Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 10 ноября 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дайте определение сходящейся в $\mathbb{C}$ последовательности. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} e^{-(1+i)n} = 0$. (1.5 балла)

(2) Дайте определение вычета в бесконечности. Найдите $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^n e^{\frac{1}{z}}, n \in \mathbb{Z}$. (1.5 балла)

Ответ: $-\frac{1}{(n+1)!}, n \geqslant -1, 0, n \leqslant -2$

- Решите следующие задачи

(3) При каком a функция $e^{axy}\cos(x^2 - y^2)$ является вещественной частью функции, регулярной во всей комплексной плоскости? Восстановите эту регулярную функцию. (2 балла)

Ответ: $a = \pm 2, f = e^{\pm iz^2} + iC, C \in \mathbb{R}$

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos e^{i\varphi} d\varphi}{4\sin\varphi + 5}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{2\pi}{3}\operatorname{ch}\frac{1}{2}$

(5) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x dx}{ix^2 - 2x}$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2})$

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f регулярна в круге $|z| < 2$, непрерывна вплоть до границы, удовлетворяет в этом круге неравенству $|f(z)| < 1$ и $f(0) = 0$. Доказать, что $|f'(0)| \leqslant \frac{1}{2}$ в этом круге. Может ли здесь достигаться равенство? (3 балла)

Ответ: может, $f(z) = \frac{z}{2}$

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 10 ноября 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дайте определение бесконечно большой последовательности в $\mathbb{C}$. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} e^{(1+i)n} = \infty$. (1.5 балла)

(2) Дайте определение вычета в конечной точке. Найдите $\operatorname*{res}\limits_{z=0} z^n e^{\frac{1}{z}}, n \in \mathbb{Z}$. (1.5 балла)
Ответ: $\frac{1}{(n+1)!}, n \geqslant -1, 0, n \leqslant -2$

- Решите следующие задачи

(3) При каком a функция $e^{2xy}\sin(x^2+ay^2)$ является мнимой частью функции, регулярной во всей комплексной плоскости? Восстановите эту регулярную функцию. (2 балла)
Ответ: $a=-1, f=-e^{-iz^2}+C, C \in \mathbb{R}$

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin e^{i\varphi} d\varphi}{3\sin\varphi+5}$. (2 балла)
Ответ: $-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{1}{3}$

(5) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x dx}{ix+2x^2}$. (2 балла)
Ответ: $-i\pi(1-e^{-\frac{1}{2}})$

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f регулярна в круге $|z|<1$, непрерывна вплоть до границы, удовлетворяет в этом круге неравенству $|f(z)|<2$ и $f(0)=0$. Доказать, что $|f'(0)| \leqslant 2$ в этом круге. Может ли здесь достигаться равенство? (3 балла)
Ответ: может, $f(z)=2z$

• Выполнить следующие задания.

(1) Дайте определение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Какие из следующих последовательностей имеют предел в $\overline{\mathbb{C}}$:
а) $(i^n)_{n=1}^{\infty}$;
б) $((2i)^n)_{n=1}^{\infty}$;
в) $(e^n)_{n=1}^{\infty}$;
г) $(e^{in})_{n=1}^{\infty}$?
(1.5 балла)
Ответ: б), в)

(2) Дайте определение регулярной и главной части ряда Лорана в окрестности бесконечности. Найдите главную часть ряда Лорана функции $z^4 \cos \frac{1}{z}$ в окрестности бесконечности. (1.5 балла)
Ответ: $z^4 - \frac{z^2}{2}$

• Решите следующие задачи

(3) Разложите функцию $\dfrac{z+3}{z^2-1}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 2+i$ в области, содержащей точку $z=0$, и укажите область сходимости ряда. (2 балла)
Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2(1+i)^n}{(z-2-i)^{n+1}} - \frac{(z-2-i)^n}{(3+i)^{n+1}}), \sqrt{2} < |z-2-i| < \sqrt{10}$

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x dx}{x^2 - 3ix + 4}$. (2 балла)
Ответ: $\frac{i\pi}{5}(e^{-1} - e^{-4})$

(5) Вычислите интеграл $v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+4)(x-2)}$. (2 балла)
Ответ: $-\frac{\pi}{8}$

• Выполните следующее задание.

(6) Найдите множество всех точек, в которых угол поворота при отображении $w = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ равен нулю. (3 балла)
Ответ: $z = x - i(x+1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 10 ноября 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дайте определение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Какие из следующих последовательностей имеют предел в $\overline{\mathbb{C}}$:
а) $(e^{(1+i)n})_{n=1}^{\infty}$;
б) $(2^n)_{n=1}^{\infty}$;
в) $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$;
г) $((-3)^n)_{n=1}^{\infty}$?
(1.5 балла)
Ответ: а), б), г)

(2) Дайте определение регулярной и главной части ряда Лорана в окрестности бесконечности. Найдите главную часть ряда Лорана функции $z^5 \sin \frac{1}{z}$ в окрестности бесконечности. (1.5 балла)
Ответ: $z^4 - \frac{z^2}{6}$

- Решите следующие задачи

(3) Разложите функцию $\dfrac{z+3}{z^2-1}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 3-i$ в области, содержащей точку $z = 0$, и укажите область сходимости ряда. (2 балла)
Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2(i-2)^n}{(z-3+i)^{n+1}} - \frac{(z-3+i)^n}{(i-4)^{n+1}}\right), \sqrt{5} < |z-3+i| < \sqrt{17}$

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x dx}{x^2 - ix + 6}$. (2 балла)
Ответ: $\frac{i\pi}{5}(e^{-2} - e^{-3})$

(5) Вычислите интеграл $v.p.\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+9)(x+1)}$. (2 балла)
Ответ: $-\frac{\pi}{30}$

- Выполните следующее задание.

(6) Найдите множество всех точек, в которых угол поворота при отображении $w = \dfrac{i+z}{i-z}$ равен нулю. (3 балла)
Ответ: $z = x + i(x+1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$