ:**  $\oint_{|z|=\sqrt{2}} \frac{e^{\alpha z}}{\sin(z^2+1)} dz = 2\pi i \sin \alpha.$

**Задача 13.7.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z \sin z} dz.$

**Ответ:**  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z \sin z} dz = 4\pi i.$

**Задача 13.8.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{1-\cos z} dz.$

**Ответ:**  $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{1-\cos z} dz = 4\pi i.$

**Задача 13.9.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z+3} e^{\frac{2z}{z+1}} dz.$

**Ответ:**  $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z+3} e^{\frac{2z}{z+1}} dz = -10e^2\pi i + 6e^3\pi i.$

**Задача 13.10.** Вычислить интеграл  $\oint_{|z|=315} \frac{z}{\sin z} dz$ .

**Ответ:**  $\oint_{|z|=315} \frac{z}{\sin z} dz = 200 \pi^2 i$ .

## 14. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad (14.1)$$

где  $F(z)$  – функция регулярная в круге  $|z| < 1$  (или в  $|z| > 1$ ), за исключением конечного числа точек, и непрерывна вплоть до границы  $|z| = 1$ , за исключением тех же точек. Заменой переменных  $z = e^{i\varphi}$  интеграл (14.1) сводится к контурному интегралу

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\varphi}) d\varphi = \left( de^{i\varphi} = ie^{i\varphi} d\varphi \iff d\varphi = \frac{dz}{iz} \right) = \oint_{|z|=1} \frac{F(z)}{iz} dz, \quad (14.2)$$

где контур интегрирования обходится против часовой стрелки. Здесь мы учли тот факт, что при отображении  $z = e^{i\varphi}$  интервал  $[0, 2\pi)$  переходит окружность  $|z| = 1$ , которая обходится один раз против часовой стрелки. Вычисляя интеграл в правой части (14.2) по вычетам, можно найти исходный интеграл (14.1).

**Пример 14.1.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

**Решение.**

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi = \left( z = e^{i\varphi} \right) = \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{iz} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{iz} = 2\pi. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi$ .

Если подынтегральная функция содержит тригонометрические функции  $\sin \varphi$  или  $\cos \varphi$ , то их необходимо преобразовать по формулам Эйлера

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

**Пример 14.2.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \varphi} d\varphi.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{1}{2}e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}} d\varphi = \left( z = e^{i\varphi} \right) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left( 2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2z} \right)} = \\ &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_-)(z - z_+)}, \end{aligned}$$

где  $z_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$  – корни квадратного полинома  $z^2 + 4z + 1$ . В силу того, что  $|z_+| < 1$ , а  $|z_-| > 1$ , получим

$$\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_-)(z - z_+)} = 4\pi \operatorname{res}_{z=z_+} \frac{1}{(z - z_-)(z - z_+)} = \frac{4\pi}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ .

**Пример 14.3.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} d\varphi.$$

**Решение.** Преобразуем  $\sin^2 \varphi$  по формуле Эйлера

$$\sin^2 \varphi = \left( \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}).$$

Поскольку подынтегральная функция фактически зависит от  $e^{2i\varphi}$ , то удобнее сделать замену переменных  $z = e^{2i\varphi}$ . Интервал интегрирования  $[-\pi, \pi)$  при отображении  $z = e^{2i\varphi}$  переходит в окружность, которая обходится против часовой стрелки *дважды*. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2\varphi)}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} d\varphi &= \left( de^{2i\varphi} = 2ie^{2i\varphi} d\varphi \iff d\varphi = \frac{dz}{2iz} \right) = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2iz \left(1 - \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4z}\right)^2} = \\ &= \frac{16}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(6z - z^2 - 1)^2} = \frac{16}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2}, \end{aligned}$$

где  $z_{\pm} = 3 \pm 2\sqrt{2}$  – корни квадратного полинома  $z^2 - 6z + 1$ . Учитывая, что  $|z_-| < 1$ , а  $|z_+| > 1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{16}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2} &= 32\pi \operatorname{res}_{z=z_-} \frac{z}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2} = 32\pi \left( \frac{z}{(z - z_+)^2} \right)' \Big|_{z=z_-} = \\ &= 32\pi \frac{(z - z_+)^2 - 2z(z - z_+)}{(z - z_+)^4} \Big|_{z=z_-} = -32\pi \frac{z + z_+}{(z - z_+)^3} \Big|_{z=z_-} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\sin^2 \varphi)^2} d\varphi = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 14.4.** Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \cos^2(e^{-i\varphi}) d\varphi$ .

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \cos^2(e^{-i\varphi}) d\varphi = 2\pi$ .

**Задача 14.5.** Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{i + \sin \varphi}$ .

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{i + \sin \varphi} = -\sqrt{2}\pi i$ .

**Задача 14.6.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos \varphi}$ .

**Ответ:**  $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos \varphi} = \frac{\pi}{3}$ .

**Задача 14.7.** Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{3+\sin \varphi} d\varphi$ .

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{3+\sin \varphi} d\varphi = \left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \pi$ .

**Задача 14.8.** Вычислить интеграл  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(2-\sin \varphi)^2}$ .

**Ответ:**  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(2-\sin \varphi)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ .

**Задача 14.9.** Вычислить интеграл  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{5+\sin \varphi} d\varphi$ .

**Ответ:**  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{5+\sin \varphi} d\varphi = (10 - 4\sqrt{6})\pi$ .

**Задача 14.10.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1+a^2 \sin^2 \varphi}$ , где  $a \geq 0$ .

**Ответ:**  $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1+a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**Задача 14.11.** Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+e^{i\varphi} \cos \varphi}$ .

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+e^{i\varphi} \cos \varphi} = \frac{4}{5}\pi$ .

**Задача 14.12.** Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{2+e^{i\varphi}} d\varphi$ .

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{2+e^{i\varphi}} d\varphi = -\frac{\pi i}{4}$ .

**Задача 14.13.** Вычислить интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{16 \cos \varphi + 1 + 16i \sin \varphi}$ .

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{16 \cos \varphi + 1 + 16i \sin \varphi} = 0$ .

## 15. 3-ая контрольная работа (задачи: 5, 6; 30 минут).

**Комментарии к задаче 5.** Студент должен уметь по виду функции оценить сколько точных членов ряда Тейлора понадобится для нахождения вычета и использовать полученные разложения для нахождения вычета. На контрольную стоит выносить вычет в полюсе не выше третьего порядка (в слабых группах второго).

**Комментарии к задаче 6.** Студент должен уметь делать замену переменных в криволинейном интеграле, понимать почему замена  $z = e^{i\varphi}$  переводит отрезок в окружность (хорошо бы, чтобы студент понимал что происходит при замене вида  $z = e^{2i\varphi}$ ), вычислять полученный интеграл (по замкнутому контуру) по вычетам. На контрольную не стоит выносить сложные вычислительные примеры.

### Вариант контрольной работы №3.

**Задача 5.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{(1-z^2)(1-\cos z)^2}.$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{(1-z^2)(1-\cos z)^2} = 4.$

**Задача 6.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \cos(e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi.$

### Вариант контрольной работы №3.

**Задача 5.** Найти вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{(z+z^2) \cos \frac{\pi}{2+z^2}}.$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{(z+z^2) \cos \frac{\pi}{2+z^2}} = \frac{6}{\pi}.$

**Задача 6.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\exp(e^{i\varphi}) - 1}.$$

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\exp(e^{i\varphi}) - 1} = -\pi.$

## 16. Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx, \quad (16.1)$$

где  $R(x)$  – рациональная функция. Для того чтобы обеспечить сходимость интеграла (16.1), будем предполагать, что ни одна из особых точек  $\{z_k\}_{k=1}^n$  функции  $R(z)$  не лежит на вещественной оси и при больших значениях  $z$  выполняется оценка  $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ .

Для вычисления интеграла (16.1) воспользоваться непосредственно теоремой 13.1 о вычетах нельзя, см. стр. 44, потому что контур интегрирования не ограничен. Для того чтобы воспользоваться этой теоремой, рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\oint_{\gamma} R(z) dz, \quad (16.2)$$

где контур интегрирования  $\gamma$  состоит из отрезка  $[-R, R]$  вещественной оси и полуокружности  $C_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$  и обходится против часовой стрелки. Радиус  $R$  выбираем так, чтобы

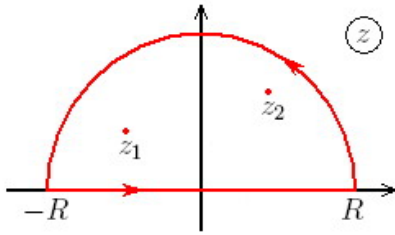


Рис. 8. Контур  $\gamma$  выделен красным цветом.

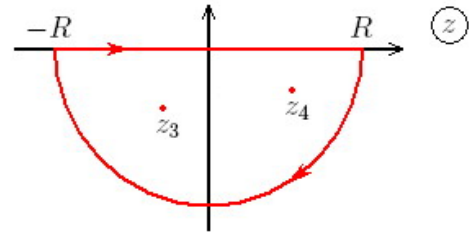


Рис. 9. Контур  $\gamma$  выделен красным цветом.

все особые точки функции  $R(z)$  оказались внутри круга  $|z| < R$ , см. рисунок 8. Интеграл (16.2) легко найти с помощью теоремы о вычетах

$$\oint_{\gamma} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res}_{z=z_k} R(z). \quad (16.3)$$

С другой стороны

$$\oint_{\gamma} R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz. \quad (16.4)$$

Учитывая оценку  $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ , получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x) dx = \int_{\mathbb{R}} R(x) dx,$$

$$\left| \int_{C_R} R(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |R(z)| |dz| \leq \pi R \max_{z \in C_R} |R(z)| = O\left(\frac{1}{R}\right) \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) dz = 0.$$

Переходя теперь к пределу  $R \rightarrow \infty$  в равенстве (16.3), получим

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res} R(z). \quad (16.5)$$

Аналогично, замыкая контур интегрирования  $\gamma$  в интеграле (16.2) в нижнюю полуплоскость, см. рисунок 9, можно доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx = -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k < 0}} \operatorname{res} R(z). \quad (16.6)$$

**Пример 16.1.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Решение.** У функции  $\frac{1}{1+z^2}$  две особые точки  $z = \pm i$ . Замыкая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

**Пример 16.2.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x dx}{(x+2i)^2(x-i)^5}.$$

**Решение.** У функции  $\frac{z}{(z+2i)^2(z-i)^5}$  две особые точки  $z = i, -2i$ . Заметим, что искать вычет в точке  $z = -2i$  (полюс второго порядка) значительно легче, чем в точке  $z = i$  (полюс пятого порядка). Замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x dx}{(x+2i)^2(x-i)^5} &= -2\pi i \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{z}{(z+2i)^2(z-i)^5} = -2\pi i \left( \frac{z}{(z-i)^5} \right)' \Big|_{z=-2i} = \\ &= -2\pi i \left. \frac{(z-i)^5 - 5z(z-i)^4}{(z-i)^{10}} \right|_{z=-2i} = -2\pi i \left. \frac{z-i-5z}{(z-i)^6} \right|_{z=-2i} = -\frac{14\pi}{3^6}. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x dx}{(x+2i)^2(x-i)^5} = -\frac{14\pi}{3^6}.$

**Пример 16.3.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

**Решение.** Из четности подынтегральной функции следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1} dx. \quad (16.7)$$

У функции  $\frac{z^2+z}{z^4+1}$  четыре особые точки  $z = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$ . Замыкая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1} dx &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z^2}{z^4+1} + \operatorname{res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z^2}{z^4+1} \right) = 2\pi i \left( \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left( e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{2i} (e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16.7) найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

**Домашнее задание:**

**Задача 16.4.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-2x+10}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3}.$

**Задача 16.5.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+x+1}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

**Задача 16.6.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{\pi}{16}.$

**Задача 16.7.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(x^2-6ix-10)^2}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(x^2-6ix-10)^2} = 0.$

**Задача 16.8.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{2+x}{(x^2+1)^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{2+x}{(x^2+1)^2} dx = \pi.$

**Задача 16.9.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+i)^2}.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+i)^2} = \frac{\pi}{4} e^{\frac{5\pi i}{4}}.$

**Задача 16.10.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x-i)^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x-i)^2} dx = 0.$

**Задача 16.11.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2-2ix-2)}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-2x+2)(x^2-2ix-2)} = \frac{\pi(i-1)}{8}.$

**Задача 16.12.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-2ix-5)}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2-4x+5)(x^2-2ix-5)} = \frac{\pi(2i-1)}{20}.$

**Задача 16.13.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2\pi}{x-i}} \frac{dx}{x^2+1}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2\pi}{x-i}} \frac{dx}{x^2+1} = -\pi.$

**Задача 16.14.** Вычислить интеграл  $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^{2n}+1)^2},$  где  $n \in \mathbb{N}.$

**Ответ:**  $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^{2n}+1)^2} = \frac{\pi(2n-1)}{4n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

**Задача 16.15.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(2-e^{iax})},$  где  $a \geq 0.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(2-e^{iax})} = \frac{\pi e^a}{2e^a-1}.$

**Задача 16.16.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x+4i}},$  где выбрана непрерывная ветвь функции  $\sqrt{x+4i}$  такая, что  $\sqrt{4i} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x+4i}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

## 17. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx, \quad (17.1)$$

где  $R(x)$  – рациональная функция и  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Для того чтобы обеспечить сходимость интеграла (17.1), будем предполагать, что ни одна из особых точек  $\{z_k\}_{k=1}^n$  функции  $R(z)$  не лежит на вещественной оси и при больших значениях  $z$  выполняется оценка  $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ .

Основная идея вычисления интеграла (17.1) во многом напоминает вычисление интеграла (16.1), см. стр. 51. Однако есть одно важное отличие. Для обоснования формул (16.5) и (16.6) нам понадобилось существование пределов

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^{\pm}} R(z) dz = 0,$$

где  $C_R^+ = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $C_R^- = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ . В случае интеграла вида (17.1) эти пределы естественно заменяются на следующие

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} R(z) e^{i\alpha z} dz \stackrel{?}{=} 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} R(z) e^{i\alpha z} dz \stackrel{?}{=} 0. \quad (17.2)$$

Упомянутое отличие заключается в том, что пределы (17.2) не могут существовать одновременно. Причина этого обстоятельства заключается в том, что функция  $e^{i\alpha z}$  экспоненциально растет при  $z \rightarrow -i\infty$ , если  $\alpha > 0$  и при  $z \rightarrow +i\infty$ , если  $\alpha < 0$ .

Один из пределов (17.2) все же существует. Этот факт обосновывает следующая теорема.

**Теорема 17.1** (лемма Жордана).

- Пусть функция  $g(z)$  непрерывна в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^+} |g(z)| = 0.$$

Тогда для любого  $\alpha > 0$  существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

- Пусть функция  $g(z)$  непрерывна в нижней полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^-} |g(z)| = 0.$$

Тогда для любого  $\alpha < 0$  существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Выписывая аналоги формул (16.3), и (16.4) и используя лемму Жордана, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx &= 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res} R(z) e^{i\alpha z} \quad \text{при } \alpha > 0, \\ \int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\alpha x} dx &= -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k < 0}} \operatorname{res} R(z) e^{i\alpha z} \quad \text{при } \alpha < 0. \end{aligned}$$

**Пример 17.2.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

**Решение.** Функция  $e^{iz}$  убывает в верхней полуплоскости, контур интегрирования необходимо замыкать там же (лемма Жордана). Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = 2\pi i \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{e}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$

**Пример 17.3.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx. \quad (17.3)$$

**Решение.** Интеграл (17.3) удобно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \operatorname{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \right). \quad (17.4)$$

Функция  $e^{iz}$  убывает в верхней полуплоскости, контур интегрирования необходимо замыкать там же (лемма Жордана). Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=i} \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} + \operatorname{res}_{z=2i} \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{i e^{-1}}{2i(-1+4)} + \frac{2i e^{-2}}{(-4+1)4i} \right) = \frac{\pi i}{3} (e^{-1} - e^{-2}). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (17.4), найдем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{3} (e^{-1} - e^{-2}) = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}.$

**Пример 17.4.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{(x-i)^2(x+2i)} dx.$$

**Решение.** Используя формулы Эйлера, см. теорему 1.8 на стр. 5, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{(x-i)^2(x+2i)} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{(x-i)^2(x+2i)} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{(x-i)^2(x+2i)} dx = \\ &= \pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+2i)} - \pi i \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{e^{-iz}}{(z-i)^2(z+2i)} = \pi i \left( \frac{e^{iz}}{z+2i} \right)' \Big|_{z=i} - \pi i \frac{e^{-iz}}{(z-i)^2} \Big|_{z=-2i} = \\ &= \frac{4\pi i}{9e} + \frac{\pi i}{9e^2} = \frac{\pi i(4e+1)}{9e^2}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{(x-i)^2(x+2i)} dx = \frac{\pi i(4e+1)}{9e^2}.$

**Домашнее задание:**

**Задача 17.5.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+2x+5} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+2x+5} dx = \frac{\pi \cos 1}{2e^2}.$

**Задача 17.6.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{(x^2+6x+10)^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x)}{(x^2+6x+10)^2} dx = -\frac{3\pi \sin 6}{2e^2}.$

**Задача 17.7.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \cos(2x)}{(x^2+4)^2(x+i)} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \cos(2x)}{(x^2+4)^2(x+i)} dx = \frac{(17-4e^2)\pi}{36e^4}.$

**Задача 17.8.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+2ix-2} dx,$  где  $\alpha \in \mathbb{R}.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+2ix-2} dx = 0$  при  $\alpha \geq 0$  и  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+2ix-2} dx = 2\pi e^\alpha \sin \alpha$  при  $\alpha < 0.$

## 18. Вычисление интегралов по вещественной оси от функций, содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования.

**Пример 18.1.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx. \quad (18.1)$$

**Решение.** Проверим, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{\frac{1}{2}z^2 + O(z^4)}{z^2} = \frac{1}{2} + O(z^2).$$

Таким образом, интеграл (18.1) сходится в окрестности нуля.

Поскольку подынтегральная функция содержит  $\cos x$ , то для вычисления интеграла (18.1) нам так или иначе необходимо будет воспользоваться леммой Жордана, см. стр. 55. В свою очередь, для того чтобы воспользоваться леммой Жордана нам необходимо разбить интеграл (18.1) в сумму так, чтобы разнести экспоненты  $e^{ix}$  и  $e^{-ix}$ , содержащиеся в косинусе, по разным интегралам. Прямолинейный способ разбиения интеграла (18.1) в сумму

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x^2} dx \quad (18.2)$$

немедленно приводит к ошибке, поскольку каждый из интегралов, стоящих в правой части (18.2) содержит неинтегрируемую особенность в нуле.

Обойти данную трудность можно следующим образом. Функция  $\frac{1 - \cos z}{z^2}$  регулярна во всей комплексной плоскости, в том числе и в окрестности нуля. Протестируем контур интегрирования в окрестности нуля вниз, см. рисунок 10. При этом, в силу теоремы Коши 4.5 на стр. 19, значение интеграла (18.1) не изменится. Отсюда

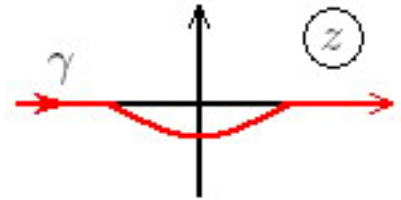


Рис. 10. Контур  $\gamma$  выделен красным цветом.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_{\gamma} \frac{1 - \cos z}{z^2} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z^2} dz = 0 - \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z^2} - 0 = \pi.$$

При вычислении интеграла  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$  мы замкнули контур интегрирования снизу (можно сверху), интеграла  $\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z^2} dz$  — снизу (нельзя сверху) и интеграла  $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$  — сверху (нельзя снизу).  $\square$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi.$

**Пример 18.2.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x^3} dx. \quad (18.3)$$

**Решение.** Проверим, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля

$$\frac{2 \sin z - \sin(2z)}{z^3} = \frac{2z + O(z^3) - 2z + O(z^3)}{z^3} = O(1).$$

Таким образом, интеграл (18.3) сходится в окрестности нуля.

Деформируя контур интегрирования в окрестности нуля вниз, см. рисунок 10, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin z - \sin(2z)}{z^3} dz &= \int_{\gamma} \frac{2 \sin z - \sin(2z)}{z^3} dz = \\ &= \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^3} dz - \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z^3} dz - \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{e^{2iz}}{z^3} dz + \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{e^{-2iz}}{z^3} dz = \\ &= 2\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z^3} - \pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2iz}}{z^3} = -\pi + 2\pi = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x^3} dx = \pi.$

**Пример 18.3.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (18.4)$$

**Решение.** Легко видеть, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля и, следовательно, интеграл (18.4) сходится в окрестности нуля.

Деформируя контур интегрирования в окрестности нуля вниз, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz &= \int_{\gamma} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{z^2} dz = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{2iz}}{z^2} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{e^{-2iz}}{z^2} dz = -\frac{\pi i}{2} \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{2iz}}{z^2} = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$

**Домашнее задание:**

**Задача 18.4.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2} dx = 2\pi.$

**Задача 18.5.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{\pi^2 - x^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{\pi^2 - x^2} dx = \pi.$

**Задача 18.6.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = \frac{\pi}{2}.$

**Задача 18.7.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) - 2x \cos x}{x^3} dx$ .

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) - 2x \cos x}{x^3} dx = 0$ .

**Задача 18.8.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{x^3} dx$ .

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{x^3} dx = -3\pi$ .

**Задача 18.9.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) + x \cos x - 3x}{x^3} dx$ .

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2x) + x \cos x - 3x}{x^3} dx = -3\pi$ .

**Задача 18.10.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} dx$ .

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} dx = \frac{2\pi}{3}$ .

**Задача 18.11.** Вычислить интеграл  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x^2)} dx$ .

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{e}$ .

**Задача 18.12.** Можно ли в примерах 18.1 – 18.3 деформировать контур интегрирования в окрестности нуля вверх?

**Ответ:** Можно.

## 19. 4-ая контрольная работа (задачи: 7, 8; 30 минут).

**Комментарии к задаче 7.** Студент должен понимать, что теорема о вычетах может быть применена только к интегралам по замкнутому контуру, куда и почему нужно замыкать контур, вычислять полученный интеграл (по замкнутому контуру). Не стоит требовать на контрольной аккуратной проверки всех условий на бесконечности. Достаточно, если будет просто указано, что функция убывает, например, как  $O(z^{-2})$  на бесконечности. Доказывать, что интеграл по полуокружности стремится к нулю не нужно (это все делается на лекции). Нужно лишь знать, что убывания на бесконечности вида  $O(z^{-2})$  достаточно, чтобы свести интеграл по оси к интегралу по замкнутому контуру. На контрольную не стоит выносить примеры, в которых возникают вычеты в полюсе выше второго порядка.

**Комментарии к задаче 8.** Студент должен понимать, что теорема о вычетах может быть применена только к интегралам по замкнутому контуру, понимать почему можно деформировать контур в окрестности устранимой особенности и нельзя в окрестности полюса, правильно замыкать контур на бесконечности (писать оценки на бесконечности не обязательно, достаточно сослаться на лемму Жордана), уметь применять формулу Тейлора для вычисления вычета в особенности вида  $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ . На контрольную можно выносить примеры, в которых возникают вычеты в полюсе третьего порядка (если особенность имеет вид  $\frac{f(z)}{z^3}$ ), и произвольные особенности в полюсе второго порядка.

### Вариант контрольной работы №4.

**Задача 7.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-2i)^4(x+i)^2} dx.$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-2i)^4(x+i)^2} dx = -\frac{8\pi}{3^5}.$

**Задача 8.** Убедиться в том, что интеграл корректно определен и вычислить его

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{5x - \sin(2x) - 3x \cos(2x)}{x^3} dx.$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{5x - \sin(2x) - 3x \cos(2x)}{x^3} dx = 8\pi.$

### Вариант контрольной работы №4.

**Задача 7.** Вычислить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2-x}{(x^2+4)(x-2i)^2} dx.$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{2-x}{(x^2+4)(x-2i)^2} dx = -\frac{\pi}{16}(1+i).$

**Задача 8.** Убедиться в том, что интеграл корректно определен и вычислить его

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2} dx.$$

**Ответ:**  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2} dx = 0.$

## 20. Интеграл в смысле главного значения.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) dx, \quad (20.1)$$

где  $R(x)$  – рациональная функция. Для того чтобы обеспечить сходимость интеграла (20.1) в окрестности бесконечности, будем предполагать, что при больших значениях  $z$  выполняется оценка  $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ . В случае, если одна из особых точек функции  $R(z)$  лежит на вещественной оси, интеграл (20.1) расходится. Тем не менее, в некоторых случаях интегралу (20.1) все же удастся придать разумный смысл. Пусть, для определенности,  $c$  – полюс первого порядка функции  $R$ , лежащий на вещественной оси, и, кроме того, функция  $R$  не имеет других особых точек на вещественной оси. Тогда существует предел

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} R(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{c-\varepsilon} R(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{+\infty} R(x) dx \right), \quad (20.2)$$

который называют интегралом в смысле главного значения.

Для вычисления интеграла (20.2) используют следующую теорему.

**Теорема 20.1.** Пусть

- $-\infty < a < c < b < +\infty$ ;
- $D$  – односвязная область;
- $[a, b] \in D$ ;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{c\})$ ;
- $c$  – полюс первого порядка функции  $f$ ;
- $\gamma_+$  – гладкий контур в  $D$ , полученный путем деформации отрезка  $[a, b]$  вверх в относительно малой окрестности точки  $c$ ;
- $\gamma_-$  – гладкий контур в  $D$ , полученный путем деформации отрезка  $[a, b]$  вниз в относительно малой окрестности точки  $c$ .

Тогда

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \int_{\gamma_+} f(z) dz + \pi i \operatorname{res}_{z=c} f(z) = \int_{\gamma_-} f(z) dz - \pi i \operatorname{res}_{z=c} f(z).$$

**Пример 20.2.** Вычислить интеграл

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x(x-i)} dx. \quad (20.3)$$

**Решение.** Легко видеть, что подынтегральная функция имеет на вещественной оси одну особую точку  $z = 0$ , которая является полюсом первого порядка. В окрестности этой точки интеграл (20.3) существует в смысле главного значения. В окрестности бесконечности интеграл (20.3) абсолютно сходится (т. е. существует в обычном смысле).

Деформируя контур интегрирования в окрестности нуля вверх, и, замыкая контур интегрирования сверху, получим

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x(x-i)} dx = \int_{\gamma_+} \frac{1}{z(z-i)} dz + \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z(z-i)} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{z(z-i)} - \pi = 2\pi - \pi = \pi. \quad \square$$

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x(x-i)} dx = \pi.$

В случае, если функция  $R$  убывает на бесконечности как  $O\left(\frac{1}{z}\right)$ , интеграл (20.1), вообще говоря, перестает сходиться. Тем не менее, интегралу (20.1) все еще можно придать разумный смысл. А именно, существует предел

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} R(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx. \quad (20.4)$$

Для вычисления интеграла (20.4) используют следующую теорему.

**Теорема 20.3.** Пусть

- $R$  – рациональная функция;
- $R$  не имеет особенностей на вещественной оси;
- $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$  при  $z \rightarrow \infty$ ;
- $r > 0$  такое, что в области  $|z| > r$  нет особых точек функции  $R$ ;
- $\gamma_+$  – положительно ориентированная граница области  $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| < r\}$ ;
- $\gamma_-$  – отрицательно ориентированная граница области  $\{z \mid \operatorname{Im} z < 0, |z| < r\}$ .

Тогда

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} R(x) dx = \int_{\gamma_+} R(z) dz + \pi i \operatorname{res}_{z=\infty} R(z) = \int_{\gamma_-} R(z) dz - \pi i \operatorname{res}_{z=\infty} R(z).$$

**Пример 20.4.** Вычислить интеграл

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x-i)^2} dx. \quad (20.5)$$

**Решение.** Подынтегральная функция не имеет особых точек на вещественной оси. В окрестности бесконечности подынтегральная функция ведет себя как  $\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$  и, следовательно, интеграл (20.5) сходится в смысле главного значения.

Замыкая контур интегрирования снизу, получим

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x-i)^2} dx = \int_{\gamma_-} \frac{z}{(z-i)^2} dz - \pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z}{(z-i)^2} = -\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = \pi i. \quad \square$$

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x-i)^2} dx = \pi i.$

**Домашнее задание:**

**Задача 20.5.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x(x^2+1)}.$

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x(x^2+1)} = 0.$

**Задача 20.6.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2-1} dx.$

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2-1} dx = 0.$

**Задача 20.7.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+2x-3} dx.$

**Задача 20.8.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x+1} dx$ .

**Задача 20.9.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2(x-i)} dx$ .

**Задача 20.10.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi x)}{x^2+x-2} dx$ .

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi x)}{x^2+x-2} dx = -\frac{2\pi}{3}$ .

**Задача 20.11.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-iax}$ , где  $a > 0$ .

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2-iax} = \frac{\pi}{a}$ .

**Задача 20.12.** Вычислить интеграл  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x-x}{x^2-2x} dx$ .

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x-x}{x^2-2x} dx = \frac{\pi}{2}(\cos 2 - 1)$ .

## 21. 5-ая контрольная работа (задача: 9; 15 минут).

**Комментарии к задаче 9.** Студент должен знать как свести интеграл в смысле главного значения к обычному интегралу, понимать, что сведение интеграла к обычному происходит не в результате деформации контура, понимать, что теорема о вычетах может быть применена только к интегралам по замкнутому контуру, видеть связь с предыдущими задачами и использовать методы их решения в данной задаче. На контрольную не стоит выносить длинные вычислительные примеры.

### Вариант контрольной работы №5.

**Задача 9.** Убедиться в том, что интеграл корректно определен и вычислить его

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x-1} dx.$$

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x-1} dx = \pi \cos 1.$

### Вариант контрольной работы №5.

**Задача 9.** Убедиться в том, что интеграл корректно определен и вычислить его

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

**Ответ:**  $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2}.$

## 22. Однозначные регулярные ветви, аналитическое продолжение, точки ветвления.

Иногда приходится иметь дело с функциями, которые в одной точке принимают несколько значений. К таковым, например, относятся функции  $\sqrt[n]{z}$  и  $\ln z$ . Эти функции принято называть многозначными. Иметь дело непосредственно с многозначной функцией зачастую бывает неудобно. В таких случаях бывает полезно выделить ее однозначную регулярную ветвь.

**Определение 22.1.** Однозначной регулярной ветвью<sup>6</sup> многозначной функции  $f(z)$  в области  $D$  называют всякую регулярную функцию  $f_0(z)$  в  $D$  такую, что в любой точки  $z \in D$  значение функции  $f_0(z)$  совпадает с одним из значений функции  $f(z)$ .

**Пример 22.2.** Выделить однозначную регулярную ветвь функции  $\sqrt{z}$ .

**Решение.** Функция  $\sqrt{z}$  в каждой точке  $z \neq 0$  принимает два различных значения. Для того чтобы выделить регулярную ветвь функции  $\sqrt{z}$ , удобно переписать ее в полярных координатах

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi n}. \quad (22.1)$$



Рис. 11. Разрез выделен красным цветом.

Пусть теперь мы фиксировали значение функции  $f(z) = \sqrt{z}$  в некоторой точке  $z_0 \neq 0$ , например,  $f(1) = 1$ . Из представления (22.1) видно, что если мы теперь будем непрерывно продолжать функцию  $\sqrt{z}$  вдоль окружности  $|z| = 1$  против часовой стрелки, то по возвращении в точку  $z = 1$  аргумент  $\varphi$  получит приращение равное  $\Delta\varphi = 2\pi$ , и, соответственно, функция  $\sqrt{z}$  получит дополнительный множитель  $e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} = e^{i\pi} = -1$ .

Рассуждая аналогично, можно понять, что при обходе вдоль любого несамопересекающегося контура, содержащего внутри себя начало координат, функция  $\sqrt{z}$  будет менять знак. Это означает, что регулярную ветвь функции  $\sqrt{z}$  можно выделить только в такой области, внутри которой нельзя провести замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат. Примером такой области может служить комплексная плоскость с исключенной полуосью  $[0, +\infty)$ , см. рисунок 11. Обозначим эту область буквой  $D$ .

Фиксируем в области  $D$  пределы изменения аргумента  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . В результате, согласно представлению (22.1), мы можем выделить две различные ветви функции  $\sqrt{z}$

$$f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Эти ветви соответствуют двум значениям параметра  $n = 0$  и  $1$ . Остальные значения параметра  $n$  приводят к одной из двух указанных ветвей функции  $\sqrt{z}$ .

**Ответ:** В области  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$  можно выделить две однозначные регулярные ветви  $f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$  и  $f_1(z) = -\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ , где  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

**Определение 22.3.** Пусть заданы функции  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  регулярные в областях  $D_0$  и  $D_1$  соответственно, где области  $D_0$  и  $D_1$  не пересекаются и имеют общий участок границы  $\gamma$ , см. рисунок 12. Пусть существует регулярная функция  $F(z)$  в области  $D_0 \cup \gamma \cup D_1$ , совпадающая с  $f_0(z)$  в  $D_0$  и с  $f_1(z)$  в  $D_1$ .

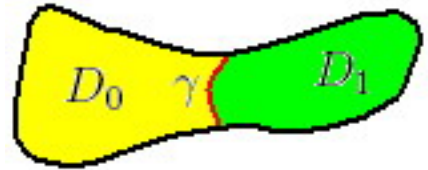


Рис. 12. Области  $D_0$  и  $D_1$  «касаются» вдоль контура  $\gamma$ .

<sup>6</sup>Иногда мы будем сокращенно говорить *регулярная ветвь*.

Тогда говорят, что функция  $f_1(z)$  является аналитическим продолжением функции  $f_0(z)$  в область  $D_1$ .

Проверка определения 22.3 может оказаться довольно трудной задачей. Следующая теорема упрощает использование этого определения.

**Теорема 22.4** (Принцип непрерывного продолжения). Пусть области  $D_0$  и  $D_1$  не пересекаются и имеют общий участок границы  $\gamma$ . Пусть функция  $f_0(z)$  регулярна в области  $D_0$  и непрерывна в  $D_0 \cup \gamma$ , а функция  $f_1(z)$  регулярна в области  $D_1$  и непрерывна в  $D_1 \cup \gamma$ . Пусть, вместе с этим, функции  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  совпадают на кривой  $\gamma$ . Тогда функция  $f_1(z)$  является аналитическим продолжением функции  $f_0(z)$  в область  $D_1$ .

**Пример 22.5.** Пусть в правой полуплоскости  $\operatorname{Re}(z) > 0$  задана регулярная ветвь функции  $f(z) = \sqrt[3]{z}$ , удовлетворяющая условию  $f(1) = 1$ . Найти аналитическое продолжение функции  $f(z)$  в левую полуплоскость  $\operatorname{Re}(z) < 0$  через полюсь  $(0, +i\infty)$  и через полюсь  $(0, -i\infty)$ . Сравнить значения полученных аналитических продолжений в точке  $z = -1$ .

**Решение.** Так же как и в примере 22.2 удобно перейти к полярным координатам

$$f(z) = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3} + i\frac{2\pi n}{3}}. \quad (22.2)$$

Фиксируем пределы изменения аргумента  $\varphi$  в правой полуплоскости  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Отсюда и из представления (22.2) получим, что

$$f(1) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3} + i\frac{2\pi n}{3}} \Big|_{z=1} = \left[ \begin{array}{l} r = 1 \\ \varphi = 0 \end{array} \right] = e^{i\frac{2\pi n}{3}}.$$

Таким образом, ветвь, удовлетворяющая условию  $f(1) = 1$ , получается при  $n = 0$ . Обозначим ее через  $f_0(z)$ .

Для того чтобы аналитически продолжить функцию  $f_0(z)$  в левую полуплоскость через полюсь  $(0, +i\infty)$ , воспользуемся представлением (22.2) при  $n = 0$

$$f_t(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \quad (\text{t – top})$$

и фиксируем пределы изменения аргумента  $\varphi$  следующим образом  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . Легко видеть, что  $f_t(z)$  – регулярная ветвь, заданная в области  $\mathbb{C} \setminus [0, -i\infty)$ . При этом функция  $f_t(z)$  совпадает с функцией  $f_0(z)$  в области  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , а потому  $f_t(z)$  – аналитическое продолжение функции  $f_0(z)$  в левую полуплоскость через полюсь  $(0, +i\infty)$  (см. определение 22.3).

Для того чтобы аналитически продолжить функцию  $f_0(z)$  в левую полуплоскость через полюсь  $(0, -i\infty)$ , воспользуемся представлением

$$f_b(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \quad (\text{b – bottom})$$

и фиксируем пределы изменения аргумента  $\varphi \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Очевидно, что  $f_b(z)$  – аналитическое продолжение функции  $f_0(z)$  в левую полуплоскость через полюсь  $(0, -i\infty)$ .

Найдем значения ветвей  $f_t(z)$  и  $f_b(z)$  в точке  $z = -1$

$$\begin{aligned} f_t(-1) &= \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \Big|_{r=1, \varphi=\pi} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \\ f_b(-1) &= \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} \Big|_{r=1, \varphi=-\pi} = e^{-i\frac{\pi}{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $f_t(-1) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $f_b(-1) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

**Определение 22.6.** *Особая точка  $z_0$  называется точкой ветвления многозначной функции  $f(z)$ , если существует такая окрестность  $0 < |z - z_0| < r$ , что  $f(z)$  может быть аналитически продолжена вдоль любой цепочки областей, принадлежащих этой окрестности, и  $z_0$  не является изолированной особой точкой хотя бы для какой-нибудь регулярной ветви функции  $f(z)$ .*

**Замечание 22.7.** *Менее строго можно сказать, что точка ветвления – это такая точка  $z_0$ , что при аналитическом продолжении вдоль окружности достаточно малого радиуса с центром в  $z_0$  после одного полного обхода функция изменяет свое значение.*

**Пример 22.8.** *Найти все точки ветвления функции  $(z - z_0)^\alpha$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ .*

**Решение.** Легко видеть, что производная

$$((z - z_0)^\alpha)' = \alpha(z - z_0)^{\alpha-1}$$

существует по крайней мере при  $z \neq z_0, \infty$ . Поэтому единственными кандидатами на точку ветвления являются точки  $z_0$  и  $\infty$ .

Для того чтобы выяснить являются ли  $z_0$  и  $\infty$  точками ветвления воспользуемся замечанием к определению 22.6. Перейдем к полярной системе координат с центром в точке  $z_0$

$$z - z_0 = r e^{i\varphi}, \quad (z - z_0)^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}.$$

При аналитическом продолжении функции  $(z - z_0)^\alpha$  вдоль окружности  $|z - z_0| = \rho > 0$ , после одного полного обхода против часовой стрелки аргумент  $\varphi$  получает приращение  $2\pi$ . В итоге, после такого обхода функция  $(z - z_0)^\alpha$  принимает в точке  $z$  новое значение

$$r^\alpha e^{i\alpha(\varphi+2\pi)} = r^\alpha e^{i\alpha\varphi} e^{2i\alpha\pi}.$$

Отсюда найдем условие, при котором функция  $(z - z_0)^\alpha$  не изменит свое значение при указанном аналитическом продолжении,

$$e^{2i\alpha\pi} = 1 \iff 2i\alpha\pi = 2\pi in, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Это условие гарантирует, что точки  $z_0$  и  $\infty$  не являются точками ветвления. Соответственно при  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  точки  $z_0$  и  $\infty$  являются точками ветвления.  $\square$

**Ответ:** При  $\alpha \in \mathbb{Z}$  точек ветвления нет, при  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  две точки ветвления:  $z_0$  и  $\infty$ .

**Пример 22.9.** *Пусть  $f(z)$  – регулярная функция в ограниченной области  $D$ . Найти все точки ветвления функции  $\sqrt{f(z)}$ .*

**Решение.** Из определения ясно, что точки ветвления – это в первую очередь особые точки. Поэтому попробуем вначале выяснить в каких точках функция  $\sqrt{f(z)}$  регулярна. Для этого вычислим ее производную (см. теорему 2.10 на стр. 10)

$$\left(\sqrt{f(z)}\right)' = \frac{f'(z)}{2\sqrt{f(z)}}. \quad (22.3)$$

Строго говоря, в выражении (22.3) необходимо указать какая ветвь корня выбрана в обеих частях равенства, однако поскольку мы сейчас ищем только лишь точки регулярности функции  $\sqrt{f(z)}$ , то этот вопрос не является принципиальным и мы позволим себе не останавливаться на нем.

Из равенства (22.3) видно, что особые точки у функции  $\sqrt{f(z)}$  могут появляться только в тех точках, в которых функция  $f(z)$  обращается в ноль. Таким образом, естественные кандидаты на точки ветвления функции  $\sqrt{f(z)}$  – это нули функции  $f(z)$ .

Пусть в точке  $z_0 \in D$  у функции  $f(z)$  ноль порядка  $n$  (см. определение 9.6 на стр. 33). Тогда ее можно переписать в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

где  $g(z)$  – регулярная функция в области  $D$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Отсюда

$$\sqrt[n]{f(z)} = (z - z_0)^{n/2} \sqrt[n]{g(z)}.$$

Из сказанного ранее ясно, что функция  $\sqrt[n]{g(z)}$  регулярна в окрестности точки  $z_0$ . При этом из примера 22.8 следует, что у функции  $(z - z_0)^{n/2}$  (а, следовательно, и у функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ ) точка  $z_0$  не является точкой ветвления если  $n$  – четное и является точкой ветвления, если  $n$  – нечетное.  $\square$

**Ответ:** Точки ветвления функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  располагаются в нулях нечетного порядка функции  $f(z)$ .

**Пример 22.10.** Выделить регулярную ветвь функции  $f(z) = \sqrt[3]{z(2-z)}$ , удовлетворяющую условию  $f(1) = 1$ . Найти значение этой ветви функции  $f(z)$  после ее аналитического продолжения вдоль верхней дуги окружности  $|z-2|=1$  в точку  $z=3$ .

**Решение.** У функции  $f(z)$  две конечные точки ветвления  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 2$ . Введем две системы полярных координат с центрами этих точек, см. рисунок 13. В этих координатах функцию

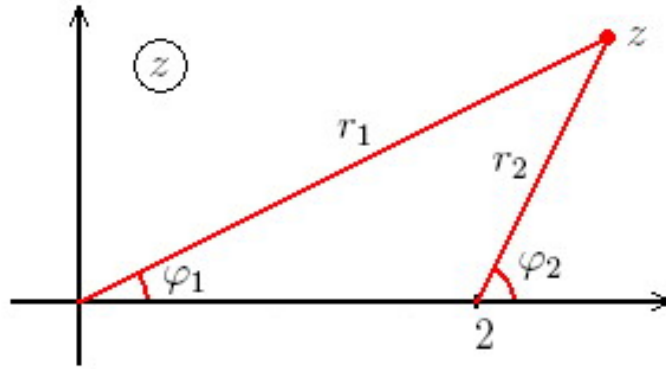


Рис. 13. Здесь  $z = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z - 2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ .

$f(z)$  можно переписать в виде

$$f(z) = \sqrt[3]{z(2-z)} = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \pi + 2\pi n}{3} i\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22.4)$$

Для того чтобы избавиться от многозначности в правой части (22.4), необходимо фиксировать параметр  $n$  и договориться о пределах изменения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (пока этого не сделано, точке  $z=1$  можно, например, приписать значения угла  $\varphi_1 = 0$  или  $\varphi_1 = \pm 2\pi$ , и каждое из этих значений приводит к различным значениям функции  $f(z)$ ).

Фиксацию пределов изменения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удобно провести следующим образом. Проведем из каждой точки ветвления разрез на бесконечность и будем считать, что точка  $z$  не может пересекать разрезов. Разрезы можно проводить в любом направлении, для определенности проведем

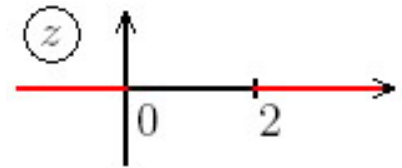


Рис. 14. Разрезы выделены красным цветом.

их как на рисунке 14. В этом случае пределы изменения углов можно фиксировать следующим образом

$$\varphi_1 \in (-\pi, \pi), \quad \varphi_2 \in (0, 2\pi). \quad (22.5)$$

Для того чтобы удовлетворить условию  $f(1) = 1$ , подберем подходящим образом параметр  $n$

$$f(1) = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \pi + 2\pi n}{3} i \right) \Big|_{z=1} = \left[ \begin{array}{l} r_1 = 1, \varphi_1 = 0 \\ r_2 = 1, \varphi_2 = \pi \end{array} \right] = \exp \left( \frac{2\pi(n+1)}{3} i \right).$$

Выбирая  $n = -1$ , добьемся выполнения условия  $f(1) = 1$ . Обозначим фиксированную таким способом ветвь через  $f_0(z)$

$$f_0(z) = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{3} i \right). \quad (22.6)$$

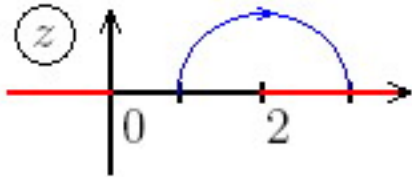


Рис. 15. Контур  $|z - 2| = 1$  выделен синим цветом.

Изобразим теперь на нашей плоскости с разрезом контур, вдоль которого нужно аналитически продолжать ветвь  $f_0(z)$ , см. рисунок 15. Важным обстоятельством является тот факт, что контур нигде не пересекает разрезов. Поэтому для ответа на вопрос задачи достаточно просто вычислить значение ветви  $f_0(z)$  в точке  $z = 3$

$$f_0(3) = \sqrt[3]{r_1 r_2} \exp \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{3} i \right) \Big|_{z=3} = \left[ \begin{array}{l} r_1 = 3, \varphi_1 = 0 \\ r_2 = 1, \varphi_2 = 0 \end{array} \right] = \sqrt[3]{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Заметим также, что  $\varphi_2 = 0$ , а не  $\varphi_2 = 2\pi$ , потому что мы подошли к правому разрезу сверху, а не снизу.  $\square$

**Ответ:** Ветвь  $f_0(z)$  фиксирована формулами (22.5) и (22.6), значение функции  $f(z)$  после требуемого аналитического продолжения равно  $\sqrt[3]{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

**Пример 22.11.** Убедиться в том, что функция  $f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}}$  допускает выделение регулярной ветви в окрестности точки  $z = \infty$ . Фиксировать ветвь условием  $f(\infty) = 1$  и найти вычет этой ветви в точке  $z = \infty$ .

**Решение.** У функции  $f(z)$  две конечные точки ветвления  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1$ . Введем две системы полярных координат с центрами в этих точках

$$z = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

В этих координатах функция  $f(z)$  может быть переписана следующим образом

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi n}{2} i \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22.7)$$

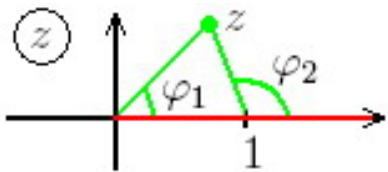


Рис. 16. Разрезы выделены красным цветом.

Для того чтобы фиксировать пределы изменения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  проведем разрезы как на рисунке 16 и фиксируем их пределы изменения следующим образом  $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ ,  $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$ .

Легко видеть, что при больших значениях  $z$  углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  становятся близки, аналогично и радиус-векторы  $r_1$  и  $r_2$  становятся близки. Отсюда и из представления (22.7) следует, что при больших  $z$  функция  $f(z)$  ведет себя следующим образом  $f(z) = e^{\pi n i} + o(1)$ . Для того чтобы удовлетворить условию  $f(\infty) = 1$ , положим  $n = 0$ . Обозначим так фиксированную ветвь через  $f_0(z)$ .

Теперь нужно убедиться в том, что ветвь  $f_0(z)$  регулярна в окрестности точки  $z = \infty$ . Для этого необходимо проверить, что значения функции  $f_0(z)$  совпадают на верхнем и нижнем берегах разреза  $(1, +\infty)$ . На верхнем берегу разреза  $(1, +\infty)$

$$f_0(z) = [\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0] = \sqrt{r_1 r_2^{-1}},$$

на нижнем

$$f_0(z) = [\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2 = 2\pi] = \sqrt{r_1 r_2^{-1}}.$$

Таким образом, согласно принципу непрерывного непрерывного продолжения (см. теорему 22.4) функция  $f_0(z)$  регулярна в окрестности точки  $z = \infty$ . В принципе это означает, что разрез  $(1, +\infty)$  можно убрать и рассматривать функцию  $f_0(z)$  на плоскости с одним разрезом  $(0, 1)$ . Однако это может привести к путанице с пределами изменения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Поэтому мы по прежнему будем рассматривать функцию  $f_0(z)$  на плоскости с разрезом  $(0, \infty)$ .

Для того чтобы найти вычет функции  $f_0(z)$  в точке  $z = \infty$ , найдем несколько первых членов ее ряда Лорана. Удобно вначале разложить в ряд многозначную функцию  $f(z)$ , см. (6.4),

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1/2} = e^{\pi i p} \left(1 + \frac{1}{2z} + O(z^{-2})\right), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из условия  $f_0(\infty) = 1$  находим, что  $p = 0$ . Отсюда

$$f_0(z) = \sqrt{\frac{z}{z-1}} = 1 + \frac{1}{2z} + O(z^{-2})$$

и

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{1}{2}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 22.12.** Можно ли выделить регулярную ветвь функции  $\sqrt[4]{z}$  в области  $1 < |z| < 3$ .

**Ответ:** Нельзя.

**Задача 22.13.** Выделить регулярную ветвь функции  $f(z) = \sqrt[4]{1-z^2}$ , удовлетворяющую условию  $f(0) = 1$ . Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения вдоль нижней дуги окружности  $|z+1| = 1$  в точку  $z = -2$ .

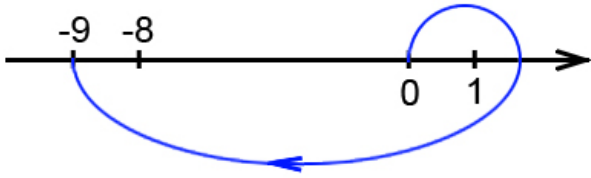
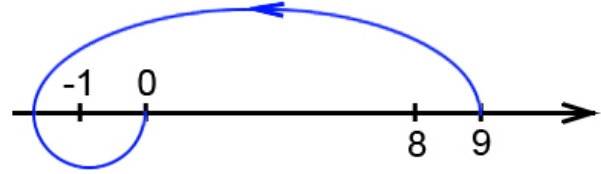
**Ответ:**  $\sqrt[4]{3} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

**Задача 22.14.** Выделить регулярную ветвь функции  $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+8)^2}{1-z}}$ , удовлетворяющую условию  $f(0) = 4$ . Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку  $z = -9$  вдоль контура, изображенного на рисунке 17.

**Ответ:**  $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ .

**Задача 22.15.** Выделить регулярную ветвь функции  $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+1)^2}{8-z}}$ , удовлетворяющую условию  $f(9) = -\sqrt[3]{100}$ . Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку  $z = 0$  вдоль контура, изображенного на рисунке 18.

**Ответ:**  $\frac{1}{2}$ .

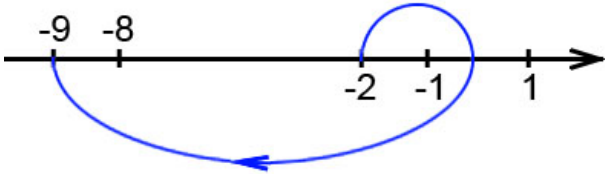
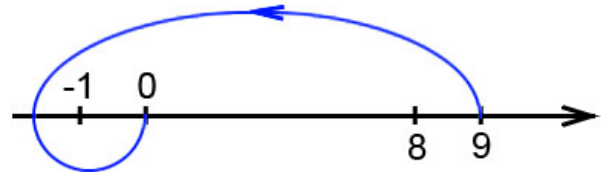
Рис. 17. Контур  $\gamma$  выделен синим цветом.Рис. 18. Контур  $\gamma$  выделен синим цветом.

**Задача 22.16.** Выделить регулярную ветвь функции  $f(z) = \sqrt[3]{\frac{1-z^2}{8+z}}$ , удовлетворяющую условию  $f(-2) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ . Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку  $z = -9$  вдоль контура, изображенного на рисунке 19.

**Ответ:**  $2\sqrt[3]{10}$ .

**Задача 22.17.** Выделить регулярную ветвь функции  $f(z) = \sqrt{3+z^2}$ , удовлетворяющую условию  $f(1) = 2$ . Найти значение этой ветви после ее аналитического продолжения в точку  $z = -2i$  вдоль контура, изображенного на рисунке 20.

**Ответ:**  $-i$ .

Рис. 19. Контур  $\gamma$  выделен синим цветом.Рис. 20. Контур  $\gamma$  выделен синим цветом.

**Задача 22.18.** Убедиться в том, что функция  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$  допускает выделение регулярной ветви в окрестности точки  $z = \infty$ . Фиксировать ветвь условием  $f_0(2i) = i\sqrt{3}$  в области  $|z| > 1$  и найти вычет этой ветви в точке  $z = \infty$ .

**Ответ:**  $\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{1}{2}$ .

**Задача 22.19.** Пусть функция  $f(z)$  задана при  $\operatorname{Re}(z) > 0$  равенством  $f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-iz)(x+i)}$ .

Доказать, не вычисляя интеграла, что  $f(z)$  допускает аналитическое продолжение в  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ . Сравните результат аналитического продолжения  $f(z)$  и значение интеграла при  $\operatorname{Re}(z) < 0$ .

**Ответ:**  $f(z) = \frac{2\pi}{z+1}$ , при  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ;  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-iz)(x+i)} = 0$  при  $\operatorname{Re}(z) < 0$ .

## 23. Римановы поверхности простейших многозначных функций: $\sqrt[n]{z-a}$ , $\ln z$ (при наличии времени).

Рассмотрим произвольную многозначную функцию  $f(z)$  с конечным числом точек ветвления в  $\mathbb{C}$ . Допустим нам удалось выделить ее всевозможные регулярные ветви, которые, вообще говоря, могут быть заданы на различных областях определения. Договоримся считать, что каждой ветви  $f_n(z)$  сопоставлен свой экземпляр комплексной плоскости с разрезами  $D_n$ .

Допустим теперь, что ветвь  $f_n(z)$  может быть аналитически продолжена через какой-нибудь берег  $\gamma$  одного из разрезов на  $D_n$ . В этом случае, найдется другая ветвь  $f_k(z)$ , которая будет аналитическим продолжением ветви  $f_n(z)$  через  $\gamma$ . Тот факт, что  $f_k(z)$  является аналитическим продолжением  $f_n(z)$  удобно изображать склейкой соответствующих берегов разрезов на листах  $D_k$  и  $D_n$ .

**Определение 23.1** (Формальное определение). Римановой поверхностью *многозначной функции*  $f(z)$  называют набор листов  $D_n$ , на каждом из которых задана своя регулярная ветвь  $f_n(z)$  функции  $f(z)$ , и описание способа склейки всех берегов разрезов на листах  $D_n$  между собой.

**Пример 23.2.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt{z}$ .

**Решение.** У функции  $\sqrt{z}$  одна конечная точка ветвления  $z_1 = 0$ . Переходя к полярным координатам, перепишем функцию  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Для того, чтобы выделить однозначные ветви проводим разрез из точки ветвления  $z_1 = 0$  на бесконечность вдоль полуоси  $[0, +\infty)$ . Соответственно с этим, пределы изменения угла  $\varphi$  фиксируем следующим образом

$$\varphi \in (0, 2\pi).$$

Параметрам  $n = 0$  и  $n = 1$  соответствуют две регулярные ветви  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  функции  $f(z)$  (остальные значения параметра  $n$  приводят к одной из указанных ветвей).

Считаем, что ветвь  $f_0(z)$  задана на листе  $D_0$ , а ветвь  $f_1(z)$  на  $D_1$ . Вычислим значения функций  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  на берегах разрезов листов  $D_0$  и  $D_1$ , см. рисунки 21 и 22. Теперь нужно

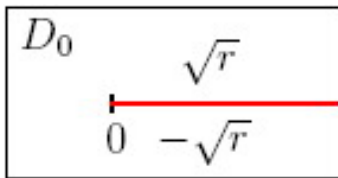


Рис. 21. Значения функции  $f_0(z)$  на берегах разрезов листа  $D_0$ .

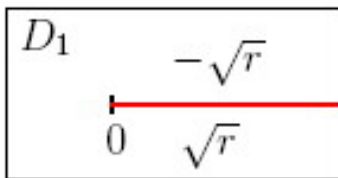


Рис. 22. Значения функции  $f_1(z)$  на берегах разрезов листа  $D_1$ .

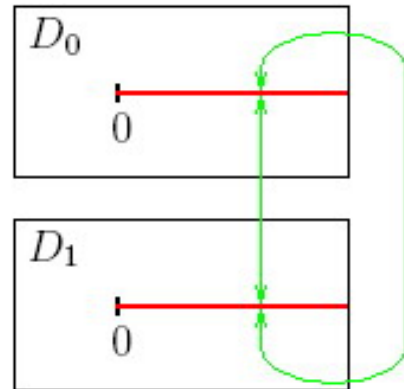


Рис. 23. Риманова поверхность функции  $\sqrt{z}$ .

подходящим образом склеить листы  $D_0$  и  $D_1$ . Сравнивая значения функций  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  на различных берегах разрезов листов  $D_0$  и  $D_1$  и учитывая принцип непрерывного продолжения (см. теорему 22.4), найдем требуемую склейку, см. рисунок 23.  $\square$

**Ответ:** Риманова поверхность функции  $\sqrt{z}$  изображена на рисунке 23. При этом на листе  $D_0$  справедливо представление  $f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ , а на листе  $D_1 - f_1(z) = -\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ . где  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

**Пример 23.3.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \ln z$ . Предполагая, что  $f(e) = 1 - 2\pi i$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 1$  после ее аналитического продолжения вдоль контура  $\gamma$ , изображенного на рисунке 27.

**Решение.** У функции  $\ln z$  одна конечная точка ветвления  $z_1 = 0$ . Переходя к полярным координатам, перепишем функцию  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi + 2i\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z = re^{i\varphi}. \quad (23.1)$$

Для того, чтобы выделить однозначные ветви проводим разрез из точки ветвления  $z_1 = 0$  на бесконечность, например, вдоль полуоси  $(-\infty, 0]$ . Соответственно с этим, пределы изменения угла  $\varphi$  фиксируем следующим образом

$$\varphi \in (-\pi, \pi). \quad (23.2)$$

Различным параметрам  $n \in \mathbb{Z}$  соответствуют различные регулярные ветви  $f_n(z)$  функции  $f(z)$ , которые задаются равенством (23.1).

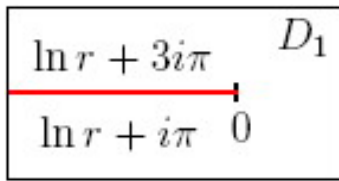


Рис. 24. Значения функции  $f_1(z)$  на берегах разрезов листа  $D_1$ .

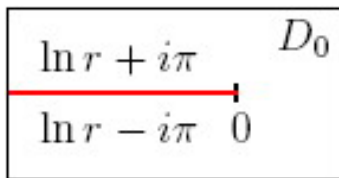


Рис. 25. Значения функции  $f_0(z)$  на берегах разрезов листа  $D_0$ .

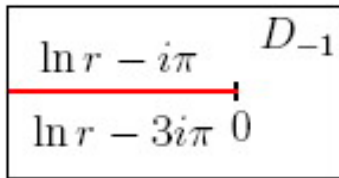


Рис. 26. Значения функции  $f_{-1}(z)$  на берегах разрезов листа  $D_{-1}$ .

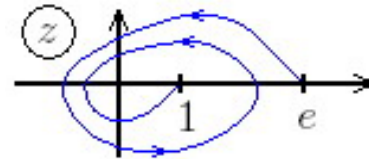


Рис. 27. Контур  $\gamma$  изображен синим цветом.

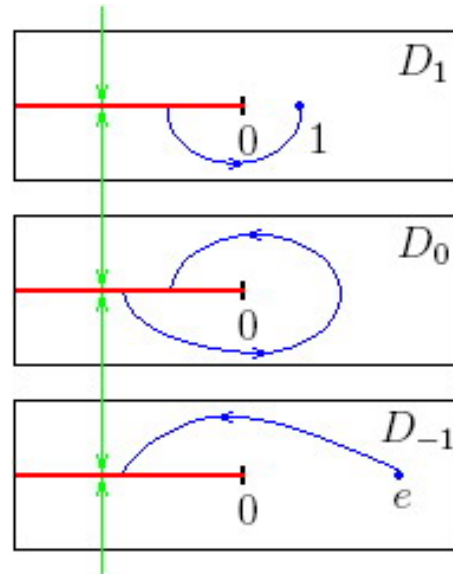


Рис. 28. Риманова поверхность функции  $\ln z$ . Синим цветом изображен контур  $\gamma$ .

Считаем, что каждая ветвь  $f_n(z)$  задана на своем листе  $D_n$ . Вычислим значения функций  $f_n(z)$  на берегах разрезов листов  $D_n$  для нескольких  $n$ , см. рисунки 24 – 26. Теперь нужно

подходящим образом склеить листы  $D_n$ . Сравнивая значения функций  $f_n(z)$  на различных берегах разрезов листов  $D_n$  найдем требуемую склейку. На рисунке 28 изображена склейка листов  $D_{-1}$ ,  $D_0$  и  $D_1$ . Остальные листы подклеиваются аналогично.

Легко видеть, что условию  $f(e) = 1 - 2\pi i$  удовлетворяет ветвь  $f_{-1}(z)$ . Поэтому контур  $\gamma$  должен начинаться на листе  $D_{-1}$ . Изобразим теперь контур  $\gamma$  на римановой поверхности, см. рисунок 28. Отсюда находим значение функции  $f_{-1}(z)$  в точке  $z = 1$  после ее аналитического продолжения вдоль контура  $\gamma$

$$f_{-1}(z)|_{\gamma} = f_1(1) = [r = 1, \varphi = 0, n = 1] = 2\pi i. \quad \square$$

**Ответ:** Риманова поверхность  $\ln z$  состоит из бесконечного набора листов  $D_n$ , несколько из них изображено на рисунке 28. На каждом листе  $D_n$  фиксирована ветвь  $f_n(z)$  равенством (23.1). Пределы изменения угла  $\varphi$  фиксированы равенством (23.2). Результат аналитического продолжения:  $f_{-1}(z)|_{\gamma} = 2\pi i$ .

#### Домашнее задание:

**Задача 23.4.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$ . Предполагая, что  $f(2) = 1$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 0$  после ее аналитического продолжения вдоль ломаной линии  $\gamma$  последовательно соединяющей точки:  $2, -2i, -2, 2i, 3, -i, 1+i$  и  $0$ .

**Ответ:** Результат аналитического продолжения:  $f(z)|_{\gamma} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

## 24. Римановы поверхности многозначных функций вида: $\sqrt[n]{(z-a)(z-b)}, \dots$ (при наличии времени).

Рассмотрим процедуру построения римановой поверхности функции вида  $\sqrt[n]{R(z)}$ , где  $R(z)$  – рациональная функция, на следующем примере.

**Пример 24.1.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt{(z-1)(2+z)}$ .

**Решение.** У функции  $\sqrt{(z-1)(2+z)}$  две точки ветвления  $z_1 = 1$  и  $z_2 = -2$ . Введем две

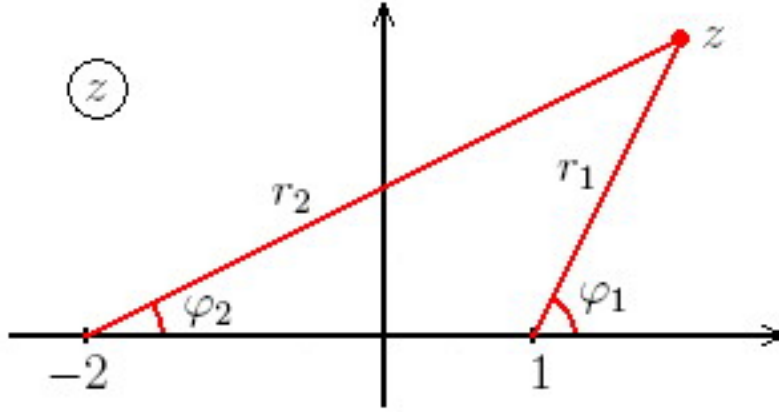


Рис. 29. Здесь  $z-1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z+2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ .

системы полярных координат с центрами в этих точках, см. рисунок 29. В этих координатах

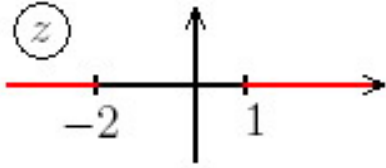


Рис. 30. Разрезы выделены красным цветом.

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi n}{2} i\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (24.1)$$

Для того чтобы избавиться от неоднозначности в правой части (24.1), необходимо договориться в каких пределах меняются углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Выберем их следующим образом

$$\varphi_1 \in (0, 2\pi), \quad \varphi_2 \in (-\pi, \pi).$$

Этот выбор соответствует тому, что мы рассматриваем функцию  $f(z)$  на комплексной плоскости с двумя разрезами  $(-\infty, -2)$  и  $(1, \infty)$ , см. рисунок 30. На этой плоскости с разрезами можно фиксировать две различные ветви  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  функции  $f(z)$ , выбирая  $n = 0$  и  $n = 1$  (остальные значения параметра  $n$  приводят к одной из указанных ветвей).

Введем теперь в рассмотрение два экземпляра описанной плоскости с разрезами и обозначим их через  $D_0$  и  $D_1$ . Ради удобства, на рисунке 31 указаны значения углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  на берегах разрезов листов  $D_0$  и  $D_1$ . Будем считать, что функция  $f_0(z)$  задана на  $D_0$ , а функция  $f_1(z)$  на  $D_1$ . Несложно вычислить значения функций  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  на берегах соответствующих разрезов, см. рисунки 32 и 33.

$\varphi_1 = \pi$	$\varphi_1 = 0$
$\varphi_2 = \pi$	$\varphi_2 = 0$
$\varphi_1 = \pi$	$\varphi_1 = 2\pi$
$\varphi_2 = -\pi$	$\varphi_2 = 0$

Рис. 31. Значения углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  на берегах разрезов.

Теперь нужно подходящим образом склеить листы  $D_0$  и  $D_1$ . Сравнивая значения функций  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  на различных берегах разрезов листов  $D_0$  и  $D_1$  и учитывая принцип непрерывного продолжения (см. теорему 22.4), найдем требуемую склейку, см. рисунок 34.  $\square$

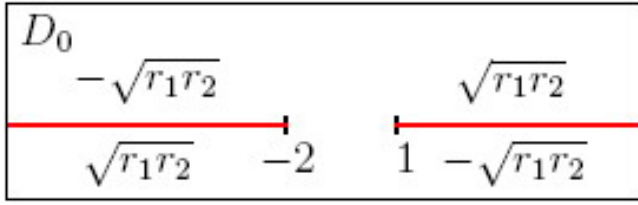


Рис. 32. Значения функции  $f_0(z)$  на берегах разрезов листа  $D_0$ .

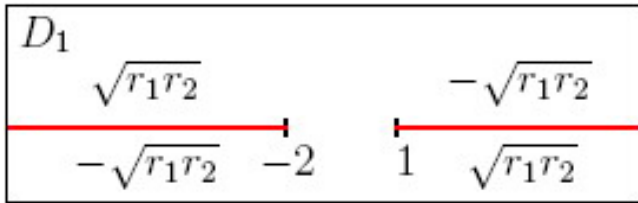


Рис. 33. Значения функции  $f_1(z)$  на берегах разрезов листа  $D_1$ .

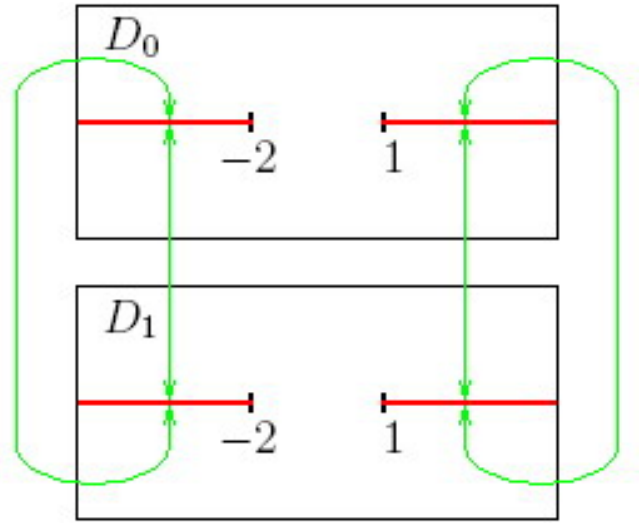


Рис. 34. Риманова поверхность многозначной функции  $\sqrt{(z-1)(2+z)}$ .

**Ответ:** Риманова поверхность функции  $\sqrt{(z-1)(2+z)}$  изображена на рисунке 34. При этом на листе  $D_0$  справедливо представление  $\sqrt{(z-1)(2+z)} = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} i\right)$ , а на листе  $D_1$   $-\sqrt{(z-1)(2+z)} = -\sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} i\right)$ , где  $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$  и  $\varphi_2 \in (-\pi, \pi)$ .

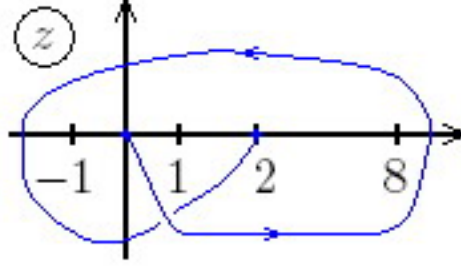
Приведем для удобства план построения римановой поверхности функции вида  $\sqrt[n]{R(z)}$ , где  $R(z)$  – рациональная функция.

- (1) Находим все конечные точки ветвления  $\{z_k\}_{k=1}^p$  функции  $\sqrt[n]{R(z)}$ . Таковыми являются все нули и полюса функции  $R(z)$ .
- (2) Вводим полярные системы координат с центрами в точках ветвления  $z - z_k = r_k e^{i\varphi_k}$  и переписываем через них функцию  $\sqrt[n]{R(z)}$ .
- (3) Фиксируем один лист римановой поверхности. Для этого проводим из каждой точки ветвления разрез на бесконечность и определяем пределы изменения углов  $\varphi_k$ .
- (4) Фиксируем  $n$  ветвей функции  $\sqrt[n]{R(z)}$  и приписываем каждой ветви свой лист римановой поверхности.
- (5) Вычисляем на берегах разрезов каждого листа граничные значения функции  $\sqrt[n]{R(z)}$ .
- (6) Склеиваем листы между собой, используя принцип непрерывного продолжения (см. теорему 22.4).
  - В ответ выписываем схему склейки листов между собой и способ фиксации ветвей функции  $\sqrt[n]{R(z)}$  на каждом из листов римановой поверхности.

**Пример 24.2.** Описать риманову поверхность функции

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}.$$

Предполагая, что  $f(0) = 2$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 2$  после ее аналитического продолжения вдоль контура  $\gamma$ , изображенного на рисунке 35.

Рис. 35. Контур  $\gamma$  выделен синим цветом.

**Решение.** Решение проводим в несколько шагов.

*Шаг 1.* У функции  $f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}$  три конечные точки ветвления  $z_1 = 8$ ,  $z_2 = 1$  и  $z_3 = -1$ .

*Шаг 2.* Вводим три полярные системы координат с центрами в точках ветвления

$$z - 8 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad z + 1 = r_3 e^{i\varphi_3}.$$

В этих координатах функцию  $f(z)$  можно переписать в виде

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}} = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}} \exp\left(\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 + \pi + 2\pi n}{3} i\right). \quad (24.2)$$

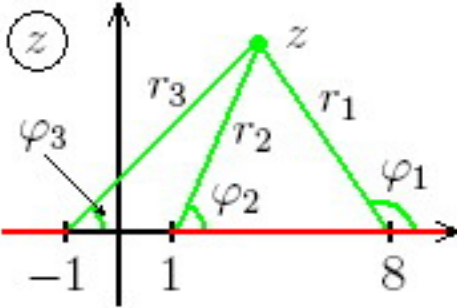
*Шаг 3.* Фиксируем лист римановой поверхности. Для этого проведем разрезы из точек ветвления на бесконечность как на рисунке 36 и фиксируем пределы изменения углов

$$\varphi_1 \in (0, 2\pi), \quad \varphi_2 \in (0, 2\pi), \quad \varphi_3 \in (-\pi, \pi).$$

*Шаг 4.* Значениям  $n = 0, 1$  и  $2$  соответствуют различные ветви функции  $f(z)$ , заданные выражением (24.2). Обозначим эти ветви через  $f_0(z)$ ,  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  соответственно. Ветви, отвечающие остальным значениям параметра  $n$ , совпадают с одной из указанных ветвей ( $e^{2\pi i p} = 1$  при  $p \in \mathbb{Z}$ ).

Рис. 36. Разрезы выделены красным цветом.

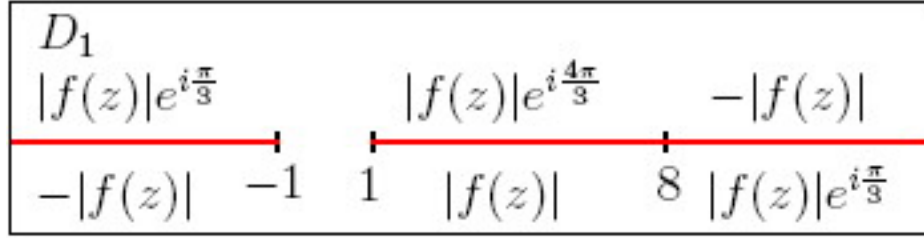
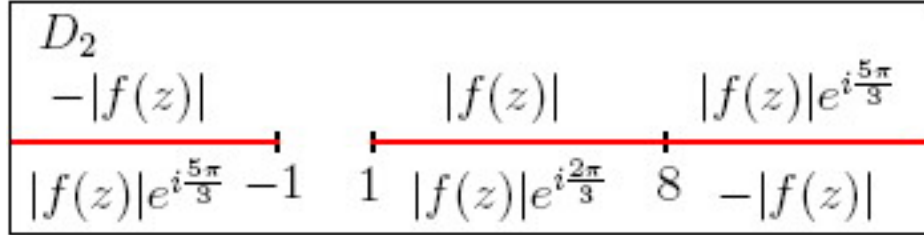
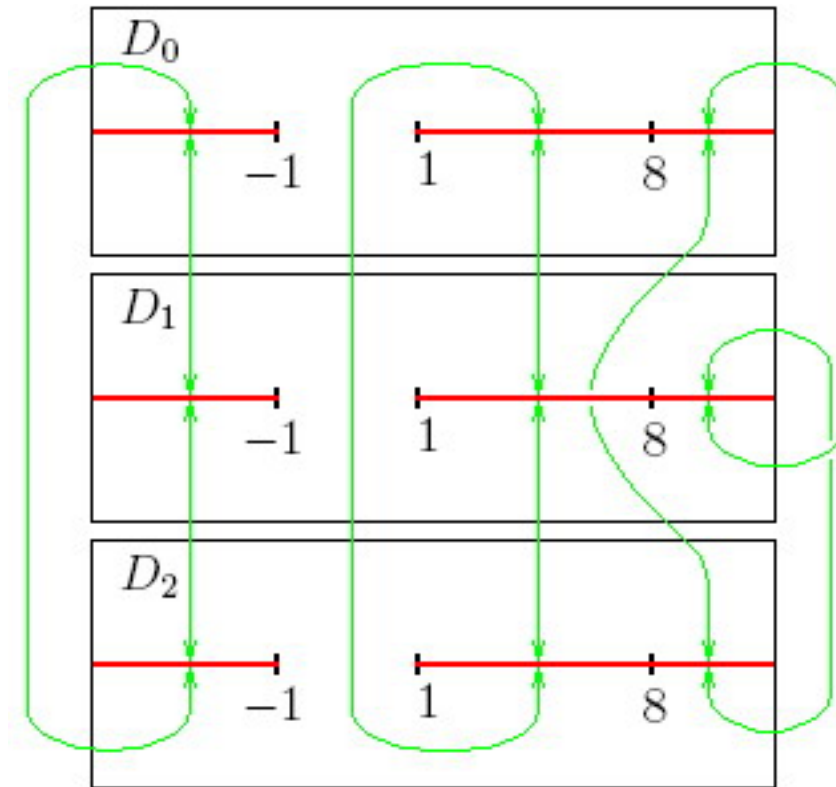
*Шаг 5.* Находим значения ветвей  $f_0(z)$ ,  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  на берегах соответствующих разрезов. При этом считаем, что функции  $f_0(z)$ ,  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  заданы на листах  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. Результаты вычислений приведены на рисунках 37, 38 и 39. Здесь, ради сокращения записи, мы учли, что  $|f(z)| = |f_n(z)| = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}}$ , где  $n = 0, 1, 2$ .



$D_0$					
$ f(z) e^{-i\frac{\pi}{3}}$		$ f(z) e^{i\frac{2\pi}{3}}$		$ f(z) e^{i\frac{\pi}{3}}$	
$ f(z) e^{i\frac{\pi}{3}}$	-1	1	$ f(z) e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	8	$ f(z) e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Рис. 37. Значения функции  $f_0(z)$  на берегах разрезов листа  $D_0$ .

*Шаг 6.* Склеиваем листы римановой поверхности между собой, используя принцип непрерывного продолжения (теорема 22.4), см. рисунок 40. Здесь мы учли, что  $e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$  и  $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ .

Рис. 38. Значения функции  $f_1(z)$  на берегах разрывов листа  $D_1$ .Рис. 39. Значения функции  $f_2(z)$  на берегах разрывов листа  $D_2$ .Рис. 40. Риманова поверхность функции  $\sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}$ .

*Шаг 7.* Выясним какому листу римановой поверхности отвечает значение  $f(0) = 2$ . Из формулы (24.2) следует, что

$$f_n(0) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}} \exp\left(\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 + \pi + 2\pi n}{3} i\right) = \left[ \begin{array}{l} r_1 = 8, \ r_2 = 1, \ r_3 = 1 \\ \varphi_1 = \pi, \ \varphi_2 = \pi, \ \varphi_3 = 0 \end{array} \right] = 2e^{i\frac{2\pi n}{3}}.$$

Таким образом, равенство  $f(0) = 2$  возможно только при  $n = 0$ . Это означает, что точка  $z = 0$  располагается на листе  $D_0$ .

Для того чтобы найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 2$  после ее аналитического продолжения вдоль контура  $\gamma$ , изобразим контур  $\gamma$  на построенной римановой поверхности, см. рисунок 41. Таким образом, после аналитического продолжения вдоль контура  $\gamma$  мы оказы-

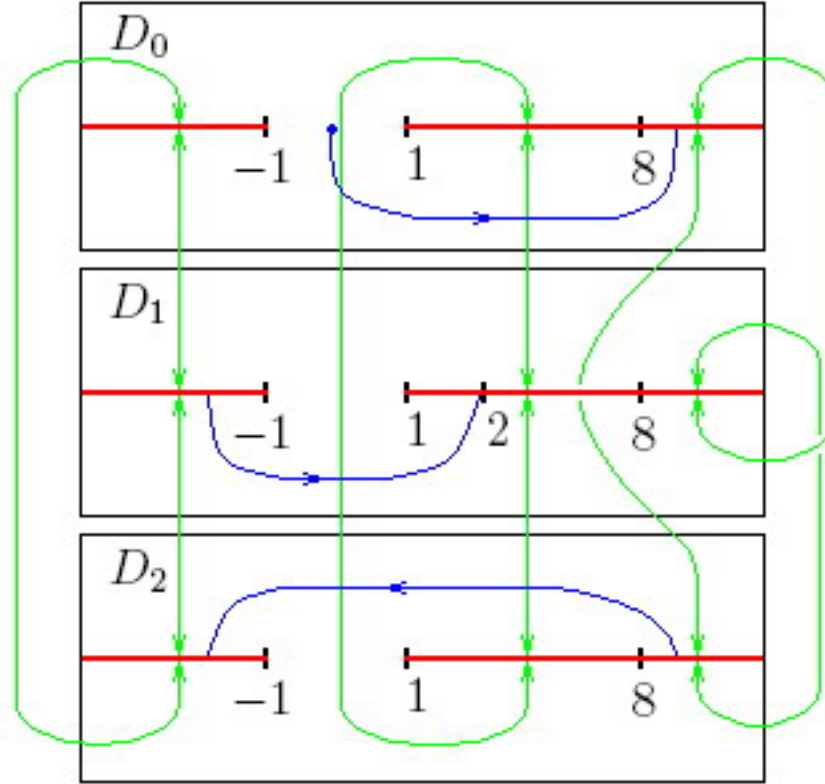


Рис. 41. Контур  $\gamma$  выделен синим цветом.

ваемся на листе  $D_1$  римановой поверхности. Находим значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 2$ , лежащей на листе  $D_1$ , см. (24.2),

$$f_1(z)|_{z=2} = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2^2 r_3}} \exp\left(\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 - \varphi_3 + \pi + 2\pi n}{3} i\right) = \left[ \begin{array}{c} n = 1 \\ r_1 = 6, \ r_2 = 1, \ r_3 = 3 \\ \varphi_1 = \pi, \ \varphi_2 = 2\pi, \ \varphi_3 = 0 \end{array} \right] = \sqrt[3]{2}. \quad \square$$

**Ответ:** Риманова поверхность функции  $f(z) = \sqrt[3]{\frac{8-z}{(1+z)(1-z)^2}}$  изображена на рисунке 40. При этом на листе  $D_n$  справедливо представление (24.2), где  $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ ,  $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$ ,  $\varphi_3 \in (-\pi, \pi)$ . Результат аналитического продолжения  $f(z)|_\gamma = \sqrt[3]{2}$ .

**Пример 24.3.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ . Предполагая, что  $f(4) = \sqrt{3}$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = 4$  после ее аналитического продолжения вдоль окружности  $\gamma = \{z : |z| = 4\}$  против часовой стрелки.

**Решение.** Точки ветвления функции  $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$  располагаются в нулях подкоренных выражений. Таких точек две  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1$ . Для того чтобы выделить однозначные ветви функции  $f(z)$ , будем ее рассматривать на комплексной плоскости  $\mathbb{C}_z$  с разрезами вдоль лучей

$(-\infty, 0]$  и  $[1, +\infty)$ . Функцию  $f(z)$  удобно представить в виде композиции отображений  $f(z) = h(g(z))$ , где

$$\zeta = g(z) = \sqrt{z} : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_\zeta \quad \text{и} \quad w = h(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta} : \mathbb{C}_\zeta \rightarrow \mathbb{C}_w.$$

Ясно, что функция  $f(z)$  допускает выделения четырех различных ветвей. Поэтому удобно запастись четырьмя листами комплексной плоскости с разрезами и с каждым из них связать свою ветвь  $f(z)$ . Обозначим эти листы через  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  и  $D_4$ .

Для фиксации ветви функции  $g(z)$  удобно перейти к полярным координатам  $z = re^{i\varphi}$ . Отсюда

$$\zeta = g_n(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp\left(i\frac{\varphi}{2} + i\pi n\right), \quad n = 0, 1.$$

Мы будем считать, что  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ . Это соответствует разрезу  $(-\infty, 0]$  на  $\mathbb{C}_z$ .

Рассмотрим случай  $n = 0$ . Будем считать, что функция  $g_0(z)$  задана на листе  $D_1$  ( $D_2$ ). Обозначим образ области  $D_1$  ( $D_2$ ) при отображении  $g_0(z)$  через  $G_1$  ( $G_2$ ). Для фиксации ветвей функции  $h(\zeta)$ , заданных на  $G_1$  ( $G_2$ ), удобно перейти к полярным координатам вида  $\zeta = -1 + \rho e^{i\psi}$ . Отсюда

$$w = h_k^0(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta} = \sqrt{\rho} \exp\left(i\frac{\psi}{2} + i\pi k\right), \quad k = 0, 1.$$

Мы будем считать, что  $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Это соответствует тому, что область  $G_1$  ( $G_2$ ) располагается правее точки  $\zeta = -1$ .

Таким образом, мы фиксировали две ветви функции  $f(z)$ . Первая ветвь  $f_1(z) = h_0^0(g_0(z))$  задается композицией отображений (см. рисунок 42)

$$\zeta = g_0(z) : D_1 \rightarrow G_1, \quad w = h_0^0(\zeta) : G_1 \rightarrow E_1.$$

Вторая ветвь  $f_2(z) = h_0^1(g_0(z))$  задается композицией отображений (см. рисунок 43)

$$\zeta = g_0(z) : D_2 \rightarrow G_2, \quad w = h_0^1(\zeta) : G_2 \rightarrow E_2.$$

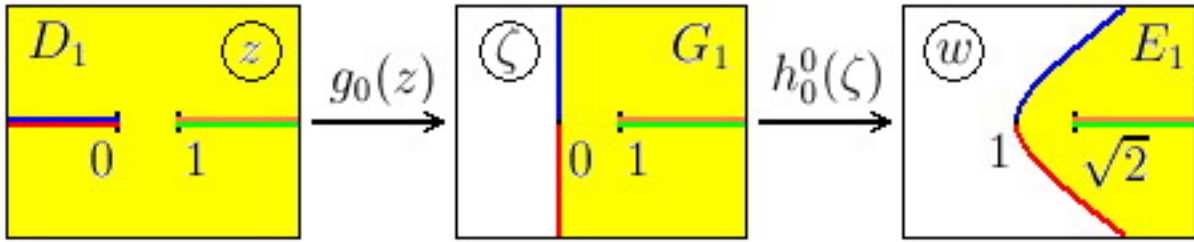


Рис. 42. Отображение  $f_1(z) = h_0^0(g_0(z))$ .

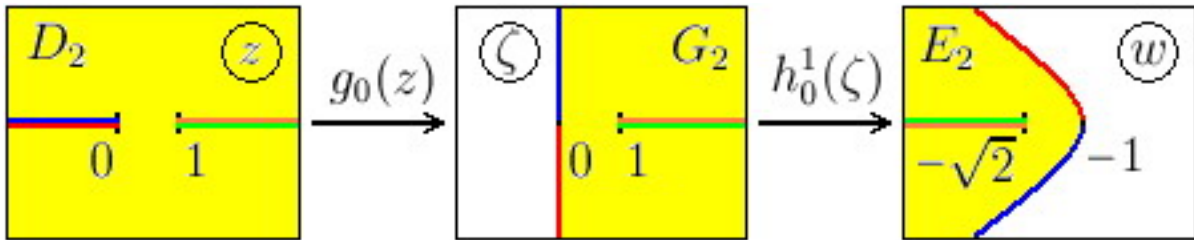


Рис. 43. Отображение  $f_2(z) = h_0^1(g_0(z))$ .

Фиксируем еще две ветви функции  $f(z)$  отвечающие  $n = 1$ . Будем считать, что функция  $g_1(z)$  задана на листе  $D_3$  ( $D_4$ ). Обозначим образ области  $D_3$  ( $D_4$ ) при отображении  $g_1(z)$  через  $G_3$  ( $G_4$ ).

Для фиксации ветвей функции  $h(\zeta)$ , заданных на  $G_3$  ( $G_4$ ), переходим к полярным координатам  $\zeta = -1 + \rho e^{i\psi}$ . Отсюда

$$w = h_1^k(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta} = \sqrt{\rho} \exp\left(i\frac{\psi}{2} + i\pi k\right), \quad k = 0, 1.$$

Мы будем считать, что  $\psi \in (-\pi, \pi)$ . Это соответствует тому, что область  $G_3$  ( $G_4$ ) содержит разрез вдоль луча  $(-\infty, 1]$ .

Итак, мы фиксировали оставшиеся две ветви функции  $f(z)$ . Третья ветвь  $f_3(z) = h_1^0(g_1(z))$  задается композицией отображений (см. рисунок 44)

$$\zeta = g_1(z) : D_3 \rightarrow G_3, \quad w = h_1^0(\zeta) : G_3 \rightarrow E_3.$$

Четвертая ветвь  $f_4(z) = h_1^1(g_1(z))$  задается композицией отображений (см. рисунок 45)

$$\zeta = g_1(z) : D_4 \rightarrow G_4, \quad w = h_1^1(\zeta) : G_4 \rightarrow E_4.$$

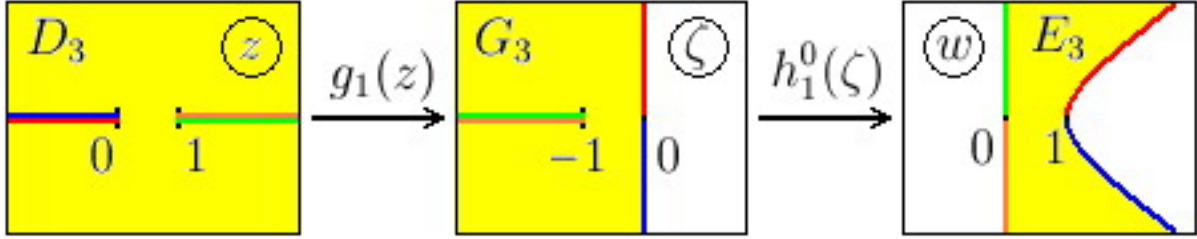


Рис. 44. Отображение  $f_3(z) = h_1^0(g_1(z))$ .

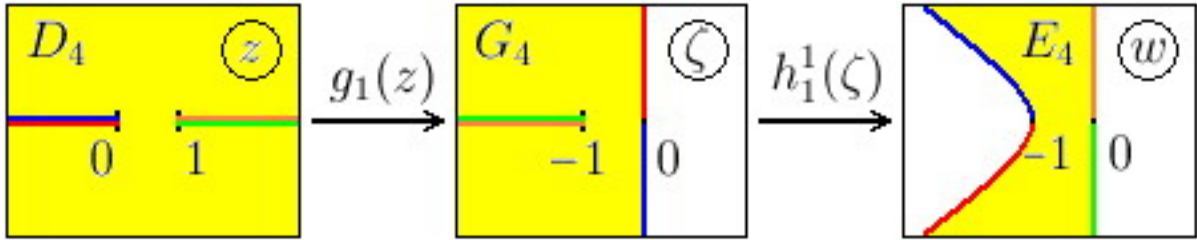


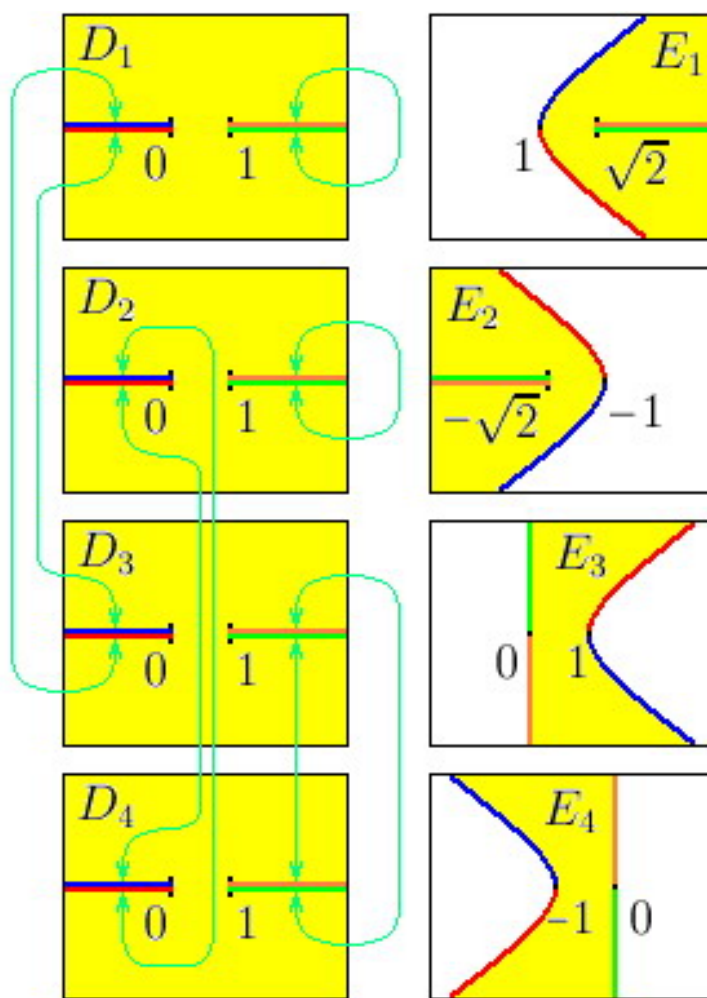
Рис. 45. Отображение  $f_4(z) = h_1^1(g_1(z))$ .

Склейку листов  $D_1 - D_4$  в риманову поверхность  $R$  необходимо провести так, чтобы в результате получилась непрерывная, а следовательно регулярная, функция  $f(z)$  на  $R$ . Сравнивая значения (см. области  $E_1 - E_4$ ) различных ветвей функции  $f(z)$  на соответствующих берегах разрезов, легко выполнить требуемую склейку, см. рисунок 46.

Заметим, что на листах  $D_1$  и  $D_2$  разрезы  $[1, +\infty)$  фактически отсутствуют. Это соответствует тому, что точка ветвления  $z = 1$  функции  $f(z)$  возникает как нуль функции  $1 + g(z)$ , который лежит на листах  $D_3, D_4$  и отсутствует на листах  $D_1$  и  $D_2$ .

Легко видеть, что точка  $z_0 = 4$ , удовлетворяющая условию  $f(z_0) = \sqrt{3}$ , располагается на листе  $D_1$  римановой поверхности функции  $f(z)$ . Аналитическое продолжение вдоль окружности  $\gamma$  приводит в точку  $z_1 = 4$ , находящуюся на нижнем берегу разреза  $[1, +\infty)$  листа  $D_3$ . Отсюда следует, что  $f(z_1) = i$ .

**Ответ:** Риманова поверхность функции  $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$  изображена на рисунке 46. Ветви функции  $f(z)$  на листах  $D_1 - D_4$  фиксированы как показано на рисунках 42 – 45. Результат аналитического продолжения  $f(z)|_\gamma = i$ .

Рис. 46. Риманова поверхность функции  $w = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ .**Домашнее задание:**

**Задача 24.4.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt[3]{1 - z^2}$ . Предполагая, что  $f(3) = -2$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = -3$  после ее аналитического продолжения вдоль верхней дуги окружности  $|z| = 3$ .

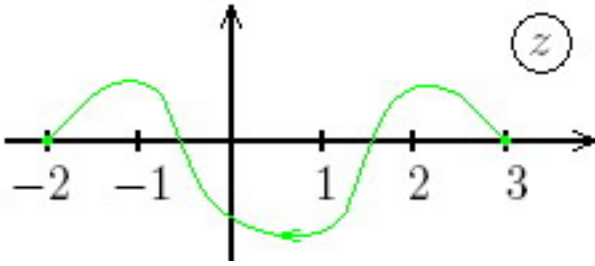
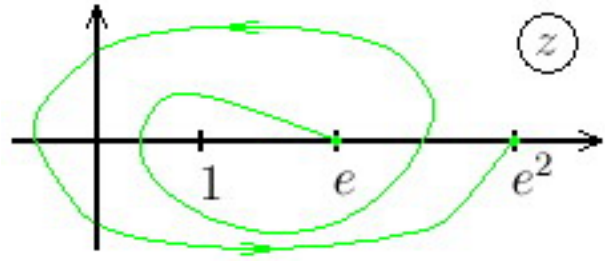
**Ответ:**  $f(z)|_{\gamma} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

**Задача 24.5.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-2)}{z-1}}$ . Предполагая, что  $f(3) = \sqrt[3]{2}$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = -2$  после ее аналитического продолжения вдоль контура  $\gamma$ , изображенного на рисунке 47.

**Ответ:**  $f(z)|_{\gamma} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

**Задача 24.6.** Описать риманову поверхность функции  $f(z) = \sqrt{\ln z}$ . Предполагая, что  $f(e) = 1$  найти значение функции  $f(z)$  в точке  $z = e^2$  после ее аналитического продолжения вдоль контура, изображенного на рисунке 48.

**Ответ:**  $f(z)|_{\gamma} = -2 + 2\pi i$ .

Рис. 47. Контур  $\gamma$  выделен зеленым цветом.Рис. 48. Контур  $\gamma$  выделен зеленым цветом.

## 25. Вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси (степенные и логарифмические особенности).

Для того чтобы вычислить интеграл по оси, полуоси или отрезку от какой-либо функции по вычетам, нам необходимо ответить на несколько вопросов. Во-первых, необходимо договориться о том, какую функцию мы будем интегрировать. В частности, если речь идет о многозначной функции, то нужно фиксировать ее регулярную ветвь. Во-вторых, нужно выбрать *замкнутый* контур интегрирования, чтобы впоследствии можно было воспользоваться теоремой о вычетах. В-третьих, необходимо связать интеграл по замкнутому контуру с исходным интегралом.

С подобной процедурой мы уже сталкивались, например, при вычислении интегралов от рациональных функций по оси. Здесь мы рассмотрим более сложные примеры, а именно, вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси. Мы позволим себе рассматривать только такие примеры, в которых в качестве функции, интеграл от которой мы будем впоследствии считать по вычетам, можно выбрать ту же самую функцию, что и в исходном интеграле (т. е. в том, который нужно вычислить). При этом мы разберем несколько различных вариантов выбора контура интегрирования.

Рассмотрим интеграл вида

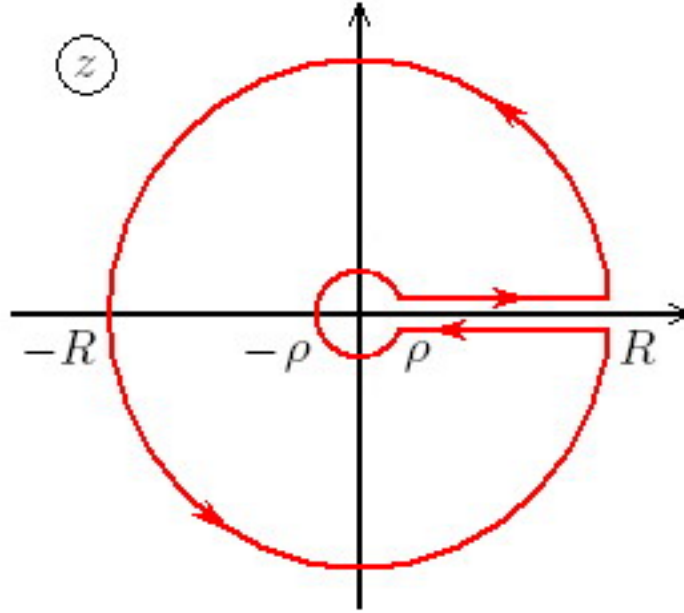
$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad (25.1)$$

где  $R(x)$  – рациональная функция, особые точки которой располагаются вне полуоси  $[0, +\infty)$ . Будем предполагать, что интеграл (25.1) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (25.1) проводится в четыре шага.

- (1) Выделяем регулярную ветвь  $f_0(z)$  *многозначной* функции  $f(z) = z^{\alpha} R(z)$  в комплексной плоскости с разрезом вдоль контура интегрирования  $[0, +\infty)$ . Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на верхнем берегу разреза  $[0, +\infty)$  она совпадала с подынтегральной функцией  $x^{\alpha} R(x)$ . Тогда на нижнем берегу ветвь  $f_0(z)$  будет совпадать с функцией  $e^{2\pi i \alpha} x^{\alpha} R(x)$ .
- (2) Вычисляем по вычетам интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n^{\text{res}} f_0(z), \quad (25.2)$$

где  $z_n$  – все полюса рациональной функции  $R(z)$  и контур интегрирования  $\gamma$  изображен на рисунке 49.

Рис. 49. Контур интегрирования  $\gamma$  выделен красным цветом.

- (3) Переходим к пределу при  $\rho \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow +\infty$ . При этом из сходимости интеграла (25.1) следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{|z|=\rho} f_0(z) dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} f_0(z) dz = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_0(z) dz = \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz + \int_{+\infty}^0 f_0(z - i0) dz. \quad (25.3)$$

- (4) Сравнивая (25.3) и (25.2), получим

$$\int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz - \int_0^{+\infty} f_0(z - i0) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx - e^{2\pi i \alpha} \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx &= 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z), \\ \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z). \end{aligned}$$

- Если исходный интеграл (25.1) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

**Пример 25.1.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$

**Решение.** Вычисления проводим в четыре шага.

*Шаг 1.* Фиксируем ветвь многозначной функции  $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r}}{z^2+1} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

*Шаг 2.* У функции  $f_0(z)$  два полюса первого порядка  $z_1 = i$  и  $z_2 = -i$  внутри контура  $\gamma$ , изображенного на рисунке 49. Используя теорему о вычетах, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f_0(z) dz &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=i} f_0(z) + \operatorname{res}_{z=-i} f_0(z) \right) = 2\pi i \left( \frac{\sqrt{r}}{2z} e^{i\frac{\varphi}{2}} \Big|_{z=i} + \frac{\sqrt{r}}{2z} e^{i\frac{\varphi}{2}} \Big|_{z=-i} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{2i} e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{-2i} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Обращаем внимание на то, что при вычисления вычета в точке  $z_2 = -i$  мы положили  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ , а не  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , поскольку для ветви  $f_0(z)$  должно выполняться условие  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

*Шаг 3.* Переходим к пределу при  $\rho \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow +\infty$ . При этом

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \oint_{|z|=\rho} f_0(z) dz \right| &\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho \max_{|z|=\rho} \left| \frac{\sqrt{\rho}}{1+z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{3/2} = 0, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \oint_{|z|=R} f_0(z) dz \right| &\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{\sqrt{R}}{1+z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1/2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_0(z) dz = \int_0^{+\infty} f_0(z+i0) dz - \int_0^{+\infty} f_0(z-i0) dz. \quad (25.5)$$

Замечаем теперь, что на верхнем берегу разреза  $\varphi = 0$ , а на нижнем  $\varphi = 2\pi$ , поэтому

$$\begin{aligned} f_0(z+i0) &= \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \quad \text{при } z = x \in [0, +\infty), \\ f_0(z-i0) &= \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} e^{i\pi} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \quad \text{при } z = x \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

Отсюда и из (25.5) найдем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_0(z) dz = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx. \quad (25.6)$$

*Шаг 4.* Сравнивая (25.4) и (25.6) получим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx, \quad (25.7)$$

где  $R(x)$  – *четная* рациональная функция

$$R(-x) = R(x),$$

особые точки которой располагаются вне полуоси  $[0, +\infty)$ . Будем предполагать, что интеграл (25.7) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (25.7) проводится в пять шагов.

- (1) Выделяем регулярную ветвь  $f_0(z)$  *многозначной* функции  $f(z) = R(z) \ln z$  в полуплоскости  $\text{Im}(z) > 0$ . Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на полуоси  $[0, +\infty)$  она совпадала с подынтегральной функцией  $R(x) \ln x$ . Тогда на левой полуоси  $(-\infty, 0]$  ветвь  $f_0(z)$  будет совпадать с функцией  $R(|x|)(\ln |x| + \pi i)$ .
- (2) Вычисляем по вычетам интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) \, dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_n \\ \text{Im}(z_n) > 0}} \text{res } f_0(z), \quad (25.8)$$

где  $z_n$  – все полюса рациональной функции  $R(z)$  и контур интегрирования  $\gamma$  изображен на рисунке 50.

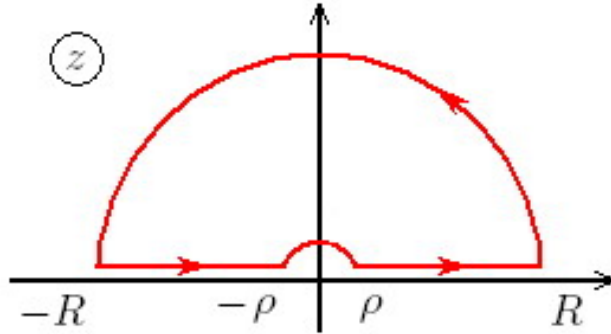


Рис. 50. Контур интегрирования  $\gamma$  выделен красным цветом.

- (3) Переходим к пределу при  $\rho \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow +\infty$ . При этом из сходимости интеграла (25.7) следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\{|z|=\rho\} \cap \{\text{Im}(z) > 0\}} f_0(z) \, dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{|z|=R\} \cap \{\text{Im}(z) > 0\}} f_0(z) \, dz = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_0(z) \, dz = \int_{-\infty}^0 f_0(z + i0) \, dz + \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) \, dz. \quad (25.9)$$

- (4) Сравнивая (25.9) и (25.8), получим

$$\int_{-\infty}^0 f_0(z + i0) \, dz + \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) \, dz = 2\pi i \sum_n \text{res } f_0(z).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^0 R(x)(\ln|x| + \pi i) dx + \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_n) > 0} \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z)$$

Сделаем замену переменных  $x \rightarrow -x$  в первом интеграле. Учитывая четность функции  $R(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} R(x)(\ln|x| + \pi i) dx + \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_n) > 0} \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z), \\ \int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx &= \pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_n) > 0} \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) - \frac{\pi i}{4} \int_{\mathbb{R}} R(x) dx. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Здесь мы учли, что

$$2 \int_0^{+\infty} R(x) dx = \int_{\mathbb{R}} R(x) dx.$$

(5) Вычисляем интеграл  $\int_{\mathbb{R}} R(x) dx$ , например, методом, изложенным на стр. 51, и подставляем результат в (25.10).

◦ Если исходный интеграл (25.7) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

**Пример 25.2.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx. \quad (25.11)$$

**Решение.** Вычисления проводим в пять шагов.

*Шаг 1.* Фиксируем ветвь многозначной функции  $f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + 1}$

$$f_0(z) = \frac{\ln r + i\varphi}{z^2 + 4}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где  $\varphi \in (0, \pi)$ .

*Шаг 2.* У функции  $f_0(z)$  один полюс первого порядка  $z_1 = 2i$  внутри контура  $\gamma$ , изображенного на рисунке 50. Используя теорему о вычетах, вычислим интеграл

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} f_0(z) = 2\pi i \left. \frac{\ln r + i\varphi}{2z} \right|_{z=2i} = \left[ r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \left( \ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right). \quad (25.12)$$

*Шаг 3.* Переходим к пределу при  $\rho \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow +\infty$ . При этом

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\{|z|=\rho\} \cap \{\operatorname{Im}(z) > 0\}} f_0(z) dz \right| &\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \pi \rho \max_{|z|=\rho} \left| \frac{|\ln \rho| + \pi}{1 + z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho |\ln \rho| = 0, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\{|z|=R\} \cap \{\operatorname{Im}(z) > 0\}} f_0(z) dz \right| &\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{\ln R}{1 + z^2} \right| \leq 4\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln R}{R} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_0(z) dz &= \int_{-\infty}^0 f_0(z + i0) dz + \int_0^{+\infty} f_0(z + i0) dz = \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{\ln|x| + i\pi}{x^2 + 4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + 4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx + \pi i \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx.
 \end{aligned} \tag{25.13}$$

Шаг 4. Сравнивая (25.12) и (25.13) найдем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \left( \ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{\pi i}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \left( \ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{\pi i}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 4} dx. \tag{25.14}$$

Шаг 5. Вычислим интеграл в правой части равенства (25.14), см. пример 16.1,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 4} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{\pi}{2}. \tag{25.15}$$

Подставляя (25.14) в (25.15), найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4} \left( \ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right) - \frac{\pi i}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln 2}{4}. \quad \square$$

**Замечание 25.3.** В данном примере можно было избежать выполнения пятого шага. Для этого достаточно было взять вещественную часть от обеих частей равенства (25.14).

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi \ln 2}{4}.$

**Домашнее задание:**

**Задача 25.4.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)}.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

**Задача 25.5.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x-8i)}.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x-8i)} = \frac{\pi(3+i\sqrt{3})}{6}.$

**Задача 25.6.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+16i)}.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+16i)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\pi}{8}}.$

**Задача 25.7.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)(x+4)}.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)(x+4)} = \frac{\pi}{6}.$

**Задача 25.8.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)(x+8)} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)(x+8)} dx = \frac{2\pi}{7\sqrt{3}}.$

**Задача 25.9.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2+1} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2+1} dx = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{3}} \pi \sqrt[6]{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}.$

**Задача 25.10.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\pi \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}.$

**Задача 25.11.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

**Задача 25.12.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)(x-2i)} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)(x-2i)} dx = \frac{\pi(1+i)}{16}.$

**Задача 25.13.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$

**Задача 25.14.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)\sqrt{x}} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)\sqrt{x}} dx = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}.$

**Задача 25.15.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{(x^2+4)} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+4} dx = \pi \ln 3.$

## 26. Вычисление интегралов от многозначных функций по отрезку (степенные особенности) (при наличии времени).

Вычисление интегралов от многозначных функций по отрезку (и по полуоси тоже) по вычетам возможно только в том случае, если единственными точками ветвления подынтегральной функции являются концы контура интегрирования.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b (x-a)^\alpha (x-b)^\beta R(x) dx, \quad (26.1)$$

где  $-\infty < a, b < +\infty$ ,  $R(x)$  – рациональная функция, особые точки которой располагаются вне отрезка  $[a, b]$ . Мы будем предполагать, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$  подобраны так, что у подынтегральной функции нет точки ветвления на бесконечности и интеграл (26.1) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (26.1) проводится в три шага.

- (1) Выделяем регулярную ветвь  $f_0(z)$  *многозначной* функции  $f(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta R(z)$  в комплексной плоскости с разрезом вдоль контура интегрирования  $[a, b]$ . Это возможно благодаря тому, что на бесконечности нет точки ветвления. Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на верхнем берегу разреза  $[a, b]$  ветвь  $f_0(z)$  совпадала с подынтегральной функцией  $(x-a)^\alpha (x-b)^\beta R(x)$ . Тогда на нижнем берегу ветвь  $f_0(z)$  будет совпадать с функцией  $e^{2\pi i(\alpha+\beta)} (x-a)^\alpha (x-b)^\beta R(x)$ .
- (2) Контур интегрирования  $\gamma$  выбираем как на рисунке 51. При этом радиус  $R$  считаем настолько большим, что все конечные особенности функции  $R(z)$  располагаются внутри окружности  $|z| = R$ . Вычисляем по вычетам интеграл

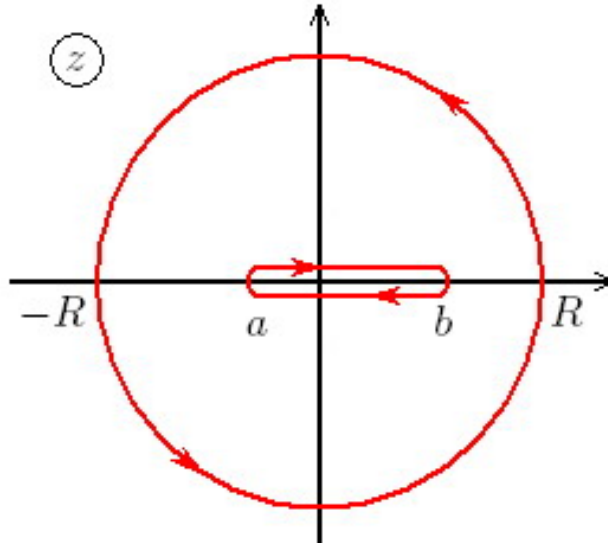


Рис. 51. Контур интегрирования  $\gamma$  выделен красным цветом.

$$\oint_{\gamma} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z), \quad (26.2)$$

где  $z_n$  – все полюса рациональной функции  $R(z)$ .

Перепишем теперь интеграл в левой части (26.2) в виде суммы интегралов по внутреннему контуру, обозначим его через  $\gamma_{ab}$ , и по окружности  $|z| = R$ . В результате получим

$$\oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) - \oint_{|z|=R} f_0(z) dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z). \quad (26.3)$$

- (3) Вообще говоря, правильно было бы в окрестности точек  $a$  и  $b$  контур  $\gamma$  выполнить в виде маленьких окружностей  $|z - a| = \rho$ , как на рисунке 49, стр 85, в окрестности нуля, и затем переходить к пределу при  $\rho \rightarrow 0$ . Однако мы уже могли убедиться на примере вычисления интегралов вида (25.1), что в случае интегрируемой особенности в точке этого можно не делать.

Таким образом, к пределу переходить не нужно, а достаточно просто преобразовать интеграл по контуру  $\gamma_{ab}$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz &= \int_a^b f_0(z + i0) dz + \int_b^a f_0(z - i0) dz = \\ &= \int_a^b (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx + e^{2\pi i(\alpha - \beta)} \int_b^a (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx = \\ &= (1 - e^{2\pi i(\alpha - \beta)}) \int_a^b (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx. \end{aligned} \quad (26.4)$$

Сравнивая представления (26.3) и (26.4), найдем

$$\int_a^b (x - a)^\alpha (x - b)^\beta R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha - \beta)}} \left( \sum_n \operatorname{res}_{z=z_n} f_0(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) \right).$$

- Если исходный интеграл (26.1) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

**Пример 26.1.** Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx.$$

**Решение.** Вычисления проводим в три шага.

*Шаг 1.* Фиксируем ветвь многозначной функции  $f(z) = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z+2}$ . Для этого вводим в рассмотрение две системы полярных координат с центрами в точках ветвления  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1$  и фиксируем с их помощью ветвь функции  $f(z)$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{z+2} \exp \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{2} i \right), \quad z = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

где  $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$  и  $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$ .

Подобная фиксация пределов изменения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответствует разрезу  $[0, +\infty)$  на комплексной плоскости. При этом легко видеть, что на верхнем ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ) и нижнем ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$ ) берегах разреза  $[1, +\infty)$  значения ветви  $f_0(z)$  совпадают и, следовательно, точка  $z = \infty$  не является точкой ветвления.

Сразу вычислим значение ветви  $f_0(z)$  на верхнем берегу разреза  $[0, 1]$

$$f_0(x + i0) = [\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi] = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2}, \quad x \in [0, 1]$$

и на нижнем

$$f_0(x - i0) = [\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2 = \pi] = -\frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2}, \quad x \in [0, 1].$$

*Шаг 2.* Вычисляя интеграл по контуру  $\gamma$ , см. рисунок 51, от функции  $f_0(z)$  получим, см. (26.3),

$$\oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-2} f_0(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z). \quad (26.5)$$

Найдем вычет в точке  $z = -2$ , которая является полюсом первого порядка,

$$\operatorname{res}_{z=-2} f_0(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{2} i\right) \Big|_{z=-2} = \left[ \begin{array}{l} r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \\ \varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = \pi \end{array} \right] = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{6}. \quad (26.6)$$

Для того чтобы найти вычет на бесконечности, разложим функцию  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = \infty$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z+2} = \pm i \frac{\sqrt{1-\frac{1}{z}}}{1+\frac{2}{z}} = \pm i \left(1 - \frac{1}{2z} + O(z^{-2})\right) \left(1 - \frac{2}{z} + O(z^{-2})\right) = \\ &= \pm i \left(1 - \frac{5}{2z} + O(z^{-2})\right) \end{aligned} \quad (26.7)$$

Чтобы понять какой знак отвечает ветви  $f_0(z)$  выясним как ведет себя  $f(z)$  при  $z \rightarrow +\infty$ . В этом случае можно положить  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и  $z \sim r_1 \sim r_2$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{z+2} \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \pi}{2} i\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}} + O(z^{-1}) = -i + O(z^{-1}). \quad (26.8)$$

Сравнивая асимптотики (26.8) и (26.7), найдем

$$f_0(z) = -i \left(1 - \frac{5}{2z} + O(z^{-2})\right) = -i + \frac{5i}{2z} + O(z^{-2}).$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f_0(z) = -\frac{5i}{2}. \quad (26.9)$$

Подставляя (26.6) и (26.9) в (26.5), получим

$$\oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz = 2\pi i \left(i\sqrt{6} - \frac{5i}{2}\right) = \pi(5 - 2\sqrt{6}). \quad (26.10)$$

*Шаг 3.* Преобразуем интеграл по контуру  $\gamma_{ab}$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{ab}} f_0(z) dz &= \int_0^1 f_0(x + i0) dx + \int_1^0 f_0(x - i0) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx - \int_1^0 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx. \end{aligned} \quad (26.11)$$

Сравнивая (26.9) и (26.11), найдем значение исходного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx = \frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{2}. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+2} dx = \frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{2}.$

**Домашнее задание:**

**Задача 26.2.** Вычислить интеграл  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$

**Ответ:**  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \pi.$

**Задача 26.3.** Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-x} dx.$

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{2-x} dx = (2 - \sqrt{3})\pi.$

**Задача 26.4.** Вычислить интеграл  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2-x}} dx.$

**Ответ:**  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2-x}} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}.$

**Задача 26.5.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}} dx = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}}.$

**Задача 26.6.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}.$

**Задача 26.7.** Вычислить интеграл  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

**Ответ:**  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi.$

**Задача 26.8.** Вычислить интеграл<sup>7</sup>  $\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{dx}{x+2}.$

---

<sup>7</sup>Рассмотрите интеграл от функции  $\ln^2\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \frac{1}{z+2}$  по контуру, изображенному на рисунке 51.

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2} \ln^2 3.$

**Задача 26.9.** *Вычислить интеграл*  $\int_0^{2\pi} \ln(5 + 4 \cos \varphi) d\varphi.$

**Ответ:**  $\int_0^{2\pi} \ln(5 + 4 \cos \varphi) d\varphi = 4\pi \ln 2.$

## 27. 6-ая контрольная работа (задачи: 10, 11; 45 минут).

**Комментарии к задаче 10.** Студент должен уметь вводить полярные координаты, связанные с точками ветвления, выражать через них многозначную функцию, проводить разрезы так, чтобы контур, вдоль которого необходимо искать аналитическое продолжение, не пересекал разрезы, понимать разницу между верхним и нижним берегами разреза.

**Комментарии к задаче 11.** Студент должен понимать, что для применения теоремы о вычетах нужна однозначная регулярная функция и замкнутый контур, уметь правильно выбирать регулярную функцию и замкнутый контур, уметь вычислять вычет в полюсе первого порядка (регулярной ветви многозначной функции), в частности, правильно выбирать аргумент в точках нижней полуплоскости при вычислении вычета (например, в точке  $-i$ ). На контрольную выносятся только интегралы по полуоси со степенными особенностями и полюсами не выше первого порядка.

### Вариант контрольной работы №6.

**Задача 10.** Выделить однозначную регулярную ветвь функции

$$f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(8+z)},$$

удовлетворяющую условию  $f(0) = 2$ . Найти значение функции в точке  $z = 2$  после ее аналитического продолжения вдоль окружности  $|z - 1| = 1$  (направление обхода против часовой стрелки).

**Ответ:**  $\sqrt[3]{10} e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

**Задача 11.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt[3]{x}}.$$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$

### Вариант контрольной работы №6.

**Задача 10.** Выделить однозначную регулярную ветвь функции

$$f(z) = \ln \frac{2-z}{2+z},$$

удовлетворяющую условию  $f(0) = 0$ . Найти значение функции в точке  $z = 4$  после ее аналитического продолжения вдоль окружности  $|z - 2| = 2$  (направление обхода против часовой стрелки).

**Ответ:** ???.

**Задача 11.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+4i)\sqrt{x}}.$$

**Ответ:**  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+4i)\sqrt{x}} = ???.$

## 28. Свойства конформных отображений. Теорема Римана.

В дальнейшем нам понадобится понятие *расширенной комплексной плоскости*  $\bar{\mathbb{C}}$ . Мы позволим себе дать нестрогое определение этого понятия.

**Определение 28.1** (Формальное определение). Расширенной комплексной плоскостью  $\bar{\mathbb{C}}$  называют комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой  $\infty$ .

Для того чтобы рассматривать регулярные функции на расширенной комплексной плоскости, необходимо определить понятие регулярности в окрестности бесконечности.

**Определение 28.2.**

- Пусть  $f(\infty) = w_0 \neq \infty$ . Тогда говорят, что функция  $f(z)$  регулярна в окрестности точки  $z = \infty$ , если функция  $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  регулярна в окрестности точки  $\zeta = 0$ .
- Пусть  $f(z_0 \neq \infty) = \infty$ . Тогда говорят, что функция  $f(z)$  регулярна в окрестности точки  $z = z_0$ , если функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  регулярна в окрестности точки  $z = z_0$ .
- Пусть  $f(\infty) = \infty$ . Тогда говорят, что функция  $f(z)$  регулярна в окрестности точки  $z = \infty$ , если функция  $g(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$  регулярна в окрестности точки  $\zeta = 0$ .

**Определение 28.3.** Пусть  $D$  и  $D^*$  – области в расширенной комплексной плоскости. Взаимно однозначное отображение  $w = f(z)$  области  $D$  на область  $D^*$  называется конформным, если  $f(z)$  – регулярная функция в  $D$ .

**Теорема 28.4.** Пусть  $f(z)$  – конформное отображение области  $D$  на  $D^*$  и  $f^{-1}(z)$  – обратное отображение к  $f(z)$ . Тогда

- (1)  $f^{-1}(z)$  – конформное отображение области  $D^*$  на  $D$ .
- (2) Пусть  $z \in D$ ,  $z \neq \infty$  и  $f(z) \neq \infty$ , тогда  $f'(z) \neq 0$ .
- (3) Пусть  $z \in D$  и  $z = \infty$  или  $f(z) = \infty$ , тогда  $g'(z) \neq 0$ , где  $g(z)$  – функция из определения 28.2.
- (4) Отображение  $f(z)$  сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения, если эта точка пересечения лежит внутри области  $D$  (т. е. не на границе).
- (5) Отображение  $f(z)$  переводит бесконечно малые окружности в окружности с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Остановимся более подробно на свойствах (4) и (5) теоремы 28.4. Допустим, ради упрощения обозначений, что конформное отображение  $f(z)$  переводит точку  $z = 0$  в  $w = 0$ , и исследуем это отображение в окрестности точки  $z = 0$ . Для этого разложим функцию  $f(z)$  в ряд Тейлора в малой окрестности точки  $z = 0$

$$w = f(z) = f'(0)z + O(z^2). \quad (28.1)$$

Для качественного описания свойств отображения (28.1) при достаточно малых  $z$  можно пренебречь поправкой  $O(z^2)$ . В результате получим линейное отображение

$$w = f(z) = f'(0)z. \quad (28.2)$$

Переходя к полярным координатам  $z = re^{i\varphi}$ , перепишем выражение (28.2) в виде

$$w = f(z) = |f'(0)|re^{i(\varphi + \arg f'(0))}. \quad (28.3)$$

Легко видеть, что отображение (28.3) сводится к равномерному растяжению во всех направлениях с коэффициентом растяжения  $|f'(0)|$  и повороту на угол  $\arg f'(0)$ . Очевидно, что при

повороте и равномерном растяжении углы между прямыми сохраняются и окружности переходят в окружности. Поскольку исходное отображение  $f(z)$  лишь при малых  $z$  хорошо описывается линейным отображением (28.2), то и свойства (4) и (5) выполняются только в малой окрестности точки  $z = 0$ .

**Пример 28.5.** *Отображение  $w = f(z) = z^2$  является конформным отображением области  $D = \{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$  на область  $\{|w| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} w > 0\}$ . При этом угол между прямыми  $\operatorname{Im} z = 0$  и  $\operatorname{Re} z = 0$  в точке их пересечения, равный  $\frac{\pi}{2}$ , переходит после отображения в угол, равный  $\pi$ . Не противоречит ли это пункту 4 теоремы 28.4.*

**Решение.** Не противоречит, потому что точка  $z = 0$  пересечения прямых  $\operatorname{Im} z = 0$  и  $\operatorname{Re} z = 0$  принадлежит границе области  $D$ .  $\square$

**Ответ:** Нет не противоречит.

**Теорема 28.6** (Теорема Римана). *Пусть заданы две односвязные области  $D$  и  $D^*$  с границами, состоящими более чем из одной точки. Пусть заданы две точки  $z_0 \in D$ ,  $w_0 \in D^*$  и действительное число  $\alpha_0$ . Тогда существует единственное конформное отображение  $w = f(z)$  области  $D$  на область  $D^*$  такое, что*

$$w_0 = f(z_0) \quad \text{и} \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0.$$

**Пример 28.7.** *Найти конформное отображение круга  $|z| < 1$  на себя такое, что  $f(0) = 0$  и  $\arg f'(0) = \pi$ .*

**Решение.** Легко видеть, что примером конформного отображения круга  $|z| < 1$  на себя, оставляющего начало координат на месте, может служить поворот  $w = f(z) = e^{i\alpha}z$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Отсюда  $\arg f'(0) = \alpha = \pi$ . Из теоремы Римана следует, что такое отображение единственно.  $\square$

**Ответ:**  $w = f(z) = -z$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 28.8.** *Найти конформное отображение круга  $|z| < 1$  на круг  $|w - 2| < 2$  такое, что  $\arg f'(0) = \frac{\pi}{2}$ .*

**Ответ:** Например,  $w = f(z) = 2iz + 2$ . Такое отображение не единственно.

## 29. Отображения: $z^n$ , $\sqrt[n]{z}$ , $e^z$ , $\ln z$ .

**Пример 29.1.** Определить типы областей, которые функция  $w = z^n$ , где  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , отображает как конформное отображение.

**Решение.** Сразу заметим, что производная функции  $w = z^n$  обращается в ноль в точке  $z = 0$  и поэтому она не является взаимно однозначным отображением в окрестности точки  $z = 0$ , см. теорему 28.4 пункт 2. Поэтому область  $D$ , на которой функция  $w = z^n$  действует как конформное отображение, не может содержать точки  $z = 0$ .

В окрестности точки  $z = \infty$  функция  $f(z) = z^n$  также не является взаимно однозначной, см. теорему 28.4 пункт 3. Здесь в качестве  $g(\zeta)$  нужно взять функцию  $\frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})} = \zeta^n$ , которая не взаимно однозначна в окрестности точки  $\zeta = 0$ .

Далее, удобно перейти к полярным координатам по обеим переменным  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$

$$w = z^n \iff \rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi} \iff \begin{cases} \rho = r^n, \\ \theta = n\varphi. \end{cases} \quad (29.1)$$

Вообще говоря, в последнем равенстве формулы (29.1) следовало бы написать, что существует целое число  $p$  такое, что  $\theta = n\varphi + 2\pi p$ . Однако, различные целые  $p$  приводят к одному и тому же значению переменной  $w$ . Поэтому мы положили  $p = 0$ .

Из (29.1) следует, что отображение  $w = z^n$  наиболее просто отображает области, границы которых состоят из кривых вида  $\varphi = \varphi_0$  или  $r = r_0$ , где  $\varphi_0$  и  $r_0$  – некоторые постоянные. Примером такой области может служить сектор вида

$$\{\Phi_1 < \varphi < \Phi_2\} \cap \{R_1 < r < R_2\}. \quad (29.2)$$

Отображение  $w = z^n$  переводит его в сектор

$$\{n\Phi_1 < \theta < n\Phi_2\} \cap \{R_1^n < \rho < R_2^n\}. \quad (29.3)$$

Обсудим теперь условия при которых отображение  $w = z^n$  будет конформным. Отображение  $w = z^n$  регулярно в  $\overline{\mathbb{C}}$ , поэтому для его конформности необходимо и достаточно, чтобы оно было взаимно однозначным. Пусть две различные точки  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  отображаются в одну и ту же точку  $w$ . Тогда из (29.1) получим

$$\begin{cases} r_1 = r_2, \\ \exists p \in \mathbb{Z}: \varphi_1 n = \varphi_2 n + 2\pi p, \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \exists p \in \mathbb{Z}: \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2\pi p}{n}. \end{cases} \quad (29.4)$$

Здесь мы учли, что два угла  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отличающиеся на угол  $2\pi p$ , соответствуют одному и тому же лучу на комплексной плоскости  $w$ . Итак, для того чтобы отображение  $w = z^n$  некоторой области  $D$  на область  $D^*$  было конформным, необходимо и достаточно, чтобы область  $D$  не содержала двух различных точек, удовлетворяющих условию (29.4).

В частности, для того чтобы функция  $w = z^n$  была конформным отображением сектора (29.2) на сектор (29.3), достаточно наложить условие вида

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < \frac{2\pi}{n}.$$

На рисунке 52 приведен пример области  $D$ , которую функция  $w = z^2$  конформно отображает на область  $D^*$ , изображенную на рисунке 53.  $\square$

**Ответ:** Для того чтобы функция  $w = z^n$  была конформным отображением области  $D$  на образ, необходимо и достаточно, чтобы область  $D$  не содержала точек  $z = 0$ ,  $z = \infty$  и никаких двух различных точек, удовлетворяющих условию (29.4).

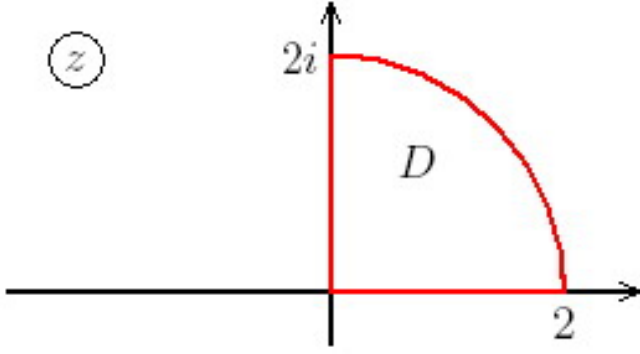


Рис. 52. Граница сектора  $D = \{0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\} \cap \{0 < r < 2\}$  изображена красным цветом.

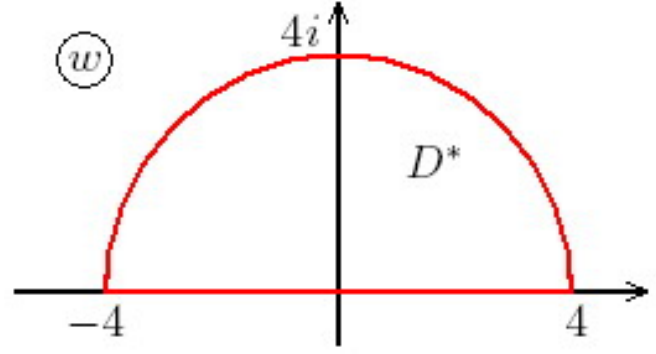


Рис. 53. Граница сектора  $D^* = \{0 < \theta < \pi\} \cap \{0 < \rho < 4\}$  изображена красным цветом.

**Пример 29.2.** Определить типы областей, которые функция  $w = \sqrt[n]{z}$ , где  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , отображает как конформное отображение.

**Решение.** В окрестности точек  $z = 0$  и  $z = \infty$  функция  $w = \sqrt[n]{z}$  не взаимно однозначна, потому что  $z = 0$  и  $z = \infty$  ее точки ветвления.

Как и в примере 29.1, удобно перейти к полярным координатам  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$

$$w = \sqrt[n]{z} \iff \rho e^{i\theta} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi p}{n}, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (29.5)$$

Из (29.5) следует, что отображение  $w = \sqrt[n]{z}$  наиболее просто отображает сектора вида

$$\{\Phi_1 < \varphi < \Phi_2\} \cap \{R_1 < r < R_2\}. \quad (29.6)$$

При отображении  $w = \sqrt[n]{z}$  сектор (29.6) отображается в один из секторов вида

$$\left\{ \frac{\Phi_1}{n} + \frac{2\pi p}{n} < \theta < \frac{\Phi_2}{n} + \frac{2\pi p}{n} \right\} \cap \{ \sqrt[n]{R_1} < \rho < \sqrt[n]{R_2} \}, \quad (29.7)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n-1$  (любое другое  $n$  приводит к одному из указанных секторов).

Тот факт, что образом сектора (29.6) может служить несколько различных секторов, является следствием многозначности функции  $\sqrt[n]{z}$ . Выбирая ту или иную ветвь функции  $w = \sqrt[n]{z}$  мы будем получать образом один из секторов вида (29.7).

Обсудим теперь условия при которых отображение  $w = \sqrt[n]{z}$  будет конформным. Допустим, что функция  $\sqrt[n]{z}$  регулярна на области  $D$ . Тогда остается проверить при каких условиях это отображение взаимно однозначно. Пусть две различные точки  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  отображаются в одну и ту же точку  $w$ . Тогда из (29.5) получим

$$\begin{cases} r_1 = r_2, \\ \frac{\varphi_1}{n} = \frac{\varphi_2}{n} + \frac{2\pi p}{n}, \quad p \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi p, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (29.8)$$

Легко видеть, что условие (29.8) выполнено только если точки  $z_1$  и  $z_2$  совпадают. Таким образом, функция  $\sqrt[n]{z}$  является конформным отображением области  $D$ , если она регулярна на этой области.

В частности, для того чтобы функция  $w = \sqrt[n]{z}$  была конформным отображением сектора (29.6) на сектор (29.7), достаточно наложить условие

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < 2\pi.$$

На рисунке 54 приведен пример области  $D$ , которую функция  $w = \sqrt{z}$  конформно отображает на область  $D^*$ , изображенную на рисунке 55. При этом была выбрана ветвь  $f_0(z)$  функции  $\sqrt{z}$ , отвечающая условию  $f_0(i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$   $\square$

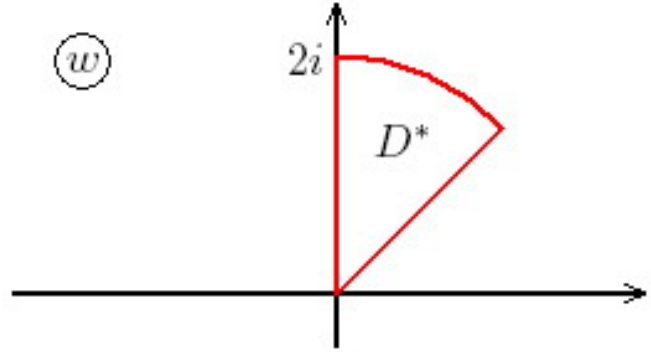
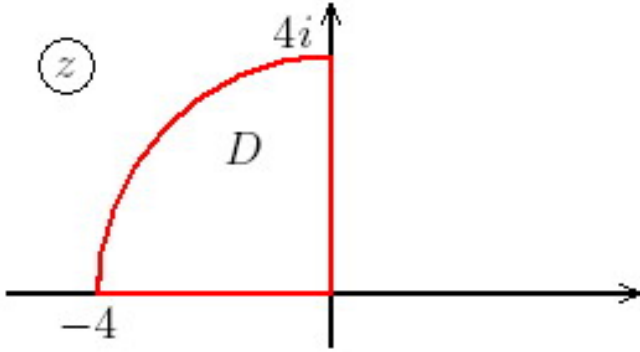


Рис. 54. Граница сектора  $D = \{\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\} \cap \{0 < r < 4\}$  изображена красным цветом. Рис. 55. Граница сектора  $D^* = \{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\} \cap \{0 < \rho < 2\}$  изображена красным цветом.

**Ответ:** Для того чтобы функция  $w = \sqrt[3]{z}$  была конформным отображением области  $D$  на образ, необходимо и достаточно, чтобы функция  $w = \sqrt[3]{z}$  была регулярна в области  $D$ .

**Пример 29.3.** Определить типы областей, которые функция  $w = e^z$  отображает как конформное отображение.

**Решение.** Перейдем к полярным координатам по переменной  $w = \rho e^{i\theta}$ , и к декартовым по переменной  $z = x + iy$

$$w = e^z \iff \rho e^{i\theta} = e^x e^{iy} \iff \begin{cases} \rho = e^x, \\ \theta = y. \end{cases} \quad (29.9)$$

Из (29.9) следует, что отображение  $w = e^z$  наиболее просто отображает области, границы которых состоят из кривых вида  $x = x_0$  или  $y = y_0$ , где  $x_0$  и  $y_0$  – некоторые постоянные. Примером такой области может служить прямоугольник

$$\{x_1 < x < x_2\} \cap \{y_1 < y < y_2\}. \quad (29.10)$$

При этом отображение  $w = e^z$  переводит прямоугольник (29.10) в сектор

$$\{y_1 < \theta < y_2\} \cap \{e^{x_1} < \rho < e^{x_2}\}. \quad (29.11)$$

Обсудим теперь условия при которых отображение  $w = e^z$  будет взаимно однозначным. В точке  $z = \infty$  у функции  $e^z$  существенная особая точка и поэтому в окрестности этой точки функция  $e^z$  не взаимно однозначна. Пусть теперь две различные точки  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  отображаются в одну и ту же точку  $w$ . Тогда из (29.9) получим, что

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, для того чтобы отображение  $w = e^z$  некоторой области  $D$  на область  $D^*$  было конформным, необходимо и достаточно, чтобы область  $D$  не содержала двух различных точек, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (29.12)$$

В частности, для того чтобы  $w = e^z$  было конформным отображением прямоугольника (29.10) на сектор (29.11) достаточно наложить условие на высоту прямоугольника

$$|y_2 - y_1| < 2\pi.$$

На рисунке 56 приведен пример области  $D$ , которую функция  $w = e^z$  конформно отображает на область  $D^*$ , изображенную на рисунке 57.  $\square$

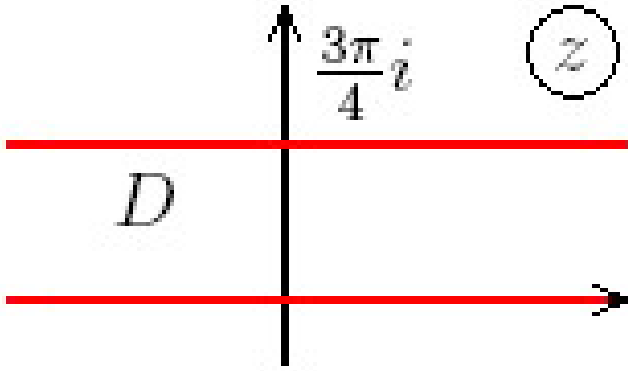


Рис. 56. Граница полосы  $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \frac{3\pi}{4}\}$  изображена красным цветом.

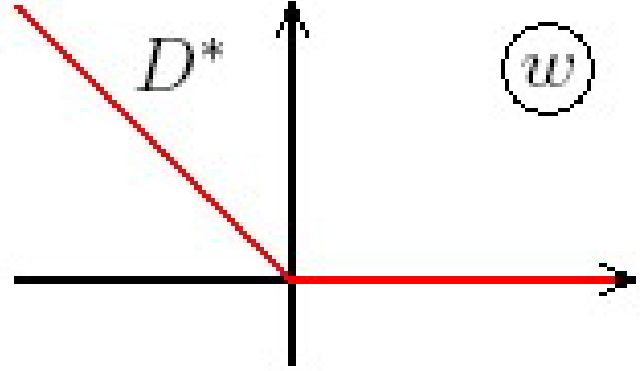


Рис. 57. Граница сектора  $D^* = \{0 < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$  изображена красным цветом.

**Ответ:** Для того чтобы функция  $w = e^z$  была конформным отображением области  $D$  на образ, необходимо и достаточно, чтобы область  $D$  не содержала точку  $z = \infty$  и никаких двух различных точек, удовлетворяющих условию (29.12).

**Пример 29.4.** Определить типы областей, которые функция  $w = \ln z$  отображает как конформное отображение.

**Решение.** Перейдем к полярным координатам по переменной  $z = re^{i\varphi}$ , и к декартовым по переменной  $w = u + iv$

$$w = \ln z \iff u + iv = \ln r + i\varphi + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} u = \ln r, \\ v = \varphi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (29.13)$$

Из (29.13) следует, что отображение  $w = \ln z$  наиболее просто отображает сектора вида

$$\{R_1 < r < R_2\} \cap \{\Phi_1 < \varphi < \Phi_2\}. \quad (29.14)$$

При отображении  $w = \ln z$  сектор (29.14) отображается в один из прямоугольников вида

$$\{\ln R_1 < u < \ln R_2\} \cap \{\Phi_1 + 2\pi n < v < \Phi_2 + 2\pi n\}, \quad (29.15)$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ . На какой именно прямоугольник будет отображен сектор (29.14) зависит от выбора ветви функции  $\ln z$ .

Как и в примере 29.2 легко показать, что функция  $\ln z$  будет конформным отображением области  $D$ , если она регулярна на этой области. В частности, для того чтобы функция  $\ln z$  была конформным отображением сектора (29.14) на прямоугольник вида (29.15), достаточно наложить условие

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < 2\pi.$$

На рисунке 58 приведен пример области  $D$ , которую функция  $w = \ln z$  конформно отображает на полуполосу  $D^*$ , изображенную на рисунке 59. При этом была выбрана ветвь  $f_0(z)$  функции  $\ln z$ , отвечающая условию.  $f_0(1) = 0$   $\square$

**Ответ:** Для того чтобы функция  $w = \ln z$  была конформным отображением области  $D$  на образ, необходимо и достаточно, чтобы функция  $w = \ln z$  была регулярна в области  $D$ .

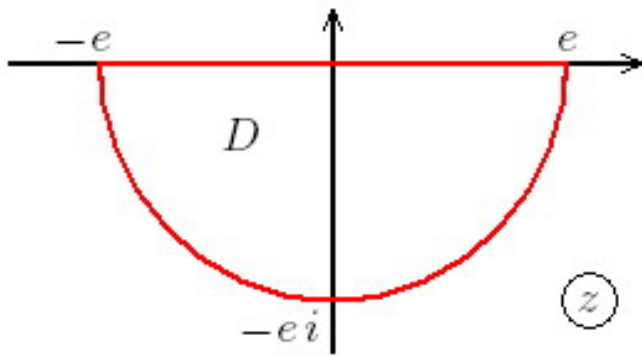


Рис. 58. Граница сектора  $D = \{-\pi < \varphi < 0\} \cap \{0 < r < e\}$  изображена красным цветом.

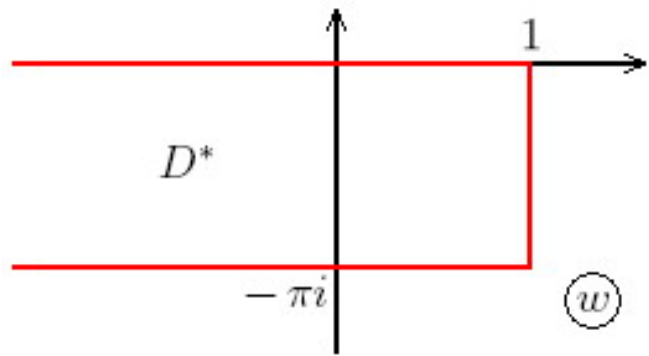


Рис. 59. Граница полуполосы  $D^* = \{-\infty < u < 1\} \cap \{-\pi < v < 0\}$  изображена красным цветом.

### Домашнее задание:

**Задача 29.5.** Найти конформное отображение полосы  $0 < \operatorname{Re} z < 4\pi$  на нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z < 0$ .

**Ответ:** Например,  $w = \exp\left(\frac{z}{4i}\right)$ .

**Задача 29.6.** Найти конформное отображение сектора  $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$  на правую полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$ .

**Ответ:** Например,  $w = iz^6$ .

**Задача 29.7.** Найти конформное отображение полуполосы  $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на круг  $|w| < 1$  с разрезом вдоль отрезка  $[0, 1]$ .

**Ответ:** Например,  $w = e^{2\pi iz}$ .

**Задача 29.8.** Найти конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом вдоль отрезка  $[0, i]$  на сектор  $\pi < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ .

**Ответ:** Например,  $w = -\sqrt[4]{z^2 + 1}$ . Здесь ветвь функции  $g(\zeta) = \sqrt[4]{\zeta}$  фиксирована следующим образом:  $g(\zeta) = \sqrt[4]{r} e^{i\frac{\varphi}{4}}$ , где  $\zeta = re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

**Задача 29.9.** Найти конформное отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < 2$  с разрезом вдоль луча  $(-\infty + i, i]$  на полосу  $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ .

**Ответ:** Например,  $w = \ln(e^{\pi z} + 1)$ . Здесь ветвь функции  $g(\zeta) = \ln \zeta$  фиксирована следующим образом:  $g(\zeta) = \ln r + i\varphi$ , где  $\zeta = re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

### 30. Дробно-линейные отображения. Отображение круга на полуплоскость.

**Определение 30.1.** Дробно-линейным отображением называют отображение вида

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $a, b, c$  и  $d$  – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию  $ad - bc \neq 0$ .

**Замечание 30.2.** При  $ad - bc = 0$  дробь  $\frac{az+b}{cz+d}$  не зависит от  $z$ .

**Теорема 30.3.**

- Любое дробно-линейное отображение является конформным отображением расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя.
- Любое конформное отображение расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя является дробно-линейным отображением.
- Для любых трех попарно различных точек  $a_1, b_1, c_1$  и любых трех попарно различных точек  $a_2, b_2, c_2$  существует единственное дробно-линейное отображение такое, что  $w(a_1) = a_2, w(b_1) = b_2$  и  $w(c_1) = c_2$ .

**Определение 30.4.** Точки  $z_*$  и  $z^*$  называют симметричными относительно прямой  $C$ , если выполнены следующие условия.

- (1) Точки  $z_*$  и  $z^*$  лежат на прямой перпендикулярной к  $C$ .
- (2) Точки  $z_*$  и  $z^*$  расположены на одинаковом расстоянии от прямой  $C$ .

**Определение 30.5.** Точки  $z_*$  и  $z^*$  называют симметричными относительно окружности  $|z - z_0| = R$ , если выполнены следующие условия.

- (1) Точки  $z_*$  и  $z^*$  лежат на одном луче, начинающемся в точке  $z_0$ .
- (2) Справедливо равенство  $|z_* - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$ .
- Если  $z_* = z_0$ , то полагают  $z^* = \infty$ .

**Теорема 30.6.** Всякая окружность или прямая  $C_z$  переводится дробно-линейным отображением в окружность или прямую  $C_w$ . При этом любые две симметричные точки  $z_*$  и  $z^*$  относительно  $C_z$  отображаются в симметричные точки  $w_*$  и  $w^*$  относительно  $C_w$ .

**Пример 30.7.** Найти какое-нибудь конформное отображение  $\overline{\mathbb{C}}$  на себя такое, что  $\operatorname{Re} z = 0$  переходит в окружность  $|w| = 2$ .

**Решение.** Из теоремы 30.3 следует, что таким отображением может быть только дробно-линейное отображение

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (30.1)$$

Допустим, что (30.1) осуществляет необходимое отображение и воспользуемся результатами теоремы 30.6. Для этого выберем произвольным образом две точки, симметричные относительно прямой  $\operatorname{Re} z = 0$ , например,  $z_* = 1$  и  $z^* = -1$ . Из теоремы 30.6 следует, что эти точки должны перейти в симметричные точки  $w_*$  и  $w^*$  относительно окружности  $|w| = 2$ . Поскольку нас не интересует общий вид отображения, то мы можем зафиксировать эти точки произвольным образом. Поскольку центр окружности и бесконечность две наиболее просто вычисляемые симметричные точки относительно окружности, то удобно положить  $w_* = 0$  и  $w^* = \infty$ .

Подставляя условия  $w(1) = 0$  и  $w(-1) = \infty$  в (30.1), получим

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 0, \\ \frac{b-a}{d-c} = \infty, \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 0, \\ d-c = 0. \end{cases} \quad (30.2)$$

Заметим, что мы довольно легко смогли решить уравнения  $w_* = 0$  и  $w^* = \infty$  благодаря тому, что в их правых частях стояли числа 0 и  $\infty$ . Это еще одна причина по которой было удобно выбрать бесконечность в качестве одной из симметричных точек.

Подведем промежуточный итог. Условия (30.2) гарантируют, что прямая  $\operatorname{Re} z = 0$  перейдет в окружность с центром в точке  $w = 0$ . Осталось добиться того, чтобы радиус этой окружности был равен двум. Для этого достаточно, чтобы одна из точек прямой  $\operatorname{Re} z = 0$ , например  $z = 0$ , переводилась отображением (30.1) в некоторую точку на окружности  $|w| = 2$ . Отсюда получим

$$|b/d| = 2. \quad (30.3)$$

Снова, поскольку нас интересует хотя бы какое-нибудь отображение переводящее прямую  $\operatorname{Re} z = 0$  в окружность  $|w| = 2$ , нам достаточно выбрать какое-нибудь решение уравнений (30.2) и (30.3). Положим, например,

$$a = 2, \quad b = -2, \quad c = 1, \quad d = 1. \quad \square$$

**Ответ:** Например,  $w = \frac{2(z-1)}{z+1}$ .

**Пример 30.8.** Найти все конформные отображения круга  $|z - 1| < 1$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$  такие, что точка  $z = 1$  переходит в точку  $w = 2i$ .

**Решение.** Из теоремы Римана 28.6 следует, что требуемое семейство отображений будет зависеть от одного произвольного вещественного параметра. Этот параметр будет соответствовать произволу в выборе аргумента производной отображения в точке  $z = 0$ . Таким образом, если мы построим некоторое однопараметрическое семейство требуемых отображений, то на основании теоремы Римана можно утверждать, что на самом деле мы построили все отображения нужного вида.

Будем искать требуемое отображение в виде дробно-линейного

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (30.4)$$

Точка  $z^* = \infty$  является симметричной относительно окружности  $|z - 1| = 1$  к точке  $z_* = 1$ , а точка  $w^* = -2i$  – симметричной относительно прямой  $\operatorname{Im} w = 0$  к точке  $w_* = 2i$ . Учитывая, что любое дробно-линейное отображение является конформным отображением расширенной комплексной плоскости на себя и переводит симметричные точки в симметричные, получим, что отображение (30.4) переводит окружность  $|z - 1| = 1$  в прямую  $\operatorname{Im} w = 0$ , точку  $z_* = 1$  в точку  $w_* = 2i$ , а также точку  $z^* = \infty$  в точку  $w^* = -2i$ . Отсюда

$$\begin{cases} w(1) = 2i, \\ w(\infty) = -2i, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 2i, \\ \frac{a}{c} = -2i, \end{cases} \quad (30.5)$$

Условия (30.5) гарантируют лишь то, что окружность  $|z - 1| = 1$  перейдет в окружность или прямую симметричную относительно точек  $2i$  и  $-2i$ . Поэтому к (30.5) необходимо добавить условие, которое гарантирует, что образом окружности  $|z - 1| = 1$  будет именно прямая  $\operatorname{Im} w = 0$ . В качестве такого условия можно взять следующее: точка  $z = 0$  отображается в некоторую

точку  $w = k$  вещественной оси, где  $k$  – произвольный вещественный параметр. Отсюда и из (30.5) получим, что

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 2i, \\ \frac{a}{c} = -2i, \\ \frac{b}{d} = k, \end{cases} \iff \begin{cases} kd - 2ic = 2ic + 2id, \\ a = -2ic, \\ b = kd, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{c}{d} = \frac{k-2i}{4i}, \\ \frac{a}{d} = -\frac{k-2i}{2}, \\ \frac{b}{d} = k. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения в (30.4), найдем

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}}{\frac{c}{d}z + 1} = \frac{-\frac{k-2i}{2}z + k}{\frac{k-2i}{4i}z + 1} = -2i \frac{(k-2i)z - 2k}{(k-2i)z + 4i}. \quad \square$$

**Ответ:**  $w = -2i \frac{(k-2i)z - 2k}{(k-2i)z + 4i}$ , где  $k \in \mathbb{R}$ .

**Пример 30.9.** Найти какое-нибудь конформное отображение круга  $|z| < 1$  на область  $|w| > 2$ , которое переводит точку  $z = 0$  в точку  $w = 4$ .

**Решение.** Будем искать требуемое отображение в виде дробно-линейного

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (30.6)$$

Точки  $z_* = 0$  и  $z^* = \infty$  являются симметричными относительно окружности  $|z| = 1$ , а точки  $w_* = 4$  и  $w^* = 1$  – симметричными относительно окружности  $|w| = 2$ . Учитывая свойства дробно-линейных отображений, достаточно найти отображение вида (30.6), которое переводит точку  $z_* = 0$  в  $w_* = 4$ , точку  $z^* = \infty$  в  $w^* = 1$  и, дополнительно, какую-нибудь точку окружности  $|z| = 1$  в точку окружности  $|w| = 2$ , например, точку  $z = 1$  в  $w = 2$ . Отсюда

$$\begin{cases} w(0) = 4, \\ w(\infty) = 1, \\ w(1) = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{b}{d} = 4, \\ \frac{a}{c} = 1, \\ \frac{a+b}{c+d} = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} b = 4d, \\ a = c, \\ c + 4d = 2c + 2d, \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2c, \\ a = c, \\ 2d = c. \end{cases}$$

Отсюда находим требуемое отображение

$$w = \frac{2z + 4}{z + 1}. \quad \square$$

**Ответ:** Например,  $w = \frac{2z+4}{z+1}$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 30.10.** Найти какое-нибудь конформное отображение, которое отображает область  $|z| > 2$  на полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 1$ .

**Ответ:** Например,  $w = \frac{2iz}{z-2}$ .

**Задача 30.11.** Найти все конформные отображения полуплоскости  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$  на круг  $|w| < 2$  такие, что точка  $z = 1$  переходит в точку  $w = 0$ .

**Ответ:**  $w = 2e^{i\varphi} \frac{z-1}{z+i}$ , где  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

**Задача 30.12.** Найти все конформные отображения области  $|z+1| > 2$  на область  $|w| > 2$  такие, что точка  $z = 3$  переходит в точку  $w = \infty$ .

**Ответ:**  $w = 4e^{i\varphi} \frac{z}{z-3}$ , где  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

**Задача 30.13.** Найти общий вид конформного отображения верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на себя.

**Ответ:**  $w = (c - i) \frac{z - b - ia}{z - b + ia} + i$ , где  $a > 0$  и  $b, c \in \mathbb{R}$ .

**Задача 30.14.** Найти все конформные отображения  $w = f(z)$  расширенной комплексной плоскости на себя, удовлетворяющие условию  $f^{-1}(z) = \frac{1}{f(z)}$ , где  $f^{-1}(z)$  – обратное отображение к  $f(z)$ .

**Ответ:**  $f(z) = \frac{z+i}{1+iz}$ ,  $f(z) = \frac{z-i}{1-iz}$ .

## 31. Отображение луночек.

Основные идеи, которые используются для отображения луночек, мы продемонстрируем на следующих примерах.

**Пример 31.1.** Найти конформное отображение луночки  $D_0 = \{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

**Решение.** Решение этой задачи будем искать в виде композиции нескольких отображений.

*Шаг 1.* Отобразим расширенную комплексную плоскость с помощью дробно-линейного отображения так, чтобы луночка  $D_0$  перешла в сектор. Для этого необходимо отобразить на бесконечность одну из двух точек пересечения окружности  $|z| = 1$  и прямой  $\operatorname{Im} z = 0$ . Удобно также вторую точку пересечения перевести в начало координат. Этим требованиям удовлетворяет, например, отображение

$$z_1 = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (31.1)$$

Отображение (31.1) переводит точки

$$a_0 = 1, \quad b_0 = -1, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = \infty \quad \text{и} \quad e_0 = i$$

в точки

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \infty, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 1 \quad \text{и} \quad e_1 = i,$$

соответственно. Точки  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  лежат на прямой  $\operatorname{Im} z = 0$ , поэтому эта прямая при отображении (31.1) перейдет в прямую, проходящую через точки  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$ , а именно, в прямую  $\operatorname{Im} z_1 = 0$ . В частности, так как точка  $c_0 = 0$  лежит внутри отрезка  $(-1, 1)$ , то этот отрезок перейдет в луч, содержащий точку  $c_1 = -1$ , а именно в луч  $(-\infty, 0)$  вещественной оси, см. рисунки 60 и 61.

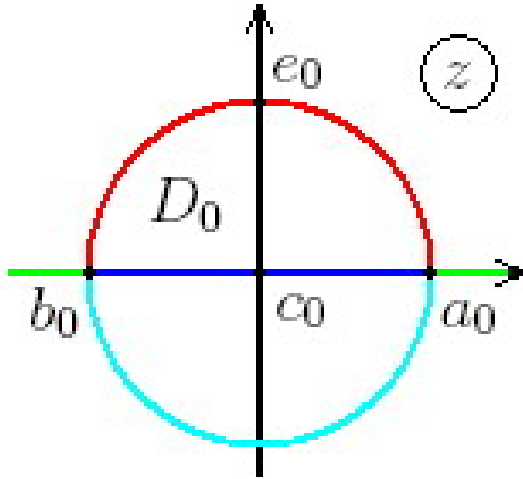


Рис. 60. Границы луночки  $D_0$  выделены красным и синим цветами.

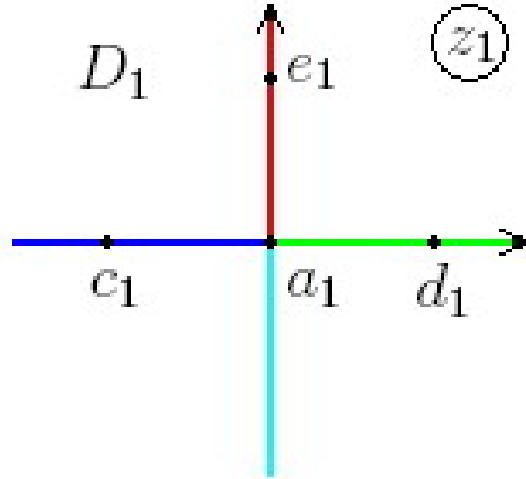


Рис. 61. Границы сектора  $D_1$  выделены красным и синим цветами.

Точки  $c_0$  и  $d_0$  симметричны относительно окружности  $|z| = 1$ , поэтому эта окружность при отображении (31.1) перейдет в прямую, симметричную относительно точек  $c_1 = -1$  и  $d_1 = 1$ , а именно в прямую  $\operatorname{Re} z = 0$ . При этом, так как точка  $e_0 = i$  переходит в точку  $e_1 = i$ , то верхняя дуга окружности  $|z| = 1$  перейдет в луч  $(0, +i\infty)$  мнимой оси<sup>8</sup>, см. рисунки 60 и 61.

<sup>8</sup>Этот факт можно также вывести из свойства конформных отображений сохранять ориентацию.

Таким образом, отображение (31.1) переводит луночку  $D_0$  в сектор

$$D_1 = \left\{ \frac{\pi}{2} < \arg z_1 < \pi \right\}.$$

*Шаг 2.* Сектор  $D_1$  удобно повернуть так чтобы одна из его границ совпала с полуосью  $(0, +\infty)$  вещественной оси. Этого можно добиться с помощью поворота

$$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_1 = -iz_1. \quad (31.2)$$

При этом сектор  $D_1$  перейдет в сектор

$$D_2 = \left\{ 0 < \arg z_2 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

*Шаг 3.* Наконец, сектор  $D_2$  с помощью степенного отображения

$$w = z_2^2 \quad (31.3)$$

конформно отображается на верхнюю полуплоскость.

*Шаг 4.* Композиция отображений (31.1), (31.2) и (31.3) отображает луночку  $D_0$  на верхнюю полуплоскость.  $\square$

**Ответ:** Композиция отображений  $w = z_2^2$ ,  $z_2 = -iz_1$  и  $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$  конформно отображает луночку  $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

**Пример 31.2.** Найти конформное отображение луночки  $D_0 = \{|z| > 1\} \cap \{|z-1| > 1\}$  на круг  $|w| < 1$ .

**Решение.** Решение этой задачи будем искать в виде композиции нескольких отображений.

*Шаг 1.* Точки пересечения окружностей  $|z| = 1$  и  $|z-1| = 1$  имеют вид

$$a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{и} \quad b_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Дробно-линейное отображение, которое переводит точку  $a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$  в точку  $a_1 = 0$  и точку  $b_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$  в точку  $b_1 = \infty$ , можно взять в виде

$$z_1 = \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}}. \quad (31.4)$$

При этом отображение (31.4) переводит точки

$$a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad b_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad c_0 = 0 \quad \text{и} \quad d_0 = \infty$$

в точки

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \infty, \quad c_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{и} \quad d_1 = 1,$$

соответственно.

Точки  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  лежат на окружности  $|z-1| = 1$ , поэтому эта окружность при отображении (31.4) перейдет в прямую, проходящую через точки  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$ , а именно, в прямую  $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3}$ , см. рисунки 62 и 63.

Точки  $c_0$  и  $d_0$  симметричны относительно окружности  $|z| = 1$ , поэтому эта окружность при отображении (31.4) перейдет в прямую, симметричную относительно точек  $c_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  и  $d_1 = 1$ , а именно в прямую  $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$ , см. рисунки 62 и 63.

*Шаг 2.* Сектор  $D_1$  удобно повернуть так чтобы одна из его границ совпала с полуосью  $(0, +\infty)$  вещественной оси. Этого можно добиться с помощью поворота

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1. \quad (31.5)$$

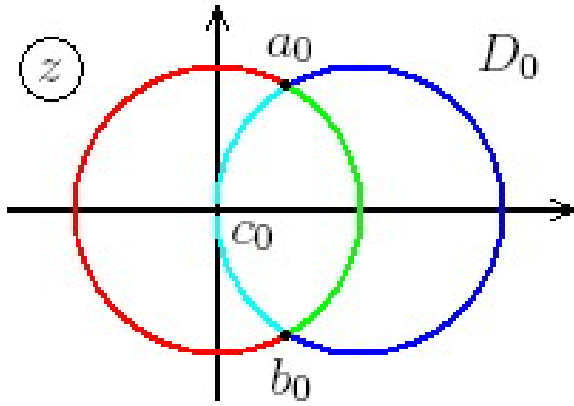


Рис. 62. Границы луночки  $D_0$  выделены красным и синим цветами.

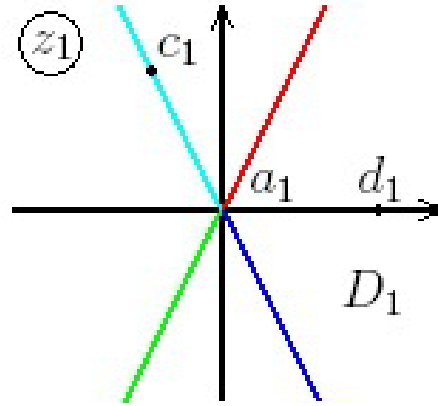


Рис. 63. Границы сектора  $D_1$  выделены красным и синим цветами.

При этом сектор  $D_1$  перейдет в сектор

$$D_2 = \left\{ 0 < \arg z_2 < \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

*Шаг 3.* Сектор  $D_2$  с помощью степенного отображения

$$z_3 = (z_2)^{3/2} \quad (31.6)$$

конформно отображается на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z_3 > 0$ . При этом ветвь многозначной функции  $w = (z_2)^{3/2}$  фиксируется условием  $(1)^{3/2} = 1$ .

*Шаг 4.* Наконец верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} z_3 > 0$  с помощью дробно-линейного отображения

$$w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i} \quad (31.7)$$

конформно отображается на единичный круг  $|w| < 1$ .

*Шаг 5.* Композиция отображений (31.4), (31.5), (31.6) и (31.7) отображает луночку  $D_0$  на круг  $|w| < 1$ .  $\square$

**Ответ:** Композиция отображений  $w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i}$ ,  $z_3 = (z_2)^{3/2}$ ,  $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1$  и  $z_1 = \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$  конформно отображает луночку  $\{|z| > 1\} \cap \{|z - 1| > 1\}$  на круг  $|w| < 1$ .

### Домашнее задание:

**Задача 31.3.** Найти конформное отображение внешности луночки  $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w < 0$ .

**Ответ:** Композиция отображений  $w = (z_2)^{2/3}$ ,  $z_2 = -z_1$  и  $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$  конформно отображает внешность луночки  $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ . Здесь ветвь многозначной функции  $g(z_1) = (z_1)^{2/3}$  фиксирована условием  $g(z_1) = r^{2/3} e^{\frac{2i\varphi}{3}}$ , где  $z_1 = re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, \frac{3\pi}{2})$ .

**Задача 31.4.** Найти конформное отображение луночки  $\{|z| < 2\} \cap \{|z - 1| > 1\}$  на правую полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$ .

**Ответ:** Композиция отображений  $w = -iz_4$ ,  $z_4 = e^{z_3}$ ,  $z_3 = 4\pi iz_2$ ,  $z_2 = z_1 + \frac{1}{2}$  и  $z_1 = \frac{1}{z-2}$  конформно отображает луночку  $\{|z| < 2\} \cap \{|z - 1| > 1\}$  на правую полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$ .

**Задача 31.5.** Найти конформное отображение луночки  $\{|z| < 2\} \cap \{|z - 2| > 1\}$  на область  $|w| > 1$ .

**Ответ:**

**Задача 31.6.** Найти общий вид конформного отображения луночки  $\{|z| < 2\} \cap \{\operatorname{Re}(z) < 1\}$  на круг  $|w| < 2$ .

**Ответ:**

## 32. Физические приложения (поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости).

**Определение 32.1.** Пусть

- $D$  – односвязная область в  $\mathbb{C}$ ;
- $A$  – гармоническое поле в  $D$  (т. е.  $\Delta A = 0$  в  $D$ );
- $f \in \mathcal{H}(D)$  такая, что  $A = \overline{f'}$  в области  $D$ .

Тогда

- (1) говорят, что  $f$  – комплексный потенциал поля  $A$ ;
- (2) любую линию уровня функции  $u = \operatorname{Re} f$  называют эквипотенциальной линией поля  $A$ ;
- (3) любую линию уровня функции  $v = \operatorname{Im} f$  называют линией тока поля  $A$ .

**Теорема 32.2.** Пусть

- $D$  – односвязная область в  $\mathbb{C}$ ;
- граница  $\gamma$  области  $D$  положительно ориентирована относительно  $D$ ;
- $\gamma$  содержит бесконечно удаленную точку;
- $\gamma$  – гладкая кривая в  $\overline{\mathbb{C}}$ ;
- в окрестности бесконечно удаленной точки  $\gamma$  является прямой;
- $V_\infty \geq 0$ .

Тогда существует единственное гармоническое поле скоростей  $V$  такое, что

- (1) поле  $V$  обтекает кривую  $\gamma$  (т. е.  $\gamma$  является линией тока поля  $V$ ) в направлении заданном ориентацией на  $\gamma$ ;
- (2) поле  $V$  равномерно ограничено в области  $D$ ;
- (3)  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ .

Кроме того, существует комплексный потенциал  $f$  поля скоростей  $V$ , удовлетворяющий следующим условиям

- (1)  $f$  – конформное отображение области  $D$  на полуплоскость  $\Pi_+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ ;
- (2)  $f(\infty) = \infty$ ;
- (3)  $|f'(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ .

**Пример 32.3.** Найти поле скоростей  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid |z| < 1\},$$

удовлетворяющую условию  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ , где  $V_\infty > 0$ , и обтекающее границу области  $D$  в направлении от  $-\infty$  к  $+\infty$ .

**Решение.** Построим конформное отображение области  $D$  на верхнюю полуплоскость  $\Pi_+$ . Отображение

$$z_1 = z^2, \quad z \in D$$

конформно отображает область  $D$  на область

$$D_1 = \{z_1 \mid |z_1| > 1, z_1 \notin (1, +\infty)\}.$$

Отображение

$$z_2 = \frac{1}{z_1 - 1}, \quad z_1 \in D_1$$

конформно отображает область  $D_1$  на область

$$D_2 = \left\{ z_2 \mid \operatorname{Re} z_2 > -\frac{1}{2} \right\} \setminus \{z_2 \mid z_2 = x_2, x_2 \in (0, +\infty)\}.$$

Отображение

$$z_3 = z_2 + \frac{1}{2}, \quad z_2 \in D_2$$

конформно отображает область  $D_2$  на область

$$D_3 = \{z_3 \mid \operatorname{Re} z_3 > 0\} \setminus \left\{z_3 \mid z_3 = x_3, x_3 \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right\}.$$

Отображение

$$z_4 = z_3^2, \quad z_3 \in D_3$$

конформно отображает область  $D_3$  на область

$$D_4 = \mathbb{C} \setminus \left\{z_4 \mid z_4 = x_4, x_4 \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right\}.$$

$$z_5 = \frac{z_4}{z_4 - \frac{1}{4}}, \quad z_4 \in D_4$$

конформно отображает область  $D_4$  на область

$$D_5 = \mathbb{C} \setminus \{z_5 \mid z_5 = x_5, x_5 \in (0, +\infty)\}.$$

Отображение

$$z_6 = \sqrt{z_5}, \quad z_5 \in D_5,$$

где выбрана ветвь корня, удовлетворяющая условию  $\sqrt{-1} = i$ , конформно отображает область  $D_5$  на верхнюю полуплоскость  $\Pi_+$ . Заметим, что полученное отображение области  $D$  на  $\Pi_+$  переводит  $\infty$  в  $\infty$ . Общее отображение верхней полуплоскости  $\Pi_+$  на себя можно записать в виде

$$w = az_6 + b, \quad z_6 \in \Pi_+,$$

где  $a > 0$  и  $b \in \mathbb{R}$ .

Обозначим полученное конформное отображение области  $D$  на верхнюю полуплоскость  $\Pi_+$  через  $f$ . Легко видеть, что

$$z = \infty \rightarrow z_1 = \infty \rightarrow z_2 = 0 \rightarrow z_3 = \frac{1}{2} \rightarrow z_4 = \frac{1}{4} \rightarrow z_5 = \infty \rightarrow z_6 = \infty \rightarrow w = \infty.$$

Другими словами,

$$f(\infty) = \infty.$$

При  $z \rightarrow \infty$  верно, что

$$f(z) \sim az_6 = a\sqrt{z_5} \sim \frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{z_4 - \frac{1}{4}}} \sim \frac{a}{\sqrt{z_3 - \frac{1}{2}}} \sim \frac{a}{\sqrt{z_2}} \sim a\sqrt{z_1} \sim az.$$

Следовательно,

$$f(z) = az + o(z), \quad f'(z) = a + o(1)$$

при  $z \rightarrow \infty$ .

Полагая  $a = V_\infty$  и  $b = 0$  (выбор  $b$  не влияет на поле скоростей  $V$ ) найдем комплексный потенциал поля  $V$

$$f(z) = V_\infty f(z), \quad z \in D.$$

Отсюда и из теоремы 32.2 следует, что  $V(z) = \overline{f'(z)}$ .  $\square$

**Ответ:**  $V(z) = \overline{f'(z)}$ .

**Домашнее задание:****Задача 32.4.** Найти поле скоростей  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z \mid |z| < 1\},$$

удовлетворяющую условию  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ , где  $V_\infty > 0$ , и обтекающее границу области  $D$  в направлении от  $-\infty$  к  $+\infty$ .

**Ответ:**  $f(z) = \frac{4}{3} \frac{V_\infty}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2/3}}, V(z) = \overline{f'(z)}$ .

**Задача 32.5.** Найти поле скоростей  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid z = e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \pi/2)\},$$

где  $h > 0$ , удовлетворяющую условию  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ , где  $V_\infty > 0$ , и обтекающее границу области  $D$  в направлении от  $-\infty$  к  $+\infty$ .

**Ответ:**  $f(z) = -\frac{V_\infty}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}}\right)^{-1}, V(z) = \overline{f'(z)}$ .

**Задача 32.6.** Найти поле скоростей  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid z = (\pm 1 + i)t, t \in (0, h)\},$$

где  $h > 0$ , удовлетворяющую условию  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ , где  $V_\infty > 0$ , и обтекающее границу области  $D$  в направлении от  $-\infty$  к  $+\infty$ .

**Ответ:**

### 33. Физические приложения (электростатическое поле).

**Теорема 33.1.** Пусть

- $D$  – односвязная область в  $\overline{\mathbb{C}}$ ;
- граница области  $D$  состоит из двух кусочно-гладких кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ;
- $\varphi_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_2 \in \mathbb{R}$  и  $\varphi_1 < \varphi_2$ .

Тогда существует единственное электростатическое поле  $E$  такое, что

- (1)  $\varphi$  – электростатический потенциал поля  $E$  ( $E = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ );
- (2)  $\varphi|_{\gamma_1} = \varphi_1$ ,  $\varphi|_{\gamma_2} = \varphi_2$ ;
- (3) потенциал  $\varphi$  равномерно ограничен в области  $D$ .

Кроме того, существует комплексный потенциал  $f$  электростатического поля  $E$ , удовлетворяющий следующим условиям

- (1)  $f$  – конформное отображение области  $D$  на полосу  $\Pi = \{z \mid -\varphi_2 < \operatorname{Re} z < -\varphi_1\}$ ;
- (2)  $f(\gamma_1) = \{z \mid \operatorname{Re} z = -\varphi_1\}$ ;
- (3)  $f(\gamma_2) = \{z \mid \operatorname{Re} z = -\varphi_2\}$ .

**Замечание 33.2.** Потенциал  $\varphi$  электростатического поля и комплексный потенциал  $f$  связаны соотношением

$$\exists C \in \mathbb{R} : \varphi = -u + C.$$

**Пример 33.3.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля в секторе

$$D = \{z \mid 0 < \arg z < a\},$$

где  $a \in (0, 2\pi)$ , удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid \arg z = 0\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid \arg z = a\}$ .

**Решение.** Построим конформное отображение области  $D$  на полосу  $\Pi = \{z \mid -1 < \operatorname{Re} z < 0\}$ . Отображение

$$z_1 = \ln z, \quad z \in D$$

конформно отображает область  $D$  на область

$$D_1 = \{z_1 \mid 0 < \operatorname{Im} z_1 < a\}.$$

Отображение

$$w = \frac{i}{a} z_1, \quad z_1 \in D_1$$

конформно отображает область  $D_1$  на полосу  $\Pi$ . Таким образом, функция

$$w = f(z) = \frac{i}{a} \ln z$$

конформно отображает область  $D$  на полосу  $\Pi$ .

Из построения следует, что конформное отображение  $f$  удовлетворяет условиям

$$f(\gamma_1) = \{z \mid \operatorname{Re} z = 0\}, \quad f(\gamma_2) = \{z \mid \operatorname{Re} z = -1\}.$$

Отсюда и из теоремы 33.1 следует, что

$$E(z) = \overline{f'(z)} = -\frac{i}{a\bar{z}}, \quad \varphi(z) = -\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{a} \arg z, \quad z \in D. \quad \square$$

**Ответ:**  $E(z) = -\frac{i}{a\bar{z}}$ ,  $\varphi(z) = \frac{1}{a} \arg z$ ,  $z \in D$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 33.4.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля в верхней полуплоскости

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid z = x, x \in (-\infty, 0)\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid z = x, x \in (0, +\infty)\}$ .

**Ответ:**

**Задача 33.5.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля в круге

$$D = \{z \mid |z| < 1\},$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid z = e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \pi/2)\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid z = e^{i\varphi}, \varphi \in (\pi/2, 2\pi)\}$ .

**Ответ:**

**Задача 33.6.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля в полукруге

$$D = \{z \mid |z| < 1\} \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\},$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid z = e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \pi)\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid z = x, x \in (-1, 1)\}$ .

**Ответ:**

**Задача 33.7.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid |z - i| < 1\},$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 1$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid |z - i| = 1\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 2$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ .

**Ответ:**

**Задача 33.8.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid z = iy, y \in (0, h)\},$$

где  $h > 0$ , удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = -1$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid z = iy, y \in (0, h)\}$ .

**Ответ:**

### 34. 7-ая контрольная работа (задачи: 12, 13; 45 мин.).

**Комментарии к задаче 12.** Студент должен знать конформное отображение каких областей и с какими дополнительными условиями позволяет решить данную задачу, уметь построить данное конформное отображение, знать связь между построенным конформным отображением и полем скоростей.

**Комментарии к задаче 13.** Студент должен знать конформное отображение каких областей и с какими дополнительными условиями позволяет решить данную задачу, уметь построить данное конформное отображение, знать связь между построенным конформным отображением, потенциалом и напряженностью электрического поля. На контрольной желательно давать задачи связанные с отображением луночек.

#### Вариант контрольной работы №7.

**Задача 12.** Найти поле скоростей  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid |z - i| \leq 1\},$$

удовлетворяющее условию  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ , где  $V_\infty > 0$ , и обтекающее границу области  $D$  в направлении от  $-\infty$  к  $+\infty$ .

**Ответ:**  $V(z) = \overline{f'(z)}$ , где

$$f(z) = \frac{2\pi V_\infty}{1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{z}\right)}.$$

**Задача 13.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность электростатического поля  $E$  в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\},$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 2$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ .

**Ответ:**  $E(z) = \overline{f'(z)}$  и  $\varphi(z) = -\operatorname{Re} f(z)$ , где

$$f(z) = \frac{4i}{\pi} \ln \left( -i \frac{z-1}{z+1} \right).$$

#### Вариант контрольной работы №7.

**Задача 12.** Найти поле скоростей  $V$  идеальной несжимаемой жидкости в области

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z \mid |z| < 1\},$$

удовлетворяющую условию  $|V(z)| = V_\infty + o(1)$  при  $D \ni z \rightarrow \infty$ , где  $V_\infty > 0$ , и обтекающее границу области  $D$  в направлении от  $-\infty$  к  $+\infty$ .

**Ответ:**

**Задача 13.** Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность электростатического поля  $E$  в области

$$D = \{z \mid |z| < 2, |z - 1| > 1\},$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$ , где  $\gamma_1 = \{z \mid |z| = 2\}$ ;
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \mid |z - 1| = 1\}$ .

## 35. Преобразование Лапласа, основные свойства, таблица основных изображений.

**Определение 35.1.** Функцией-оригиналом мы будем называть любую комплексно-значную функцию  $f(t)$  вещественного аргумента  $t$ , удовлетворяющую следующим свойствам.

- (1)  $f(t)$  – кусочно непрерывная функция.
- (2)  $f(t) = 0$  при всех  $t < 0$ .
- (3) Функция  $f(t)$  возрастает не быстрее экспоненциальной функции. Более точно, существуют такие постоянные  $M > 0$  и  $s \geq 0$ , что  $|f(t)| \leq Me^{st}$  при  $t \geq 0$ . Число  $s$  называют показателем роста функции  $f(t)$ .

**Определение 35.2.** Преобразованием Лапласа (или изображением) функции оригинала  $f(t)$  называют функцию комплексного переменного  $F(p)$ , определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Тот факт, что функция  $F(p)$  является изображением функции  $f(t)$  мы будем записывать символом

$$f(t) \doteq F(p).$$

**Теорема 35.3.** Для любого оригинала  $f(t)$  его изображение  $F(p)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > s$ , где  $s$  – показатель роста функции  $f(t)$ , и является в этой полуплоскости регулярной функцией.

**Определение 35.4.**  $\theta$ -функцией Хевисайда называют следующую функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

**Пример 35.5.** Найти изображение функции  $f(t) = e^{at}\theta(t)$ , где  $a \in \mathbb{C}$ .

**Решение.** Используя определение 35.2, найдем

$$f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{at}e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}. \quad \square$$

**Ответ:**  $e^{at}\theta(t) \doteq \frac{1}{p-a}$ .

**Пример 35.6.** Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2], \\ 0, & t \notin [0, 2]. \end{cases}$$

**Решение.** Используя определение 35.2, найдем

$$f(t) \doteq \int_0^2 e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^2 = \frac{1 - e^{-2p}}{p}. \quad \square$$

**Ответ:**  $f(t) \doteq \frac{1 - e^{-2p}}{p}$ .

**Теорема 35.7** (Дифференцирование оригинала). Пусть функция  $f(t)$  непрерывна вместе со своими производными  $f^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$  при  $t \geq 0$  и  $f^{(n)}(t)$  является оригиналом. Тогда

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq pF(p) - f(0), \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

где под  $f^{(k)}(0)$  понимается правое предельное значение  $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ .

**Теорема 35.8** (Дифференцирование изображения). Пусть функция  $f(t)$  является оригиналом. Тогда

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p).$$

**Теорема 35.9** (Интегрирование оригинала). Пусть функция  $f(t)$  является оригиналом. Тогда

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

**Определение 35.10.** Сверткой двух оригиналов  $f(t)$  и  $g(t)$  называют функцию

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

**Теорема 35.11** (Теорема умножения изображений). Пусть функции  $f(t)$  и  $g(t)$  являются оригиналами. Тогда

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p).$$

**Пример 35.12.** Используя теорему о дифференцировании изображения, найти изображение функции  $f(t) = te^t \theta(t)$ .

**Решение.** Воспользуемся результатом примера 35.5

$$te^t \theta(t) \doteq - \left( \frac{1}{p-1} \right)' = \frac{1}{(p-1)^2}. \quad \square$$

**Ответ:**  $te^t \theta(t) \doteq \frac{1}{(p-1)^2}$ .

**Пример 35.13** (Интеграл Дюамеля). Пусть  $f(t) \doteq F(p)$  и  $g(t) \doteq G(p)$ . Доказать соотношение

$$pF(p)G(p) \doteq g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t - \tau) d\tau.$$

**Решение.** Используя теоремы о дифференцировании и умножении изображений, получим

$$pF(p)G(p) = F(p)[pG(p) - g(0)] + g(0)F(p) \doteq (f * g')(t) + g(0)f(t). \quad \square$$

**Теорема 35.14** (Таблица изображений). *Справедливы следующие соотношения*

$$\begin{aligned} t^n e^{at} \theta(t) &\doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad a \in \mathbb{C}, \\ \sin(at) \theta(t) &\doteq \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{C}, \\ \cos(at) \theta(t) &\doteq \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{C}, \\ t^a \theta(t) &\doteq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, \quad a > -1, \\ \begin{cases} 1, & t \in [0, a] \\ 0, & t \notin [0, a] \end{cases} &\doteq \frac{1 - e^{-ap}}{p}, \quad a > 0. \end{aligned}$$

**Домашнее задание:**

**Задача 35.15.** Докажите теорему 35.7 при  $n = 1$ .

**Задача 35.16.** Докажите теорему 35.8 при  $n = 1$ .

**Задача 35.17.** Докажите теорему 35.9.

**Задача 35.18.** Докажите теорему 35.14.

### 36. Формула обращения Меллина.

**Теорема 36.1** (Формула обращения Меллина). Пусть  $F(p)$  – изображение оригинала  $f(t)$ . Пусть  $s_0$  такая постоянная, что функция  $F(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Тогда в точках непрерывности функции  $f(t)$  имеет место формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (36.1)$$

где  $s$  – произвольное вещественное число такое, что  $s > s_0$ .

Вычисление интегралов вида (36.1) проводится тем же способом, что интегралов по вещественной оси, содержащих тригонометрические функции, стр. 55. Единственное отличие заключается в том, что контур интегрирования нужно будет замыкать либо в левую, либо в правую полуплоскость, в зависимости от того в какую сторону убывает экспоненциальный множитель. Сформулируем вариант леммы Жордана, приспособленный для данного случая.

**Теорема 36.2.**

- Пусть функция  $g(z)$  непрерывна в правой полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^+} |g(z)| = 0,$$

где  $C_R^+ = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ . Тогда для любого  $\alpha < 0$  существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} g(z) e^{\alpha z} dz = 0.$$

- Пусть функция  $g(z)$  непрерывна в левой полуплоскости, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_R^-} |g(z)| = 0,$$

где  $C_R^- = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} g(z) e^{\alpha z} dz = 0.$$

**Пример 36.3.** Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{1}{p-2}.$$

**Решение.** Функция  $F(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > 2$ . Воспользуемся формулой Меллина, полагая  $s = 3 > 2$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-2} dp. \quad (36.2)$$

Рассмотрим случай  $t < 0$ . Функция  $e^{pt}$  экспоненциально убывает в правой полуплоскости, и согласно теореме (36.2) контур интегрирования нужно замыкать там же. С учетом того, что функция  $\frac{e^{pt}}{p-2}$  не имеет особых точек в полуплоскости  $\operatorname{Re}(z) > 3$ , получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-2} dp = 0, \quad t < 0.$$

Рассмотрим случай  $t > 0$ . Теперь функция  $e^{pt}$  экспоненциально убывает в левой полуплоскости, и контур интегрирования необходимо замкнуть там же. Отсюда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{pt}}{p-2} dp = \operatorname{res}_{p=2} \frac{e^{pt}}{p-2} = e^{2t}, \quad t > 0.$$

При  $t = 0$  интеграл (36.2), вообще говоря, расходится, и это соответствует разрыву функции  $f(t)$  в точке  $t = 0$ . Какое именно мы припишем значение функции  $f(t)$  в ее точке разрыва не важно.  $\square$

**Ответ:**  $f(t) = e^{2t}\theta(t)$ .

**Пример 36.4.** Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

**Решение.** Функция  $F(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > 0$ . Воспользуемся формулой Меллина, полагая  $s = 1 > 0$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} dp.$$

При  $t < 2$  функция  $e^{p(t-2)}$  экспоненциально убывает в правой полуплоскости, и контур интегрирования нужно замыкать там же. С учетом того, что функция  $\frac{e^{p(t-2)}}{p^2}$  не имеет особых точек в полуплоскости  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} dp = 0, \quad t < 2.$$

При  $t \geq 2$  контур интегрирования необходимо замыкать в левой полуплоскости. Отсюда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} dp = \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2} = t - 2, \quad t \geq 2. \quad (36.3)$$

Заметим, что при  $t = 2$  интеграл (36.3) сходится, и, соответственно, оригинал  $f(t)$  непрерывен при  $t = 2$ , сравни с примером 36.3.  $\square$

**Ответ:**  $f(t) = (t - 2)\theta(t - 2)$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 36.5.** Восстановить оригинал по изображению  $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ .

**Ответ:**  $f(t) = (e^{-t} - 1 + t)\theta(t)$ .

**Задача 36.6.** Восстановить оригинал по изображению  $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-4}$ .

**Ответ:**  $f(t) = \frac{\text{sh}(2(t-1))}{2}\theta(t-1)$ .

**Задача 36.7.** Восстановить оригинал по изображению  $F(p) = 2 \frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p(p-2)}$ .

**Ответ:**

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ e^{2(t-1)} - 1, & 1 < t < 2, \\ e^{2(t-1)} - e^{2(t-2)}, & t \geq 2. \end{cases}$$

**Задача 36.8.** Докажите теорему 35.14, вычисляя функции-оригиналы через их изображения.

## 37. Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Преобразование Лапласа является достаточно удобным средством для решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad (37.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (37.2)$$

Здесь  $x(t)$  – неизвестная функция,  $f(t)$  – заданная *функция-оригинал*,  $a_0, \dots, a_n, x_0, \dots, x_{n-1}$  – заданные постоянные и  $a_n \neq 0$ . В дальнейшем нас будет интересовать решение задачи Коши (37.1) – (37.2) при  $t \geq 0$ .

**Замечание 37.1.** Поскольку значения функции  $f(t)$  при  $t \leq 0$  никак не влияют на решение задачи Коши (37.1) – (37.2) при  $t \geq 0$ , то всегда можно положить  $f(t) = 0$  при  $t \leq 0$ .

Опишем основную идею *операционного метода* решения задачи Коши вида (37.1) – (37.2). Решение строится в два шага.

- (1) Вводим обозначения  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$  и применяем преобразование Лапласа к уравнению (37.1). В результате, используя теорему о дифференцировании оригинала 35.7 на стр. 119, получим уравнение на изображение  $X(p)$

$$\begin{aligned} & (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p) = \\ & = F(p) + x_0 (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1) + \dots + x_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, найдем изображение  $X(p)$ .

- (2) Применяя формулу обращения Меллина, см. теорему 36.1 на стр. 121, к изображению  $X(p)$ , найдем функцию-оригинал  $x(t)$ .
  - Полученная таким способом функция  $x(t)$  является решением задачи Коши (37.1) – (37.2) при  $t \geq 0$ .

**Пример 37.2.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0. \quad (37.3)$$

**Решение.** Вычисляем преобразование Лапласа функции  $e^{-t}$ , см. таблицу изображений,

$$e^{-t} \doteq \frac{1}{p+1}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (37.3), получим

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p+1} \quad \Longleftrightarrow \quad X(p) = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Функция  $X(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > -1$ . Воспользуемся формулой Меллина, полагая  $s = 0 > -1$ ,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} dp.$$

Достаточно рассмотреть случай  $t \geq 0$ . Функция  $e^{pt}$  экспоненциально убывает в левой полуплоскости, и согласно теореме (36.2) контур интегрирования нужно замыкать там же. Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} dp = \operatorname{res}_{p=-1} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} = \left. \frac{d}{dp} e^{pt} \right|_{p=-1} = te^{-t}.$$

**Ответ:**  $x(t) = te^{-t}$ .

**Пример 37.3.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x' - 2x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t, \end{cases} \quad x(0) = 2. \quad (37.4)$$

**Решение.** Вычисляем преобразование Лапласа

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases} \doteq \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (37.4), получим

$$pX(p) - x(0) - 2X(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p} \iff X(p) = \frac{1 + 2p - e^{-p}}{p(p-2)}. \quad (37.5)$$

Функция  $X(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > 2$ . Воспользуемся формулой Меллина, полагая  $s = 3 > 2$ ,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{1 + 2p - e^{-p}}{p(p-2)} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} dp. \quad (37.6)$$

Вычислим первый интеграл, стоящий в правой части (37.6). Функция  $e^{pt}$  экспоненциально убывает в левой полуплоскости при  $t > 0$  и контур интегрирования необходимо замыкать там же. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} dp = \operatorname{res}_{p=0} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} + \operatorname{res}_{p=2} \frac{1 + 2p}{p(p-2)} e^{pt} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{2t}.$$

Вычислим второй интеграл, стоящий в правой части (37.6). Функция  $e^{p(t-1)}$  экспоненциально убывает в правой полуплоскости при  $0 \leq t < 1$  и контур интегрирования необходимо замыкать там же

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} dp = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 1.$$

Функция  $e^{p(t-1)}$  экспоненциально убывает в левой полуплоскости при  $t > 1$  и контур интегрирования нужно замыкать там же

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} dp = \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} + \operatorname{res}_{p=2} \frac{e^{p(t-1)}}{p(p-2)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2(t-1)} \quad \text{при} \quad t \geq 1.$$

Окончательно, собирая полученные выражения вместе, получим

$$x(t) = \frac{5e^{2t} - 1}{2} + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{e^{2(t-1)} - 1}{2}, & 1 \leq t. \end{cases} \quad \square$$

**Ответ:**

$$x(t) = \frac{5e^{2t} - 1}{2} + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{e^{2(t-1)} - 1}{2}, & 1 \leq t. \end{cases}$$

**Пример 37.4.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x'' - 2x' + x = 6te^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \quad (37.7)$$

**Решение.** Вычисляем преобразование Лапласа функции  $te^t$ , см. таблицу изображений,

$$6te^t \doteq \frac{6}{(p-1)^2}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (37.7), получим

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) - 2pX(p) + 2x(0) + X(p) = \frac{6}{(p-1)^2},$$

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{6}{(p-1)^4}. \quad (37.8)$$

Функция  $X(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > 1$ . Воспользуемся формулой Меллина, полагая  $s = 2 > 1$ ,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{6e^{pt}}{(p-1)^4} dp.$$

Контур интегрирования нужно замыкать в левой полуплоскости при  $t \geq 0$ . Отсюда

$$x(t) = \operatorname{res}_{p=1} \frac{e^{pt}}{(p-1)^2} + \operatorname{res}_{p=1} \frac{6e^{pt}}{(p-1)^4} = te^t + t^3 e^t. \quad \square$$

**Ответ:**  $x(t) = te^t + t^3 e^t$ .

**Теорема 37.5.** Пусть  $g(t)$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = 1, \\ g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (37.9)$$

Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \\ x(0) = x'(0) = \dots = x_{n-1} = 0, \end{cases} \quad (37.10)$$

может быть выражено формулой

$$x(t) = (f * g')(t) = \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau.$$

**Пример 37.6.** Доказать теорему 37.5.

**Решение.** Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (37.9) и (37.10), получим

$$G(p)E(p) = \frac{1}{p}, \quad X(p)E(p) = F(p),$$

где  $g(t) \doteq G(p)$ ,  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$  и  $E(p)$  – некоторый полином. Отсюда найдем изображение  $X(p)$

$$X(p) = pF(p)G(p).$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться интегралом Дюамеля (пример 35.13 на стр. 119) и учесть, что  $g(0) = 0$ .  $\square$

**Пример 37.7.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = A. \quad (37.11)$$

**Решение.** Решение задачи (37.11) удобно искать в виде

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (37.12)$$

где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – решения следующих задач Коши

$$x_1'' + x_1 = f(t), \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad (37.13)$$

$$x_2'' + x_2 = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = A. \quad (37.14)$$

Для решения задачи (37.13), найдем решение вспомогательной задачи

$$g'' + g = 1, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Используя операционный метод, получим

$$g(t) = 1 - \cos t.$$

Теперь из теоремы 37.5 следует, что

$$x_1(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau. \quad (37.15)$$

Используя операционный метод для решения задачи (37.14), получим

$$x_2(t) = A \sin t. \quad (37.16)$$

Наконец, подставляя выражения (37.15) и (37.16) в формулу (37.12), найдем решение исходной задачи Коши

$$x(t) = A \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

**Ответ:**  $x(t) = A \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$ .

**Пример 37.8.** Найти решение задачи Коши для системы уравнений при  $t \geq 0$  операционным методом

$$\begin{cases} x'' + y = 0, \\ y'' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = 2. \quad (37.17)$$

**Решение.** Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений (37.17), получим

$$\begin{cases} p^2 X(p) + Y(p) = 2, \\ p^2 Y(p) + X(p) = 0. \end{cases} \quad (37.18)$$

Из системы уравнений (37.18) найдем изображения  $X(p)$  и  $Y(p)$

$$X(p) = \frac{2p^2}{p^4 - 1}, \quad Y(p) = -\frac{2}{p^4 - 1}.$$

Используя формулу Меллина, найдем оригиналы  $x(t)$  и  $y(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{2p^2}{p^4 - 1} e^{pt} dp = \sin t + \operatorname{sh} t,$$

$$y(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{2}{p^4 - 1} e^{pt} dp = \sin t - \operatorname{sh} t.$$

**Ответ:**  $x(t) = \sin t + \operatorname{sh} t$ ,  $y(t) = \sin t - \operatorname{sh} t$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 37.9.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x' = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ 4t, & 2 \leq t, \end{cases} \quad x(0) = 1.$$

**Ответ:**

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ 2t^2 - 7, & 2 \leq t. \end{cases}$$

**Задача 37.10.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

**Ответ:**  $x(t) = e^{2t} - te^t$ .

**Задача 37.11.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x'' + x = 2 \cos t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

**Ответ:**  $x(t) = \cos t + t \sin t$ .

**Задача 37.12.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x' + x = f(t), \quad x(0) = A.$$

**Ответ:**  $g(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $x(t) = Ae^{-t} + \int_0^t f(\tau)e^{\tau-t} d\tau$ .

**Задача 37.13.** Найти решение задачи Коши при  $t \geq 0$  операционным методом

$$x'' + 2x' + x = f(t), \quad x(0) = A, \quad x'(0) = B.$$

**Ответ:**  $g(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$ ,  $x(t) = A(e^{-t} + te^{-t}) + Bte^{-t} + \int_0^t f(\tau)(t - \tau)e^{\tau-t} d\tau$ .

**Задача 37.14.** Найти решение задачи Коши для системы уравнений при  $t \geq 0$  операционным методом

$$\begin{cases} x'' - 2y' = 0, \\ y'' - y + x' = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Ответ:**  $x(t) = 2 \sin t$ ,  $y(t) = \cos t$ .

### 38. 8-ая контрольная работа (задача: 14; 15 минут).

**Комментарии к задаче 14.** Студент должен уметь применять преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению, уметь решать задачи со скачками в «правой» части и понимать как их наличие сказывается на применении формулы Меллина. Не нужно давать сложные вычислительные задачи.

#### Вариант контрольной работы №8.

**Задача 14.** Найти решение задачи Коши

$$x' + x = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad x(0) = 1,$$

при  $t \geq 0$  операционным методом.

**Ответ:**

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ e^{1-t}, & t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

#### Вариант контрольной работы №8.

**Задача 14.** Найти решение задачи Коши

$$x'' + 3x' + 2x = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = e,$$

при  $t \geq 0$  операционным методом.

**Ответ:**

$$x(t) = \begin{cases} e(e^{-t} - e^{-2t}), & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{e^2}{2} - e\right)e^{-2t}, & t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

### 39. *O*-символика.

**Определение 39.1.**

- *Запись*

$$f(\lambda) = O(g(\lambda)) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0$$

означает, что существуют постоянная  $C$  и окрестность  $V$  точки  $\lambda_0$  такие, что

$$|f(\lambda)| \leq C|g(\lambda)| \quad \text{при} \quad \lambda \in V.$$

- *Запись*

$$f(\lambda) = o(g(\lambda)) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0$$

означает, что существует функция  $\alpha$  такая, что

$$f(\lambda) = \alpha(\lambda)g(\lambda), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \alpha(\lambda) = 0.$$

## 40. Асимптотика интегралов типа Лапласа.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx, \quad (40.1)$$

где  $[a, b]$  – конечный интервал на вещественной оси, функции  $f$  и  $S$  принадлежат классу  $C^\infty[a, b]$ ,  $S$  – вещественная функция и  $\lambda$  – вещественный параметр.

Мы будем интересоваться асимптотическим поведением интеграла (40.1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Из очевидной оценки

$$\left| \int_{\Delta} f(x) e^{\lambda S(x)} dx \right| \leq C e^{M\lambda}, \quad M = \max_{x \in \Delta} S(x), \quad \lambda > 0,$$

следует, что основной вклад в асимптотику интеграла (40.1) дает окрестность той точки (быть может нескольких точек), в которой функция  $S$  принимает свое наибольшее значение. Вклад в асимптотику от окрестности точки  $c$  мы будем обозначать  $F_c(\lambda)$ .

**Теорема 40.1.** Пусть функции  $f$  и  $S$  принадлежат классу  $C^\infty[a, b]$ ,  $S$  – вещественная функция и  $\lambda$  – вещественный параметр. Пусть функция  $S$  принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[a, b]$  в точках  $c_1, \dots, c_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

- Пусть  $c_k = a$  и  $S'(a) < 0$ . Тогда

$$F_{c_k}(\lambda) = -e^{\lambda S(a)} \frac{1}{\lambda S'(a)} \left( f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (40.2)$$

- Пусть  $c_k = b$  и  $S'(b) > 0$ . Тогда

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{\lambda S(b)} \frac{1}{\lambda S'(b)} \left( f(b) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (40.3)$$

- Пусть  $S'(c_k) = 0$  и  $S''(c_k) < 0$ . Тогда, если  $c_k \neq a$  и  $c_k \neq b$ , то

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{\lambda S(c_k)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c_k)|}} \left( f(c_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (40.4)$$

если  $c_k = a$  или  $c_k = b$ , то

$$F_{c_k}(\lambda) = \frac{1}{2} e^{\lambda S(c_k)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c_k)|}} \left( f(c_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (40.5)$$

- Асимптотическое поведение интеграла (40.1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  может быть описано формулой

$$\int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx = \sum_{k=1}^n F_{c_k}(\lambda).$$

**Пример 40.2.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^1 (1+x) e^{\lambda x^2} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Функция  $S(x) = x^2$  достигает своего максимума на отрезке  $[0, 1]$  в единственной точке  $c = 1$ . Вклад от этой точки описывается формулой (40.3)

$$F_{c=1}(\lambda) = e^\lambda \frac{1}{2\lambda} \left( 2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = e^\lambda \frac{1}{\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \square$$

**Ответ:**  $\int_0^1 (1+x)e^{\lambda x^2} dx = e^\lambda \frac{1}{\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Пример 40.3.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^1 (1+x)e^{\lambda \cos(2x)} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Функция  $S(x) = \cos(2x)$  достигает своего максимума на отрезке  $[-1, 1]$  в единственной точке  $c = 0$ . Вклад от этой точки описывается формулой (40.4)

$$S(0) = 1, \quad S'(0) = -2 \sin(2x)|_{x=0} = 0, \quad S''(0) = -4 \cos(2x)|_{x=0} = -4,$$

$$F_{c=0}(\lambda) = e^\lambda \sqrt{\frac{2\pi}{4\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = e^\lambda \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \square$$

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 (1+x)e^{\lambda \cos(2x)} dx = e^\lambda \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Пример 40.4.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-3}^4 (4+x^2)e^{\lambda(x^3-12x)} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Функция  $S(x) = x^3 - 12x$  достигает своего максимума на отрезке  $[-3, 4]$  в двух точках  $c_1 = -2$  и  $c_2 = 4$ . Вклад от точки  $c_1 = -2$  описывается формулой (40.4)

$$S(-2) = 16, \quad S'(-2) = (3x^2 - 12)|_{x=-2} = 0, \quad S''(-2) = 6x|_{x=-2} = -12,$$

$$F_{c_1=-2}(\lambda) = e^{16\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{12\lambda}} \left( 8 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = e^{16\lambda} \sqrt{\frac{32\pi}{3\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Вклад от точки  $c_2 = 4$  описывается формулой (40.3)

$$S(4) = 16, \quad S'(4) = (3x^2 - 12)|_{x=4} = 36,$$

$$F_{c_2=4}(\lambda) = e^{16\lambda} \frac{1}{36\lambda} \left( 20 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = e^{16\lambda} \frac{5}{9\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \square$$

**Ответ:**  $\int_{-3}^4 (4+x^2)e^{\lambda(x^3-12x)} dx = e^{16\lambda} \left( \sqrt{\frac{32\pi}{3\lambda}} + \frac{5}{9\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Пример 40.5.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-3}^4 (4+x^2)e^{\lambda(x^3-12x)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (40.6)$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** В задаче предлагается искать асимптотику интеграла при больших отрицательных значениях параметра  $\lambda$ . Поэтому удобно переписать задачу (40.6) в виде

$$\int_{-3}^4 (4+x^2)e^{|\lambda|(12x-x^3)} dx \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow +\infty.$$

Функция  $S(x) = 12x - x^3$  достигает своего максимума на отрезке  $[-2, 4]$  в одной точке  $c = 2$ . Вклад от этой точки описывается формулой (40.4)

$$S(2) = 16, \quad S'(2) = (12 - 3x^2)|_{x=2} = 0, \quad S''(2) = -6x|_{x=2} = -12,$$

$$F_{c=2}(\lambda) = e^{16|\lambda|} \sqrt{\frac{2\pi}{12|\lambda|}} \left( 8 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) = e^{16|\lambda|} \sqrt{\frac{32\pi}{3|\lambda|}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_{-3}^4 (4+x^2)e^{\lambda(x^3-12x)} dx = e^{16|\lambda|} \sqrt{\frac{32\pi}{3|\lambda|}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow -\infty.$

**Домашнее задание:**

**Задача 40.6.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^1 (2+x)e^{\lambda x^2} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 (2+x)e^{\lambda x^2} dx = e^{\lambda \frac{2}{\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty;$   $\int_{-1}^1 (2+x)e^{\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{4\pi}{|\lambda|}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow -\infty.$

**Задача 40.7.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^4 (2+\cos(x))e^{\lambda \cos 2x} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^4 (2+\cos(x))e^{\lambda \cos 2x} dx = e^{\lambda} \sqrt{\frac{8\pi}{\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$

**Задача 40.8.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^3 (3-2\cos(x))e^{3\lambda(2\sin x-x)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^3 (3 - 2 \cos(x)) e^{3\lambda(2 \sin x - x)} dx = e^{(3\sqrt{3}-\pi)\lambda} \sqrt{\frac{8\pi}{3\sqrt{3}\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 40.9.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^3 (1 + 2x) e^{\lambda(x^3 - 5x^2 + 7x)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^3 (1 + 2x) e^{\lambda(x^3 - 5x^2 + 7x)} dx = e^{3\lambda} \left(3\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + \frac{7}{4\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 40.10.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-2}^2 (2 + x) e^{\lambda(x^3 - 3x - 1)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-2}^2 (2 + x) e^{\lambda(x^3 - 3x - 1)} dx = e^{\lambda} \left(\sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} + \frac{4}{9\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 40.11.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{\pi} \cos x e^{\lambda(1 - x \sin x)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^{\pi} \cos x e^{\lambda(1 - x \sin x)} dx = e^{\lambda} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 40.12.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^2 (2 + x) e^{\lambda(x^4 - 4x^2)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^2 (2 + x) e^{\lambda(x^4 - 4x^2)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{1}{4\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 40.13.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) e^{-\lambda \sin x \sin(2x)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) e^{-\lambda \sin x \sin(2x)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 40.14.** *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} e^{\lambda(\ln x + \arccos x)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

*Выписать первый член асимптотического ряда и указать порядок поправки.*

**Ответ:**

## 41. Асимптотика интегралов типа Фурье.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx, \quad (41.1)$$

где  $[a, b]$  – конечный интервал на вещественной оси, функции  $f$  и  $S$  принадлежат классу  $C^\infty[a, b]$ ,  $S$  – вещественная функция и  $\lambda$  – вещественный параметр.

Мы будем интересоваться асимптотическим поведением интеграла (41.1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Определение 41.1.** *Стационарной точкой функции  $S$  называется любая точка  $c \in [a, b]$  такая, что  $S'(c) = 0$ .*

В отличие от интеграла вида (40.1), вклад в асимптотику интеграла (41.1) дают все стационарные точки функции  $S$  и концы промежутка интегрирования  $a$  и  $b$ . Вклад в асимптотику от окрестности точки  $c$  мы будем обозначать  $F_c(\lambda)$ .

**Теорема 41.2.** *Пусть функции  $f$  и  $S$  принадлежат классу  $C^\infty[a, b]$ ,  $S$  – вещественная функция и  $\lambda$  – вещественный параметр. Пусть  $c_1, \dots, c_n$  – стационарные точки функции  $S$ . Тогда справедливы следующие утверждения.*

- Пусть  $S'(a) \neq 0$ . Тогда вклад от нижнего предела интегрирования  $a$  выражается формулой

$$F_a(\lambda) = -e^{i\lambda S(a)} \frac{1}{i\lambda S'(a)} \left( f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (41.2)$$

- Пусть  $S'(b) \neq 0$ . Тогда вклад от верхнего предела интегрирования  $b$  выражается формулой

$$F_b(\lambda) = e^{i\lambda S(b)} \frac{1}{i\lambda S'(b)} \left( f(b) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (41.3)$$

- Пусть  $S''(c_k) \neq 0$ . Тогда, если  $c_k \neq a$  и  $c_k \neq b$ , то

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{i\lambda S(c_k) + i\frac{\pi}{4} \text{sign}(S''(c_k))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c_k)|}} \left( f(c_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (41.4)$$

если  $c_k = a$  или  $c_k = b$ , то

$$F_{c_k}(\lambda) = \frac{1}{2} e^{i\lambda S(c_k) + i\frac{\pi}{4} \text{sign}(S''(c_k))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c_k)|}} \left( f(c_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (41.5)$$

- Асимптотическое поведение интеграла (41.1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  может быть описано формулой

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx = F_a(\lambda) + F_b(\lambda) + \sum_{c_k \neq a, b} F_{c_k}(\lambda).$$

**Пример 41.3.** *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int_1^2 (1+x)e^{i\lambda x^2} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

*Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.*

**Решение.** Функция  $S(x) = x^2$  не имеет стационарных точек на отрезке  $[1, 2]$ . Вклад от точки  $a = 1$  описывается формулой (41.2)

$$F_{a=1}(\lambda) = -e^{i\lambda} \frac{1}{2i\lambda} \left( 2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = -e^{i\lambda} \frac{1}{i\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Вклад от точки  $b = 2$  описывается формулой (41.3)

$$F_{b=2}(\lambda) = e^{4i\lambda} \frac{1}{4i\lambda} \left( 3 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = e^{4i\lambda} \frac{3}{4i\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_1^2 (1+x) e^{i\lambda x^2} dx = e^{4i\lambda} \frac{3}{4i\lambda} - e^{i\lambda} \frac{1}{i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$

**Пример 41.4.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{i\lambda \sin(2x)} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Функция  $S(x) = \sin(2x)$  имеет одну стационарную точку  $c = \frac{\pi}{4}$ . Вклад от этой точки описывается формулой (41.4)

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos(2x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0, \quad S''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin(2x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = -4,$$

$$F_{c=\frac{\pi}{4}}(\lambda) = e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{4\lambda}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Вклад от точки  $a = 0$  описывается формулой (41.2)

$$F_{a=0}(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} \left( 0 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Вклад от точки  $b = \frac{\pi}{2}$  описывается формулой (41.3)

$$F_{b=\frac{\pi}{2}}(\lambda) = \frac{1}{(-2)i\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = -\frac{1}{2i\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{i\lambda \sin(2x)} dx = e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}} - \frac{1}{2i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$

**Пример 41.5.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^2 (2-x) \sin(\lambda(x^3 - 3x)) dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (41.6)$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Для того, чтобы воспользоваться теоремой 41.2 перепишем интеграл (41.6) в виде

$$\int_0^2 (2-x) \sin(\lambda(x^3 - 3x)) dx = \operatorname{Im} \left( \int_0^2 (2-x) e^{i\lambda(x^3 - 3x)} dx \right). \quad (41.7)$$

Асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^2 (2-x)e^{i\lambda(x^3-3x)} dx$$

описывается теоремой 41.2. Функция  $S(x) = x^3 - 3x$  имеет одну стационарную точку  $c = 1$ . Вклад от этой точки описывается формулой (41.4)

$$S(1) = -2, \quad S'(1) = (3x^2 - 3)|_{x=1} = 0, \quad S''(1) = 6x|_{x=1} = 6,$$

$$F_{c=1}(\lambda) = e^{-2i\lambda+i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Вклад от точки  $a = 0$  описывается формулой (41.2)

$$F_{a=0}(\lambda) = \frac{1}{3i\lambda} \left(2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{2}{3i\lambda} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Вклад от точки  $b = 2$  описывается формулой (41.3)

$$F_{b=2}(\lambda) = e^{2i\lambda} \frac{1}{9i\lambda} \left(0 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

В итоге получаем, что

$$\int_0^2 (2-x)e^{i\lambda(x^3-3x)} dx = e^{-2i\lambda+i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} + \frac{2}{3i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (41.8)$$

Подставляя асимптотику (41.8) в формулу (41.7), найдем

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2-x) \sin(\lambda(x^3-3x)) dx &= \operatorname{Im} \left( e^{-2i\lambda+i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} + \frac{2}{3i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right) = \\ &= -\sin\left(2\lambda - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} - \frac{2}{3\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\int_0^2 (2-x) \sin(\lambda(x^3-3x)) dx = -\sin\left(2\lambda - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} - \frac{2}{3\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$

**Домашнее задание:**

**Задача 41.6.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 2)e^{4i\lambda x} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-2}^2 (x^2 - 2)e^{4i\lambda x} dx = \frac{\sin(8\lambda)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$

**Задача 41.7.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^1 (1+x) e^{i\lambda x^2} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 (1+x) e^{i\lambda x^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 41.8.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^1 (1+x) \sin(\lambda(x+x^3)) dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^1 (1+x) \sin(\lambda(x+x^3)) dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \cos(2\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 41.9.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^1 (1-x) \cos(\lambda(x^2+2x)) dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 (1-x) \cos(\lambda(x^2+2x)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 41.10.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(\lambda(\cos x + x \sin x)) dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(\lambda(\cos x + x \sin x)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 41.11.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos(\lambda(x+2\cos x)) dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos(\lambda(x+2\cos x)) dx = \sqrt{\frac{\pi\sqrt{3}}{\lambda}} \cos\left(\lambda\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

## 42. Нетривиальные случаи поиска асимптотического поведения интегралов.

**Пример 42.1.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}-\lambda x} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (42.1)$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Непосредственное применение теоремы 40.1 к интегралу (42.1) приводит к следующему результату. Функция  $S(x) = -x$  на интервале  $[0, +\infty)$  принимает наибольшее значение в точке  $c = 0$ . Функция  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  в точке  $c = 0$  обращается в ноль. Отсюда

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}-\lambda x} dx = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, мы смогли лишь получить *оценку сверху* для интеграла (42.1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Основная проблема в данном примере заключается в том, что точка максимума функции  $S$  совпала с нулем (бесконечной кратности) функции  $f$ . Чтобы преодолеть эту трудность сделаем замену переменной  $x = \lambda^\alpha y$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}-\lambda x} dx = \lambda^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^{-\alpha} \frac{1}{y} - \lambda^{\alpha+1} y} dy.$$

Параметр  $\alpha$  выберем так, чтобы выражение под экспонентой можно было переписать в виде  $\mu(\lambda)S(y)$ . Отсюда находим, что

$$-\alpha = \alpha + 1 \iff \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}-\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{\lambda}(\frac{1}{y}+y)} dy. \quad (42.2)$$

Применим теорему 40.1 к интегралу

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu(\frac{1}{y}+y)} dy,$$

где  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Функция  $S(y) = -y - \frac{1}{y}$  принимает наибольшее значение в точке  $c = 1$ . Вклад от этой точки описывается формулой (40.4)

$$S(1) = -2, \quad S'(1) = \left(-1 + \frac{1}{y^2}\right)\Big|_{y=1} = 0, \quad S''(1) = -\frac{2}{y^3}\Big|_{y=1} = -2,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu(\frac{1}{y}+y)} dy = e^{-2\mu} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow +\infty. \quad (42.3)$$

Подставим (42.3) в (42.2), полагая  $\mu = \sqrt{\lambda}$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}-\lambda x} dx = e^{-2\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{3/4}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}-\lambda x} dx = e^{-2\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{3/4}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty.$

**Пример 42.2.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2+\lambda x} dx \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (42.4)$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Функция  $S(x) = x$  принимает наибольшее значение на  $+\infty$ , поэтому теорема 40.1 неприменима. При этом, однако, мы можем сразу сказать, что интеграл (42.4) растет сверхэкспоненциальным образом при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Сделаем замену переменной  $x = \lambda^\alpha y$  в интеграле (42.4)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2+\lambda x} dx = \lambda^\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^{2\alpha} y^2 + \lambda^{\alpha+1} y} dy.$$

Параметр  $\alpha$  выберем так, чтобы выражение под экспонентой можно было переписать в виде  $\mu(\lambda)S(y)$ . Отсюда находим, что

$$2\alpha = \alpha + 1 \iff \alpha = 1, \\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2+\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda^2(y-y^2)} dy. \quad (42.5)$$

Применим теорему 40.1 к интегралу

$$\int_0^{+\infty} e^{\mu(y-y^2)} dy.$$

Функция  $S(y) = y - y^2$  принимает наибольшее значение в точке  $c = \frac{1}{2}$ . Вклад от этой точки описывается формулой (40.4)

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad S'\left(\frac{1}{2}\right) = (1-2y)|_{y=\frac{1}{2}} = 0, \quad S''\left(\frac{1}{2}\right) = -2, \\ \int_0^{+\infty} e^{\mu(y-y^2)} dy = e^{\frac{1}{4}\mu} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \text{ при } \mu \rightarrow +\infty. \quad (42.6)$$

Подставим (42.6) в (42.5), полагая  $\mu = \lambda^2$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2+\lambda x} dx = e^{\frac{1}{4}\lambda^2} \sqrt{\pi} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**Ответ:**  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2+\lambda x} dx = e^{\frac{1}{4}\lambda^2} \sqrt{\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 42.3.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^3+3\lambda x} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_0^{+\infty} e^{-x^3+3\lambda x} dx = e^{2\lambda^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{3\sqrt{\lambda}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 42.4.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^1 e^{\lambda(|x|-x^2)} dx \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{-1}^1 e^{\lambda(|x|-x^2)} dx = e^{\frac{1}{4}\lambda} \sqrt{\frac{4\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

### 43. 9-ая контрольная работа (задачи: 15, 16; 30 минут).

#### Вариант контрольной работы №9.

**Задача 15.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^3 (1+2x)e^{-\lambda(x^3-3x^2+2)} dx$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**

$$\int_{-1}^3 (1+2x)e^{-\lambda(x^3-3x^2+2)} dx = e^{2\lambda} \left( 5\sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} - \frac{1}{9\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

**Задача 16.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(\lambda \operatorname{ch} x) dx$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Выписать старший член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(\lambda \operatorname{ch} x) dx = \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

#### Вариант контрольной работы №9.

**Задача 15.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{-1}^2 (1+2x^2)e^{\lambda(7x-x^7)} dx$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Выписать старший член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**

$$\int_{-1}^2 (1+2x^2)e^{\lambda(7x-x^7)} dx = e^{6\lambda} \sqrt{\frac{3\pi}{7\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

**Задача 16.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_0^2 x \sin(\lambda(x^3 - 3x)) dx$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**

$$\int_0^2 x \sin(\lambda(x^3 - 3x)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} \sin\left(-2\lambda + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{9\lambda} \cos(2\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

## 44. Метод перевала.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz, \quad (44.1)$$

где  $\gamma$  – контур интегрирования,  $f$ ,  $S$  – регулярные функции и  $\lambda$  – вещественный параметр.

Мы будем интересоваться асимптотическим поведением интеграла (44.1) при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Определение 44.1.** Точкой перевала функции  $S$  называется любая точка  $z_s \in \mathbb{C}$  такая, что

$$S'(z_s) = 0.$$

Регулярность функций  $f$  и  $S$  позволяет деформировать контур интегрирования  $\gamma$ , не изменяя при этом значение интеграла. Основная идея при вычислении асимптотики интеграла вида (44.1) заключается в том, чтобы подходящей деформацией контура интегрирования  $\gamma$  свести исходную задачу к вычислению асимптотического поведения интегралов типа Лапласа и Фурье. Оказывается, что всегда возможно так продеформировать контур  $\gamma$ , чтобы он состоял из участков кривых на которых выполнено одно из двух условий

$$\operatorname{Im}(S(z)) = \operatorname{Const} \quad \text{либо} \quad \operatorname{Re}(S(z)) = \operatorname{Const}. \quad (44.2)$$

Контур, удовлетворяющий этим условиям, а также условию

$$\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re}(S(z)) \leq \max_{z \in \Gamma} \operatorname{Re}(S(z)), \quad (44.3)$$

где  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий контур, начало и конец которого совпадают с началом и концом контура  $\gamma$ , мы будем называть *перевальным контуром*. Несложно понять, что на кривых, для которых выполнено условие  $\operatorname{Im}(S(z)) = \operatorname{Const}$ , интеграл (44.1) является интегралом типа Лапласа и для вычисления его асимптотического поведения можно использовать результаты теоремы 40.1. Вместе с тем, на кривых, для которых выполнено условие  $\operatorname{Re}(S(z)) = \operatorname{Const}$ , интеграл (44.1) является интегралом типа Фурье и для вычисления его асимптотического поведения можно использовать результаты теоремы 41.2. Наконец, отметим, что основной вклад в асимптотическое поведение интеграла (44.1) дают точки, доставляющие на перевальном контуре абсолютный максимум функции  $\operatorname{Re}(S(z))$ . Обсудим описанные идеи более подробно на следующих примерах.

**Пример 44.2.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda z^2} dz \quad (44.4)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-1 - 2i$  и  $1 + 2i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Рассмотрим функцию  $S(z) = z^2$  и построим линии, на которых  $S(z)$  сохраняет свою мнимую или вещественную части. Уравнение  $\operatorname{Im}(S(z)) = C$  можно переписать в виде

$$2xy = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (44.5)$$

Семейство кривых (44.5) при различных  $C$  схематически изображено на рисунке 64. Уравнение  $\operatorname{Re}(S(z)) = C$  можно переписать в виде

$$x^2 - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (44.6)$$

Семейство кривых (44.6) при различных  $C$  схематически изображено на рисунке 65. Проде-

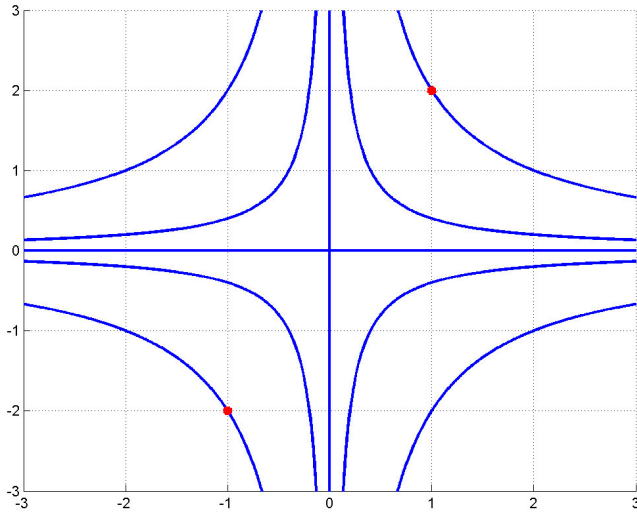


Рис. 64. Семейство кривых вида  $\text{Im}(S(z)) = C$  при  $C = 0, \pm 0.2, \pm 1$  выделено синим цветом.

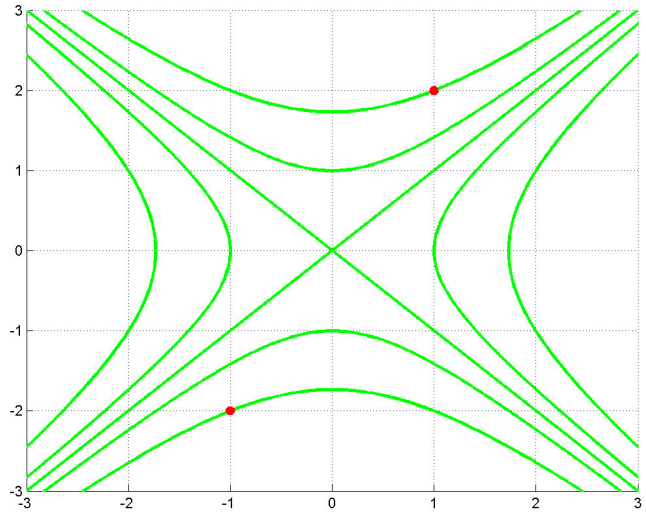


Рис. 65. Семейство кривых вида  $\text{Re}(S(z)) = C$  при  $C = 0, \pm 1, \pm 3$  выделено зеленым цветом.

формируем теперь контур  $\gamma$  так, чтобы он располагался на кривых вида  $\text{Im}(S(z)) = C$  или  $\text{Re}(S(z)) = C$ . Это можно сделать несколькими способами. На рисунках 66 и 67 приведены примеры перевальных контуров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . У функции  $S(z) = z^2$  есть одна точка перевала  $z_s = 0$ .

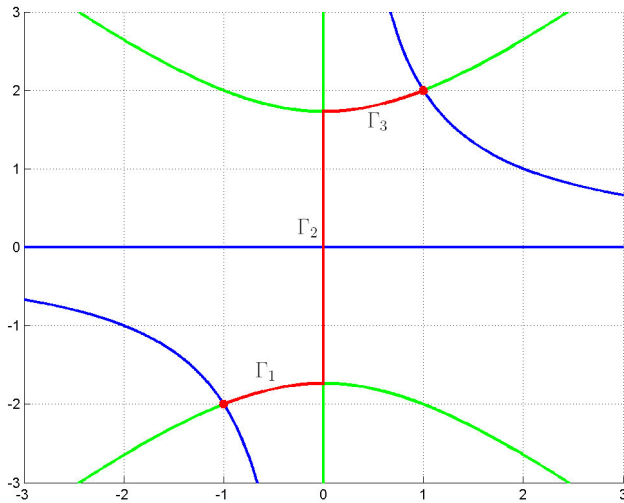


Рис. 66. Перевальный контур  $\gamma_1$  выделен красным цветом.

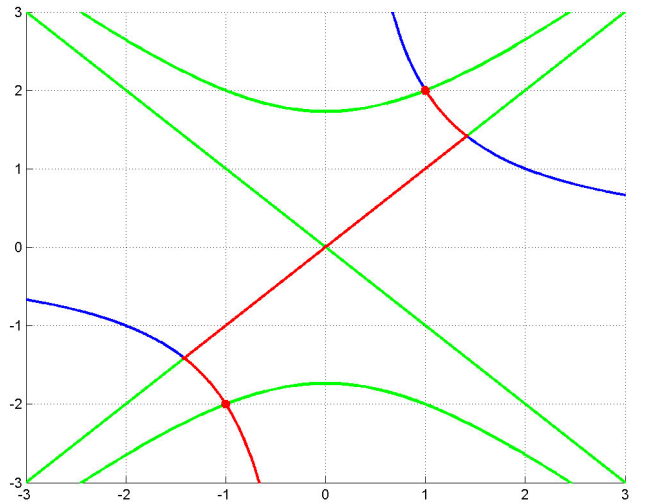


Рис. 67. Перевальный контур  $\gamma_2$  выделен красным цветом.

В этой точке пересекаются по две линии уровня функций  $\text{Im}(S(z))$  и  $\text{Re}(S(z)) = C$ . Заметим, что через каждую точку комплексной плоскости, не являющуюся точкой перевала, проходит ровно по одной линии уровня функций  $\text{Im}(S(z))$  и  $\text{Re}(S(z)) = C$ .

Выберем в качестве перевального контура  $\gamma_1$ , изображенный на рисунке 66. Введем следующие обозначения. Участок контура  $\gamma_1$  между точками  $-1 - 2i$  и  $-i\sqrt{3}$  обозначим через  $\Gamma_1$ ; между точками  $-i\sqrt{3}$  и  $i\sqrt{3}$  — через  $\Gamma_2$  и между точками  $i\sqrt{3}$  и  $1 + 2i$  — через  $\Gamma_3$ , см рисунок 66. Легко

видеть, что

$$\int_{\gamma} e^{\lambda z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{\lambda z^2} dz = \int_{\Gamma_1} e^{\lambda z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{\lambda z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{\lambda z^2} dz.$$

По аналогии с методом Лапласа (см. стр. 40.1), можно заключить, что максимальный вклад в асимптотическое поведение интегралов по контурам  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  дают окрестности точек, в которых  $\operatorname{Re}(S(z))$  принимает максимальное значение. Перед тем как приступить к подробным вычислениям, оценим вклады от интегралов по контурам  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ .

По построению на контурах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  функция  $S(z)$  сохраняет свою вещественную часть, откуда

$$\operatorname{Re}(S(z)) = \operatorname{Re}(S(-\sqrt{3})) = -3 \quad \text{при } z \in \Gamma_1,$$

$$\operatorname{Re}(S(z)) = \operatorname{Re}(S(\sqrt{3})) = -3 \quad \text{при } z \in \Gamma_3.$$

На контуре  $\Gamma_2$  функцию  $S(z)$  можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}(S(z)) = -y^2, \quad z = iy, \quad y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

Отсюда легко заключить, что функция  $\operatorname{Re}(S(z))$  достигает своего максимального значения в точке  $z = 0$ , причем  $\operatorname{Re}(S(0)) = 0$ . Таким образом, функция  $\operatorname{Re}(S(z))$  принимает свое максимальное значение на контуре  $\Gamma_2$ , который и дает основной вклад в асимптотическое поведение интеграла (44.4)

$$\int_{\gamma} e^{\lambda z^2} dz = \int_{\Gamma_2} e^{\lambda z^2} dz + O(e^{-3\lambda}). \quad (44.7)$$

Замена переменных  $z = iy$  сводит интеграл по  $\Gamma_2$  к интегралу типа Лапласа, асимптотическое поведение которого может быть найдено с помощью теоремы 40.1,

$$\int_{\Gamma_2} e^{\lambda z^2} dz = i \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} e^{-\lambda y^2} dy = i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad (44.8)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Собирая формулы (44.7) и (44.8) вместе, найдем асимптотическое поведение интеграла (44.4).  $\square$

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda z^2} dz = i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right).$

**Пример 44.3.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(2z^3 - 3z^2)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-3 + i$ ,  $3 - 2i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Решение.** Рассмотрим функцию  $S(z) = 2z^3 - 3z^2$  и построим линии, на которых  $S(z)$  сохраняет свою мнимую или вещественную части. Семейства кривых  $\operatorname{Im}(S(z)) = C$  и  $\operatorname{Re}(S(z)) = C$  при различных  $C$  схематически изображены на рисунке 68. Удобно также вдоль кривых  $\operatorname{Im}(S(z)) = C$  изобразить направления убывания функции  $\operatorname{Re}(S(z))$ , см. рисунок 69.

На рисунках 70 и 71 приведены примеры контуров, претендующих на роль перевальных. На обоих контурах выполняется условие вида (44.2). При этом легко видеть, что

$$\max_{z \in \gamma_1} \operatorname{Re}(S(z)) < \max_{z \in \gamma_2} \operatorname{Re}(S(z)).$$

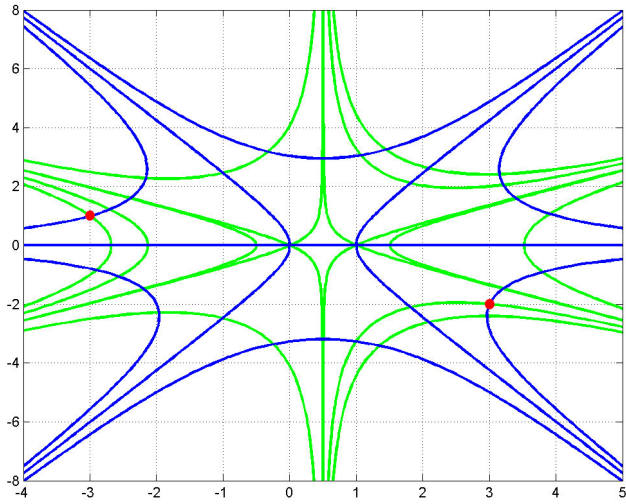


Рис. 68. Семейство кривых вида  $\text{Im}(S(z)) = C$  при  $C = -56, 0, 70$  выделено синим цветом; семейство кривых вида  $\text{Re}(S(z)) = C$  при  $C = -60, -33, -1, 0, 50$  выделено зеленым цветом.

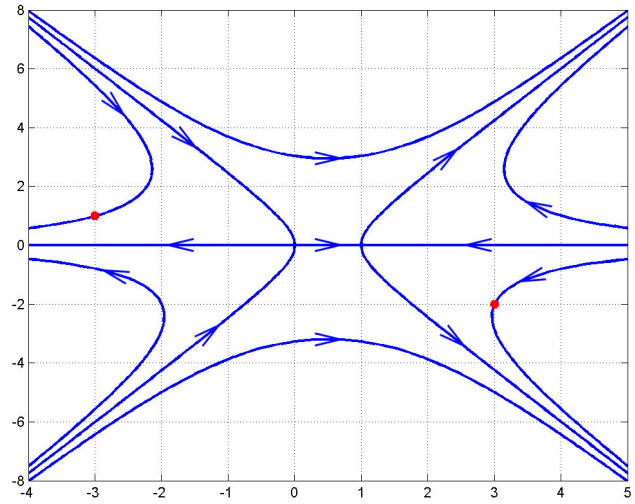


Рис. 69. Линии наискорейшего убывания для  $\text{Re}(S(z))$ , где  $S(z) = 2z^3 - 3z^2$ .

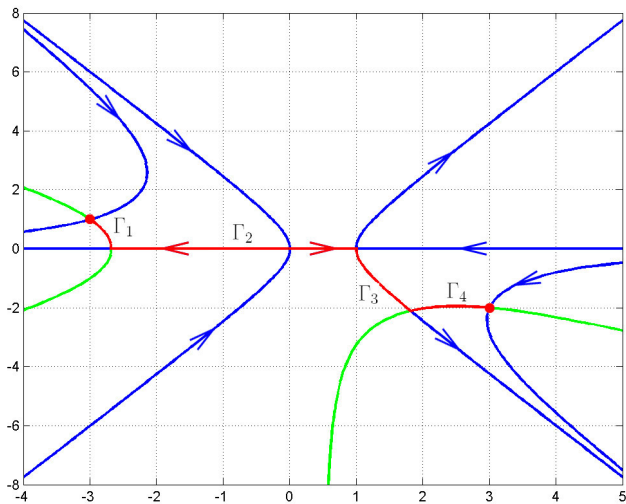


Рис. 70. Перевальный контур  $\gamma_1$  выделен красным цветом.

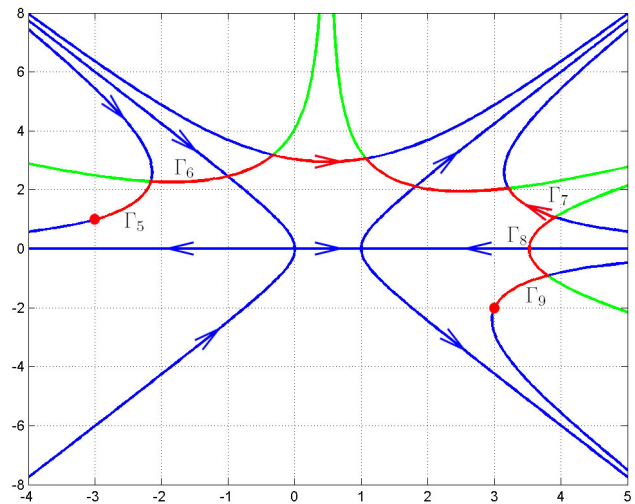


Рис. 71. Перевальный контур  $\gamma_2$  выделен красным цветом.

Другими словами, на контуре  $\gamma_2$ , изображенном на рисунке 71, не выполняется условие (44.3) и, следовательно,  $\gamma_2$  не является перевальным контуром. Таким образом, в качестве перевального контура следует взять контур  $\gamma_1$ . Отметим, что мы не приводим строгое обоснование того, что  $\gamma_1$  – перевальный контур. Вообще говоря, если данный контур позволяет получить содержательную асимптотику для исследуемого интеграла, то в этом доказательство уже нет необходимости.

Напомним, что основной вклад в асимптотическое поведение интеграла дают окрестности точек, в которых  $\text{Re}(S(z))$  принимает максимальное значение. Принимая во внимание рисунок 69,

легко заключить, что для перевального контура  $\gamma_1$  основной вклад дает участок  $\Gamma_2$  или, более точно, окрестность точки  $z = 0$ . Элементарные вычисления дают

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{\lambda(2z^3-3z^2)} dz &= \int_{\gamma_1} e^{\lambda(2z^3-3z^2)} dz = \sum_{n=1}^4 \int_{\Gamma_n} e^{\lambda(2z^3-3z^2)} dz = \\ &= \int_{\Gamma_2} e^{\lambda(2z^3-3z^2)} dz + O(e^{-\lambda}) = \int_{-2}^1 e^{\lambda(2x^3-3x^2)} dx + O(e^{-\lambda}) = \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \end{aligned}$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Здесь, при вычислении асимптотического поведения интеграла по контуру  $\Gamma_2$  мы учли, что основной вклад в асимптотику дает точка  $z = 0$  и воспользовались теоремой 40.1.  $\square$

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(2z^3-3z^2)} dz = \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Домашнее задание:**

**Задача 44.4.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(iz^2-6z)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-5i$  и  $2$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(iz^2-6z)} dz = (1+i)e^{9i\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} - \frac{1}{4\lambda} e^{-4i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$ .

**Задача 44.5.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(z^2-4iz)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $0$  и  $10i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(z^2-4iz)} dz = i\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{4\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)$ .

**Задача 44.6.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(z^2-2z)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $1-i$  и  $2+i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(z^2-2z)} dz = i\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 44.7.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(z^2+4iz)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-2$  и  $1 - 4i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(z^2+4iz)} dz = -i\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{4\lambda} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 44.8.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(-iz^2+2iz)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $10 - i$  и  $10i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(-iz^2+2iz)} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\lambda + \frac{3\pi}{4}i} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Задача 44.9.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda z \sin z} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-2i$  и  $3$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda z \sin z} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda(2 \cos z_s - z_s \sin z_s)}} e^{\lambda z_s \sin z_s} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $z_s$  – решение уравнения  $\operatorname{tg} z_s = z_s$ ,  $z_s \approx 2.03$ ; перевальный контур изображен на рисунке 72.

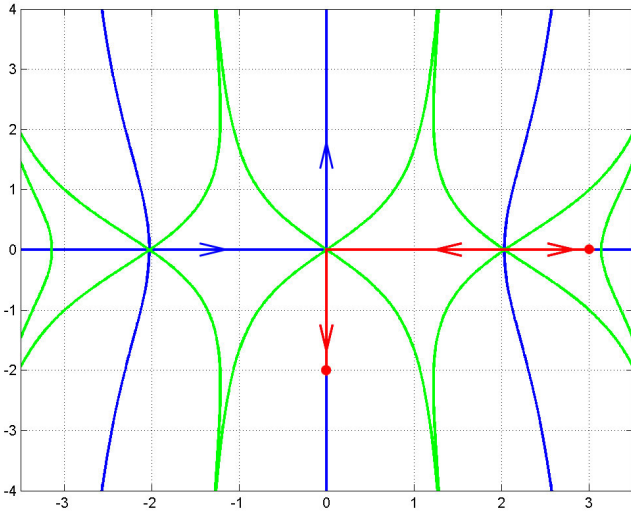


Рис. 72. Семейство кривых вида  $\operatorname{Im}(z \sin z) = C$  при  $C = 0$  выделено синим цветом; семейство кривых вида  $\operatorname{Re}(z \sin z) = C$  при  $C = 0, \pm z_s \sin z_s$ , где  $z_s \approx 2.03$  выделено зеленым цветом; стрелки указывают направление убывания функции  $\operatorname{Re}(z \sin z)$ ; перевальный контур выделен красным цветом.

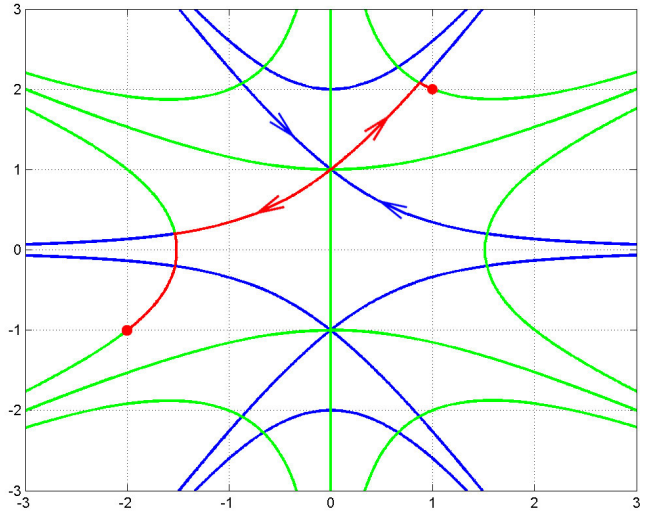


Рис. 73. Семейство кривых вида  $\operatorname{Im}(z^3 + 3z) = C$  при  $C = \pm 2$  выделено синим цветом; семейство кривых вида  $\operatorname{Re}(z^3 + 3z) = C$  при  $C = 0, \pm 8$  выделено зеленым цветом; стрелки указывают направление убывания функции  $\operatorname{Re}(z^3 + 3z)$ ; перевальный контур выделен красным цветом.

**Задача 44.10.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} e^{\lambda(z^3+3z)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-2 - i$  и  $1 + 2i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} e^{\lambda(z^3+3z)} dz = \sqrt{\frac{\pi}{6\lambda}} e^{2i\lambda + i\frac{\pi}{4}} (1 + O(\frac{1}{\lambda}))$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ; перевальный контур изображен на рисунке 73.

**Задача 44.11.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} \cos(2z) e^{\lambda \sin z} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $-\frac{\pi}{2} - i$  и  $\pi + 2i$ . Выписать первый член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \cos(2z) e^{\lambda \sin z} dz = -\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{\lambda} (1 + O(\frac{1}{\lambda}))$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ; перевальный контур изображен на рисунке 74.

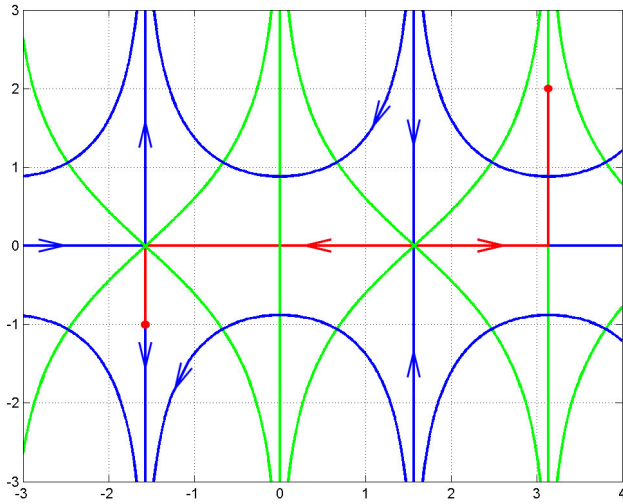


Рис. 74. Семейство кривых вида  $\text{Im}(\sin z) = C$  при  $C = 0, \pm 1$  выделено синим цветом; семейство кривых вида  $\text{Re}(\sin z) = C$  при  $C = \pm 1, 0$  выделено зеленым цветом; стрелки указывают направление убывания функции  $\text{Re}(\sin z)$ ; перевальный контур выделен красным цветом.

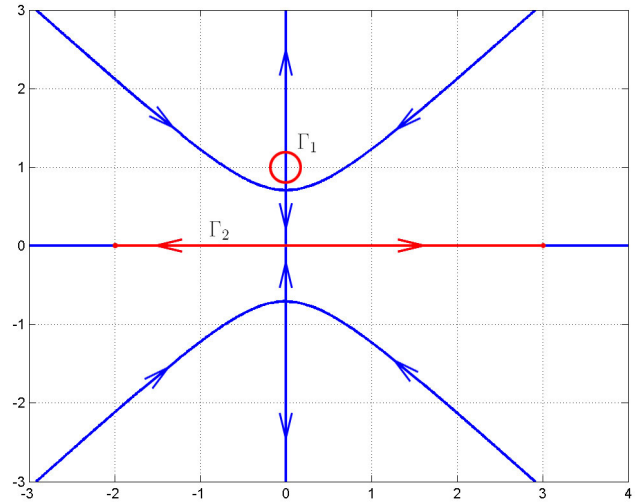


Рис. 75. Семейство кривых вида  $\text{Im}(z^4 + z^2) = C$  при  $C = 0$  выделено синим цветом; стрелки указывают направление убывания функции  $\text{Re}(-z^4 - z^2)$ ; перевальный контур выделен красным цветом.

**Задача 44.12.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} e^{-\lambda(z^4+z^2+1)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур последовательно соединяющий точки  $-2$ ,  $2i$  и  $3$ . Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**  $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} e^{-\lambda(z^4+z^2+1)} dz = e^{-\lambda} \left( -\pi + \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ ; перевальный контур изображен на рисунке 75; контур  $\Gamma_1$  обходится против часовой стрелки и интеграл по нему вычисляется по вычетам; асимптотика интеграла по контуру  $\Gamma_2$  вычисляется с помощью теоремы 40.1.

## 45. 10-ая контрольная работа (задача: 17; 20 минут).

**Комментарии к задаче 17.** На контрольной нужно давать задачу с функцией  $S$  имеющей вид квадратного полинома. Студент должен уметь найти точку перевала, нарисовать линию наискорейшего спуска и сопутствующие ей линии постоянства вещественной и мнимой частей функции  $S$ , нарисовать перевальный контур, подходящим поворотом свести задачу к методу Лапласа, найти старший член асимптотики и порядок поправки.

### Вариант контрольной работы №10.

**Задача 17.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} (z + 3) e^{\lambda(z^2 + 2iz)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $1 + i$  и  $1 - 4i$ . Выписать старший член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**

$$\int_{\gamma} (z + 3) e^{\lambda(z^2 + 2iz)} dz = -(1 + 3i)e^{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

### Вариант контрольной работы №10.

**Задача 17.** Найти асимптотическое поведение интеграла

$$\int_{\gamma} (z^2 + 2) e^{\lambda(iz^2 + 2z)} dz$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где  $\gamma$  – контур соединяющий точки  $i - 1$  и  $1 + 3i$ . Выписать старший член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

**Ответ:**

$$\int_{\gamma} (z^2 + 2) e^{\lambda(iz^2 + 2z)} dz = e^{i\lambda + i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$