Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 31 октября 2023)

• Выполните следующие задания.

(1) Какие гармонические функции называются сопряженными? Выберите из следующих пар пары сопряженных функций: а) $x^2 - y^2$ и $2xy$; б) $e^x \cos y$ и $-e^x \sin y$; в) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $\dfrac{y}{x^2+y^2}$; г) $\cos x \operatorname{ch} y$ и $\sin x \operatorname{sh} y$.(1.5 балла)

Ответ: а).

(2) Сформулируйте теорему о среднем для регулярных функций. Используя эту теорему, вычислите $\int_0^{2\pi} \sin(3 + 2e^{i\varphi}) d\varphi$. (1.5 балла)

Ответ: $2\pi \sin 3$

• Решите следующие задачи

(3) На $\mathbb{C}$ задана функция $f(z) = \dfrac{1}{xy^2} + \dfrac{2i \ln x}{y^3}, z = x + iy$.

Найдите:

(a) множество D_r, на котором f дифференцируема в смысле вещ. анализа;

(b) множество D_c, на котором f дифференцируема в смысле компл. анализа;

(c) производную f' в смысле комплексного анализа на множестве D_c. (2 балла)

Ответ: $D_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y \neq 0\}, D_c = \{z \in D_r : y^2 = 6x^2 \ln x\}, f' = -\frac{1}{x^2y^2} + \frac{2i}{xy^3}$ на D_c.

(4) Разложите функцию $\dfrac{z^4}{(z-1)^2(z^2-8z+15)}$ в ряд Лорана с центром в точке 5 в области, содержащей точку $z = 2$. Укажите область сходимости ряда.(2 балла)

Ответ: $1+\frac{5^4}{2^5}\frac{1}{z-5}-\frac{3^4}{2^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-5)^{n+1}}+\frac{1}{6}(1+\frac{1}{2^3}-\frac{5^3}{2^5}+\frac{3^3}{2^3})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-5}{4})^n-\frac{1}{2^5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-5)^{n-1}}{4^n}$, $2 < |z-5| < 4$.

(5) Вычислите интеграл $v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2(x-1)}$. (2 балла)

Ответ: $\pi(2 - \sin 2)$.

• Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f - периодическая с периодом 2 и регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -1$ за исключением полюсов. Пусть f не имеет полюсов на границе полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z > 0$, а внутри полуполосы имеет полюсы в точках $z_1, z_2, ..., z_n$, и только в них. Пусть f стремится к 3 при $\operatorname{Im} z \to +\infty$. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^2 f(z)dz = 6 + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$. (3 балла)

- Выполнить следующие задания.

(1) Какие гармонические функции называются сопряженными? Выберите из следующих пар пары сопряженных функций: а) $x^2 - y^2$ и $-2xy$; б) $e^x \cos y$ и $e^x \sin y$; в) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $\dfrac{y}{x^2+y^2}$; г) $\cos x \operatorname{ch} y$ и $\sin x \operatorname{sh} y$.(1.5 балла)

Ответ: б).

(2) Сформулируйте теорему о среднем для регулярных функций. Используя эту теорему, вычислите $\int_0^{2\pi} \cos(2+3e^{i\varphi})d\varphi$. (1.5 балла)

Ответ: $2\pi \cos 2$

- Решите следующие задачи

(3) На $\mathbb{C}$ задана функция $f(z) = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{i \ln x}{y^2}, z = x + iy$.

Найдите:

(a) множество D_r, на котором f дифференцируема в смысле вещ. анализа;
(b) множество D_c, на котором f дифференцируема в смысле компл. анализа;
(c) производную f' в смысле комплексного анализа на множестве D_c. (2 балла)

Ответ: $D_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y \neq 0\}, D_c = \{z \in D_r : y^2 = 2x^2 \ln x\}, f' = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{i}{xy^2}$ на D_c.

(4) Разложите функцию $\dfrac{z^4}{(z-1)^2(z^2-9z+20)}$ в ряд Лорана с центром в точке 5 в области, содержащей точку $z = 3$. Укажите область сходимости ряда. (2 балла)

Ответ: $1+\frac{5^4}{4^2}\frac{1}{z-5}-\frac{4^4}{3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-5)^{n+1}}+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{12}-\frac{5^3}{4^2}+\frac{4^3}{3^2})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-5}{4})^n-\frac{1}{48}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-5)^{n-1}}{4^n}$, $1 < |z-5| < 4$.

(5) Вычислите интеграл $v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x - 1}{x^2(x-2)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\pi}{4}(2 - \sin 2)$.

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f - периодическая с периодом 1 и регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -1$ за исключением полюсов. Пусть f не имеет полюсов на границе полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0$, а внутри полуполосы имеет полюсы в точках $z_1, z_2, ..., z_n$, и только в них. Пусть f стремится к 3 при $\operatorname{Im} z \to +\infty$. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^1 f(z)dz = 3 + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$. (3 балла)

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 31 октября 2023)

- Выполнить следующие задания.

(1) Какие гармонические функции называются сопряженными? Выберите из следующих пар пары сопряженных функций: а) x^2-y^2 и $-2xy$; б) $e^x\cos y$ и $-e^x\sin y$; в) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; г) $\cos x\operatorname{ch} y$ и $\sin x\operatorname{sh} y$.(1.5 балла)

Ответ: в).

(2) Сформулируйте теорему о среднем для регулярных функций. Используя эту теорему, вычислите $\int_0^{2\pi}\sin(2e^{i\varphi}-5)d\varphi$. (1.5 балла)

Ответ: $-2\pi\sin 5$

- Решите следующие задачи

(3) На $\mathbb{C}$ задана функция $f(z)=\dfrac{y^2}{x}-2iy\ln x, z=x+iy$.

Найдите:

(a) множество D_r, на котором f дифференцируема в смысле вещ. анализа;

(b) множество D_c, на котором f дифференцируема в смысле компл. анализа;

(c) производную f' в смысле комплексного анализа на множестве D_c. (2 балла)

Ответ: $D_r=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:x>0\}, D_c=\{z\in D_r:y^2=2x^2\ln x\}, f'=-\frac{y^2}{x^2}-\frac{2iy}{x}$ на D_c.

(4) Разложите функцию $\dfrac{z^4}{(z-1)^2(z^2-10z+24)}$ в ряд Лорана с центром в точке 6 в области, содержащей точку $z=2$. Укажите область сходимости ряда. (2 балла)

Ответ: $1+\frac{6^4}{5^2 2}\frac{1}{z-6}-\frac{4^4}{3^2 2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-6)^{n+1}}+\frac{1}{5}(1+\frac{1}{15}-\frac{6^3}{5^2 2}+\frac{4^3}{3^2 2})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-6}{5})^n-\frac{1}{75}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-6)^{n-1}}{5^n}$, $2<|z-6|<5$.

(5) Вычислите интеграл $v.p.\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(3x)-1}{x^2(x-1)}$. (2 балла)

Ответ: $\pi(3-\sin 3)$.

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f - периодическая с периодом 3 и регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} z>-1$ за исключением полюсов. Пусть f не имеет полюсов на границе полуполосы $0<\operatorname{Re} z<3, \operatorname{Im} z>0$, а внутри полуполосы имеет полюсы в точках $z_1,z_2,...,z_n$, и только в них. Пусть f стремится к 1 при $\operatorname{Im} z\to+\infty$. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^3 f(z)dz=3+2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_j}f(z)$. (3 балла)

- Выполнить следующие задания.

(1) Какие гармонические функции называются сопряженными? Выберите из следующих пар пары сопряженных функций: а) $x^2 - y^2$ и $-2xy$; б) $e^x \cos y$ и $-e^x \sin y$; в) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $\dfrac{y}{x^2+y^2}$; г) $\cos x \operatorname{ch} y$ и $-\sin x \operatorname{sh} y$.(1.5 балла)

Ответ: г).

(2) Сформулируйте теорему о среднем для регулярных функций. Используя эту теорему, вычислите $\int_0^{2\pi} \cos(5e^{i\varphi} - 2) d\varphi$. (1.5 балла)

Ответ: $2\pi \cos 2$

- Решите следующие задачи

(3) На $\mathbb{C}$ задана функция $f(z) = \dfrac{y^3}{x} - 3iy^2 \ln x, z = x + iy$.

Найдите:

(a) множество D_r, на котором f дифференцируема в смысле вещ. анализа;

(b) множество D_c, на котором f дифференцируема в смысле компл. анализа;

(c) производную f' в смысле комплексного анализа на множестве D_c. (2 балла)

Ответ: $D_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}, D_c = \{z \in D_r : y^2 = 6x^2 \ln x$ или $y = 0\}, f' = -\frac{y^3}{x^2} - \frac{3iy^2}{x}$ на D_c.

(4) Разложите функцию $\dfrac{z^4}{(z-1)^2(z^2 - 11z + 30)}$ в ряд Лорана с центром в точке 6 в области, содержащей точку $z = 3$. Укажите область сходимости ряда. (2 балла)

Ответ: $1+\frac{6^4}{5^2}\frac{1}{z-6}-\frac{5^4}{4^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-6)^{n+1}}+\frac{1}{5}(1+\frac{1}{20}-\frac{6^3}{5^2}+\frac{5^3}{4^2})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-6}{5})^n-\frac{1}{100}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-6)^{n-1}}{5^n}$, $1 < |z-6| < 5$.

(5) Вычислите интеграл $v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x - 1}{x^2(x-3)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\pi}{9}(3 - \sin 3)$.

- Выполните следующее задание.

(6) Пусть функция f - периодическая с периодом 2 и регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -1$ за исключением полюсов. Пусть f не имеет полюсов на границе полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z > 0$, а внутри полуполосы имеет полюсы в точках $z_1, z_2, ..., z_n$, и только в них. Пусть f стремится к 2 при $\operatorname{Im} z \to +\infty$. Докажите, что тогда $\displaystyle\int_0^2 f(z) dz = 4 + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$. (3 балла)