

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 29 октября 2024)

- Выполните следующие задания.

(1) Дать определение стереографической проекции и сферы Римана. Какое множество на сфере Римана отвечает множеству $\operatorname{Re} z > 0$ на комплексной плоскости?

Ответ: полусфера над полуплоскостью $\operatorname{Re} z > 0$.

(2) Дать определение ряда Лорана. На каком множестве сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-|n|} z^n$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $\frac{1}{3} < |z| < 3$.

- Решите следующие задачи

(3) При каких a и b функция $6x^2y - ay^3 + x^3 - 3xy^2 + (\operatorname{ch} y + b) \cos x$ является мнимой частью регулярной функции? На какой области? Восстановите эту регулярную функцию. (2 балла)

Ответ: $a = 2, b = 0, f = (2 + i)z^3 + i \cos z + C, C \in \mathbb{R}$.

(4) Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(4\varphi) d\varphi}{5 - 4 \sin \varphi}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\pi}{24}$.

(5) Вычислите интеграл $v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix} - 1 - 2ix + \sin(3x)}{x^2}$. (2 балла)

Ответ: -2π .

- Выполните следующее задание.

(6) Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx$. (3 балла)

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{e}$.

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 29 октября 2024)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение стереографической проекции и сферы Римана. Какое множество на сфере Римана отвечает множеству $\operatorname{Im} z < 0$ на комплексной плоскости?

Ответ: полусфера над полуплоскостью $\operatorname{Im} z < 0$.

(2) Дать определение ряда Лорана. На каком множестве сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4^{-|n|} z^n$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $\frac{1}{4} < |z| < 4$.

- Решите следующие задачи

(3) При каких a и b функция $x^3 - 3xy^2 - 3x^2y - ay^3 + (\operatorname{sh} y + b) \sin x$ является мнимой частью регулярной функции? На какой области? Восстановите эту регулярную функцию. (2 балла)

Ответ: $a = -1, b = 0, f = (i - 1)z^3 - \cos z + C, C \in \mathbb{R}$.

(4) Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(6\varphi)d\varphi}{5 - 3\sin\varphi}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2 \cdot 3^6}$. (2 балла)

(5) Вычислите интеграл *v.p.* $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix} - 1 - 3ix + \sin(2x)}{x^2}$. (2 балла)

Ответ: -3π .

• Выполните следующее задание.

(6) Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx$. (3 балла)

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{1}{4}}}$.

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 29 октября 2024)

• Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение стереографической проекции и сферы Римана. Какое множество на сфере Римана отвечает множеству $|z| > 1$ на комплексной плоскости?

Ответ: верхняя полусфера, если диаметр сферы Римана равен 1.

(2) Дать определение ряда Лорана. На каком множестве сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

• Решите следующие задачи

(3) При каких a и b функция $x^3 - 3xy^2 - 6x^2y - ay^3 + (\cos y + b) \operatorname{ch} x$ является мнимой частью регулярной функции? На какой области? Восстановите эту регулярную функцию. (2 балла)

Ответ: $a = -2, b = 0, f = (i - 2)z^3 + i \operatorname{ch} z + C, C \in \mathbb{R}$.

(4) Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(5\varphi)d\varphi}{5 - 3\sin\varphi}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\pi}{2 \cdot 3^5}$.

(5) Вычислите интеграл *v.p.* $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} - 1 - ix + \sin(5x)}{x^2}$. (2 балла)

Ответ: $-\pi$.

• Выполните следующее задание.

(6) Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(3x) dx$. (3 балла)

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{9}{4}}}$.

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (5 семестр, 29 октября 2024)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение стереографической проекции и сферы Римана. Какое множество на сфере Римана отвечает множеству $|z| < 1$ на комплексной плоскости?

Ответ: нижняя полусфера, если диаметр сферы Римана равен 1.

(2) Дать определение ряда Лорана. На каком множестве сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{3}{2})^{-|n|} z^n$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $\frac{2}{3} < |z| < \frac{3}{2}$.

- Решите следующие задачи

(3) При каких a и b функция $3x^2y - ay^3 + x^3 - 3xy^2 + (\sin y + b) \operatorname{sh} x$ является мнимой частью регулярной функции? На какой области? Восстановите эту регулярную функцию. (2 балла)

Ответ: $a = 1, b = 0, f = (1 + i)z^3 + \operatorname{ch} z + C, C \in \mathbb{R}$.

(4) Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\varphi) d\varphi}{5 - 4 \sin \varphi}$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{\pi}{3 \cdot 2^6}$.

(5) Вычислите интеграл *v.p.* $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix} - 1 - 4ix + \sin x}{x^2}$. (2 балла)

Ответ: -4π .

- Выполните следующее задание.

(6) Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(4x) dx$. (3 балла)

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{e^{16}}$.