Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 5 ноября 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулируйте достаточные условия обратимости регулярной функции в точке. Обратима ли функция $(z+1)^2$ в точке $z=0$? А в точке $z=-1$? Почему? Если да, то чему равна производная обратной функции в образе указанной точки? (1.5 балла)

Ответы: 1) да, $g'(1) = \pm\frac{1}{2}$; 2) нет.

(2) Сформулируйте теорему единственности регулярной функции. Пусть функция f регулярна в круге $|z| < 2$ и удовлетворяет условию: $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Найдите $f(i)$. (1.5 балла)

Ответ: $2i$.

- Решите следующие задачи

(3) Разложите функцию $\dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+2)}$ в ряд Лорана с центром в точке $z=-2$ в кольце, содержащем точку $z=0$. Укажите область сходимости. (2 балла)

Ответ: $1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{3^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+2)^{n-2}}{3^n}, 0 < |z+2| < 3$.

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2i\varphi} \operatorname{ctg}\left(\varphi - \frac{i}{2}\right) d\varphi$. (2 балла)

Ответ: 0.

(5) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{(x+1)(x^2+4)}$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{2\pi}{5}$.

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f регулярна в квадранте $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$, непрерывна вплоть до границы и $zf(z) \to 0$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$ равномерно по $\arg z$ в этом квадранте. Пусть $\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)dz$ сходится. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^{e^{i\varphi}\infty} f(z)dz = \int_0^{\infty} f(z)dz$ для всех $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (3 балла)

• Выполнить следующие задания.

(1) Сформулируйте достаточные условия обратимости регулярной функции в точке. Обратима ли функция $(z+2)^2$ в точке $z=0$? А в точке $z=-2$? Почему? Если да, то чему равна производная обратной функции в образе указанной точки? (1.5 балла)

Ответы: 1) да, $g'(4)=\pm\frac{1}{4}$; 2) нет.

(2) Сформулируйте теорему единственности регулярной функции. Пусть функция f регулярна в круге $|z|<2$ и удовлетворяет условию: $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Найдите $f(i)$. (1.5 балла)

Ответ: $-2i$.

• Решите следующие задачи

(3) Разложите функцию $\dfrac{z^3}{(z-2)^2(z+1)}$ в ряд Лорана с центром в точке $z=-1$ в кольце, содержащем точку $z=0$. Укажите область сходимости. (2 балла)

Ответ: $1+\frac{3}{z+1}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{3^n}+\frac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-2}}{3^n}, 0<|z+1|<3$.

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2i\varphi}\operatorname{ctg}(\varphi-2i)d\varphi$. (2 балла)

Ответ: 0.

(5) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{x^2dx}{(x-2)(x^2+1)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{2\pi}{5}$.

• Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, непрерывна вплоть до границы и $zf(z)\to 0$ при $z\to 0$ и $z\to\infty$ равномерно по $\arg z$ в этой полуплоскости. Пусть $\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)dz$ сходится. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^{e^{i\varphi}\infty} f(z)dz=\int_0^{\infty} f(z)dz$ для всех $\varphi\in[0,\pi]$. (3 балла)

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулируйте достаточные условия обратимости регулярной функции в точке. Обратима ли функция $(z-1)^2$ в точке $z=0$? А в точке $z=1$? Почему? Если да, то чему равна производная обратной функции в образе указанной точки? (1.5 балла)

Ответы: 1) да, $g'(1) = \pm\frac{1}{2}$; 2) нет.

(2) Сформулируйте теорему единственности регулярной функции. Пусть функция f регулярна в круге $|z|<2$ и удовлетворяет условию: $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Найдите $f(-i)$. (1.5 балла)

Ответ: $-2i$.

- Решите следующие задачи

(3) Разложите функцию $\dfrac{z^3}{(z-3)^2(z+1)}$ в ряд Лорана с центром в точке $z=-1$ в кольце, содержащем точку $z=0$. Укажите область сходимости. (2 балла)

Ответ: $1 - \frac{1}{z+1} - \frac{27}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{4^n} + \frac{27}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-2}}{4^n}, 0 < |z+1| < 4$.

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2i\varphi}\operatorname{ctg}\left(\varphi - \frac{i}{3}\right)d\varphi$. (2 балла)

Ответ: 0.

(5) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2dx}{(x+2)(x^2+4)}$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, непрерывна вплоть до границы и $zf(z) \to 0$ при $z \to 0$ и $z \to \infty$ равномерно по $\arg z$ в этой полуплоскости. Пусть $\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)dz$ сходится. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^{e^{i\varphi}\infty} f(z)dz = \int_0^{\infty} f(z)dz$ для всех $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (3 балла)

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулируйте достаточные условия обратимости регулярной функции в точке. Обратима ли функция $(z-2)^2$ в точке $z=0$? А в точке $z=2$? Почему? Если да, то чему равна производная обратной функции в образе указанной точки? (1.5 балла)

Ответы: 1) да, $g'(4)=\pm\frac{1}{4}$; 2) нет.

(2) Сформулируйте теорему единственности регулярной функции. Пусть функция f регулярна в круге $|z|<2$ и удовлетворяет условию: $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Найдите $f(-i)$. (1.5 балла)

Ответ: $2i$.

- Решите следующие задачи

(3) Разложите функцию $\dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+3)}$ в ряд Лорана с центром в точке $z=-3$ в кольце, содержащем точку $z=0$. Укажите область сходимости. (2 балла)

Ответ: $1-\frac{1}{z+3}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3)^{n-1}}{4^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+3)^{n-2}}{4^n}, 0<|z+3|<4$.

(4) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-2i\varphi}\operatorname{ctg}(\varphi-3i)d\varphi$. (2 балла)

Ответ: 0.

(5) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+9)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{3\pi}{10}$.

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f регулярна в секторе $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$, непрерывна вплоть до границы и $zf(z)\to 0$ при $z\to 0$ и $z\to\infty$ равномерно по $\arg z$ в этой полуплоскости. Пусть $\displaystyle\int_0^{\infty}f(z)dz$ сходится. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^{e^{i\varphi}\infty}f(z)dz=\int_0^{\infty}f(z)dz$ для всех $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. (3 балла)