Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 2 ноября 2020)

1,2,4,5,10-14,17,18 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении регулярной функции в ряд Тейлора. Используя эту теорему, указать наибольшую область сходимости ряда Тейлора для функции $\operatorname{th} z$ с центром в точке $z = 0$. (1.5 балла) Ответ: $|z| < \frac{\pi}{2}$

(2)Дать определение существенно особой точки. Доказать, что точка $z = 0$ является существенно особой точкой для функции $z \sin \dfrac{1}{z}$. (1.5 балла)

- Решите следующие задачи

(3) Для функции $f(z) = 2\sqrt{xy} + 3y + i\left(\dfrac{2y}{3}\sqrt{\dfrac{y}{x}} - 3x\right)$ найти множество, на котором эта функция дифференцируема. Вычислить ее производную на этом множестве. (2 балла) Ответ: $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = \sqrt{3}x\}$, $f' = 3^{\frac{1}{4}} - i(3^{-\frac{1}{4}} + 3)$

(4) Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=1} \left(z^2 \sin \dfrac{1}{z-1}\right)$. (2 балла) Ответ: $\frac{5}{6}$

(5) Вычислить интеграл $v.p. \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x-1)}$. (2 балла) Ответ: $\pi(\cos 1 - 1)$

- Выполнить следующее задание.

(6) В чем заключается геометрический смысл производной функции комплексной переменной? Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $f(z) = \sin z$ в точках $z = 0$ и $z = 1 + i$. (3 балла) Ответ: $(1, 0); (\sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}, -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{th} 1))$

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 2 ноября 2020)

1,2,4,5,10-14,17,18 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении регулярной функции в ряд Тейлора. Используя эту теорему, указать наибольшую область сходимости ряда Тейлора для функции $\dfrac{1}{\operatorname{ch} z}$ с центром в точке $z = 0$. (1.5 балла) Ответ: $|z| < \frac{\pi}{2}$

(2) Дать определение существенно особой точки. Доказать, что точка $z = 0$ является существенно особой точкой для функции $ze^{\frac{1}{z}}$. (1.5 балла)

- Решите следующие задачи

(3) Для функции $f(z) = 2\sqrt{xy} + y - i\left(\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{x}{y}} + x\right)$ найти множество, на котором эта функция дифференцируема. Вычислить ее производную на этом множестве. (2 балла) Ответ: $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = \sqrt{3}y\}$, $f' = 3^{-\frac{1}{4}} - i(3^{-\frac{1}{4}} + 1)$

(4) Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=-1} \left(z^2 \sin \dfrac{1}{z+1}\right)$. (2 балла) Ответ: $\frac{5}{6}$

(5) Вычислить интеграл $v.p. \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x+1)}$. (2 балла) Ответ: $\pi(1 - \cos 1)$

- Выполнить следующее задание.

(6) В чем заключается геометрический смысл производной функции комплексной переменной? Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $f(z) = e^z$ в точках $z = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$ и $z = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$. (3 балла) Ответ: $(2, \frac{\pi}{4}); (e^{-1}, -\frac{\pi}{2})$

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 2 ноября 2020)

20, 25, 26 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать условия Коши-Римана дифференцируемости функции. Найти все точки, где дифференцируема функция $f(z) = |z|^2$ и найти ее производную в этих точках. (1.5 балла) Ответ: $z = 0, f'(0) = 0$

(2) Написать интегральную формулу Коши. Используя эту формулу, вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|\zeta|=1} \frac{e^{\zeta} d\zeta}{\zeta - \frac{1}{2}}$, контур интегрирования обходится против часовой стрелки. (1.5 балла) Ответ: $2\pi i\sqrt{e}$

- Решите следующие задачи

(3) Выяснить, при каких значениях параметра A функция

$$u(x, y) = \cos(x - 2y)\,\mathrm{ch}(Ax + y)$$

является вещественной частью некоторой регулярной функции f. Для найденных параметров восстановить функцию f. (2 балла) Ответ: $A = 2, f = \cos(1 + 2i)z$

(4) Найти главную часть ряда Лорана функции $\dfrac{\mathrm{tg}^2 z}{e^z - e^{-\frac{\pi}{2}}}$ в окрестности точки $z = -\frac{\pi}{2}$. (2 балла) Ответ: $e^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{2\zeta^2} - \frac{7}{12\zeta}), \zeta = z + \frac{\pi}{2}$

(5) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 - 3ix - 2}$. (2 балла) Ответ: $i\pi(e^{-1} - e^{-2})$

- Выполнить следующее задание.

(6) Сформулировать определение равномерно сходящейся последовательности функций. Доказать, что на каждом замкнутом множестве, лежащем в круге $|z| < 1$, последовательность $\dfrac{1}{1 + z^n}$ равномерно сходится к функции $f(z) = 1$. (3 балла)

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 2 ноября 2020)

20, 25, 26 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать условия Коши-Римана дифференцируемости функции. Найти все точки, где дифференцируема функция $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ и найти ее производную в этих точках. (1.5 балла) Ответ: $z = 0, f'(0) = 0$

(2) Написать интегральную формулу Коши. Используя эту формулу, вычислить интеграл $\displaystyle\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^2 d\zeta}{\zeta - \frac{1}{3}}$, контур интегрирования обходится против часовой стрелки. (1.5 балла) Ответ: $\frac{2\pi i}{9}$

- Решите следующие задачи

(3) Выяснить, при каких значениях параметра A функция

$$u(x, y) = \sin(x - 2y)\,\mathrm{sh}(Ax + y)$$

является мнимой частью некоторой регулярной функции f. Для найденных параметров восстановить функцию f. (2 балла) Ответ: $A = 2, f = -\cos(1 + 2i)z$

(4) Найти главную часть ряда Лорана функции $\dfrac{\mathrm{tg}^2 z}{e^z - e^{\frac{\pi}{2}}}$ в окрестности точки $z = \frac{\pi}{2}$. (2 балла) Ответ: $e^{-\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{2\zeta^2} - \frac{7}{12\zeta}), \zeta = z - \frac{\pi}{2}$

(5) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 3ix - 2}$. (2 балла) Ответ: $\pi(e^{-2} - e^{-1})$

- Выполнить следующее задание.

(6) Сформулировать определение равномерно сходящейся последовательности функций. Доказать, что на каждом замкнутом множестве, лежащем в области $|z| > 1$, последовательность $\dfrac{1}{1 + z^n}$ равномерно сходится к функции $f(z) = 0$. (3 балла)

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 3 ноября 2020)

23,27 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение предела последовательности комплексных чисел. Сходится ли последовательность $\left(\arg \dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$? Почему? (1.5 балла) Ответ: нет

(2) Дать определение вычета в бесконечно удаленной точке. Найти $\operatorname*{res}_{z=\infty} \sin \frac{1}{z}$. (1.5 балла) Ответ: -1

- Решите следующие задачи

(3) Разложить функцию $\dfrac{z+1}{z^3-z^2}$ в ряд Лорана с центром в точке $z=i$ в области, содержащей точку $z=\dfrac{1}{2}$. Указать область сходимости ряда. (2 балла) Ответ: $\sum_0^\infty (\frac{-2(-i)^n+n(-i)^{n-1}}{\zeta^{n+1}} - \frac{2\zeta^n}{(1-i)^{n+1}}), 1<|\zeta|<\sqrt{2}, \zeta=z-i$

(4) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{4\cos 3x dx}{5-4\cos x}$. (2 балла) Ответ: $\frac{\pi}{3}$

(5) Вычислить интеграл $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2-5x+6}$. (2 балла) Ответ: $\pi(3\cos 3 - 2\cos 2)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение сопряженных гармонических функций. Пусть u и v – сопряженные гармонические функции. Доказать, что $e^{u^2-v^2}\cos 2uv$ и $e^{u^2-v^2}\sin 2uv$ также являются сопряженными гармоническими функциями. (3 балла)

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 3 ноября 2020)

23,27 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение предела последовательности комплексных чисел. Сходится ли последовательность $(e^{i\frac{\pi}{2}n})_{n\in\mathbb{N}}$? Почему? (1.5 балла) Ответ: нет

(2) Дать определение вычета в бесконечно удаленной точке. Найти $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}}$. (1.5 балла) Ответ: -1

- Решите следующие задачи

(3) Разложить функцию $\dfrac{z-2}{z^3-z^2}$ в ряд Лорана с центром в точке $z=-i$ в области, содержащей точку $z=\dfrac{1}{2}$. Указать область сходимости ряда. (2 балла) Ответ: $\sum_0^\infty (\frac{i^n+2ni^{n-1}}{\zeta^{n+1}} + \frac{\zeta^n}{(1+i)^{n+1}}), 1<|\zeta|<\sqrt{2}, \zeta=z+i$

(4) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x dx}{5-4\cos x}$. (2 балла) Ответ: $\frac{\pi}{12}$

(5) Вычислить интеграл $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+1)(x-1)}$. (2 балла) Ответ: $\frac{\pi}{2}(\cos 1 - e^{-1})$

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение сопряженных гармонических функций. Пусть u и v – сопряженные гармонические функции. Доказать, что $e^{uv}\cos\dfrac{u^2-v^2}{2}$ и $e^{uv}\sin\dfrac{v^2-u^2}{2}$ также являются сопряженными гармоническими функциями. (3 балла)