

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\frac{z^3 + 1}{(z - 1)(z - 3)}$

(1.5 балла)

Ответ: $z + 4 - \frac{1}{z-1} + \frac{14}{z-3}$

(2) Сформулировать теорему Римана о конформном отображении. Какие из следующих областей можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

а) $|z - i| < 1$; б) $-1 < \operatorname{Re} z < 1$; в) \mathbb{C} ; г) $1 < |z - 1| < 2$?

Почему? (1.5 балла)

Ответ: а, б

- Решите следующие задачи

(3) Вычислить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x-1}}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \sin \frac{\pi}{12}$

(4) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z - \sqrt{2}| > \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z) = \frac{4}{\pi} i \ln w(z) + 1$, $w(z) = \frac{z - 2e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$, $\varphi = \frac{4}{\pi} \arg w_1(z) - 1$, $E(z) = \overline{f'(z)}$.

(5) Найти решение задачи Коши $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases}$,

$x(0) = -1, x'(0) = -2$, при $t > 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $X(p) = \frac{1 - e^{1-p}}{(p-1)^3} + \frac{2e^{-p}}{p(p-1)^2} - \frac{p}{(p-1)^2}$,

$x(t) = \theta(t)e^t \left(\frac{t^2}{2} - t - 1 \right) + \theta(t-1) \left(e^{t-1} (2(t-1) - \frac{e}{2}(t-1)^2 - 2) + 2 \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть функция $f \in C^\infty([-1, 1])$ тождественно обращается в нуль вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Найти первые два слагаемых и оценить остаток в асимптотике интеграла

$\int_{-1}^1 f(x)e^{-6\lambda x^2} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (3 балла)

Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{6\lambda}} f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{4(6\lambda)^{\frac{3}{2}}} f''(0) + O(\lambda^{-\frac{5}{2}})$

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\frac{z^3 + 1}{(z - 1)(z + 3)}$

(1.5 балла)

Ответ: $z - 2 + \frac{13}{2(z+3)} + \frac{1}{2(z-1)}$

(2) Сформулировать теорему Римана о конформном отображении. Какие из следующих областей можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

а) $2 < |z - 1| < 3$; б) $|z + i| < 2$; в) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; г) $-1 < \text{Im } z < 1, \text{Re } z > 0$?

Почему? (1.5 балла)

Ответ: б, г

- Решите следующие задачи

(3) Вычислить интеграл $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)\sqrt[3]{x + 1}}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}} \sin \frac{2\pi}{9}$

(4) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z) = -\frac{4}{3\pi} i \ln w(z) - \frac{5}{3}$, $w(z) = \frac{z - 2e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$, $\varphi = \frac{5}{3} - \frac{4}{3\pi} \arg w(z)$, $E(z) = \overline{f'(z)}$.

(5) Найти решение задачи Коши $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$,

$x(0) = -1, x'(0) = -4$, при $t > 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $X(p) = \frac{1 - e^{1-p}}{(p-1)(p-2)^2} + \frac{e^{-p}}{p(p-2)^2} - \frac{p}{(p-2)^2}$,

$x(t) = \theta(t) \left(e^t + e^{2t} (-t - 2) \right) + \theta(t - 1) \left(\frac{1}{4} - e^t + e^{2(t-1)} \left((t-1) \left(-e + \frac{1}{2} \right) - e - \frac{1}{2} \right) \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть функция $f \in C^\infty([-1, 1])$ тождественно обращается в нуль вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Найти первые два слагаемых и оценить остаток в асимптотике интеграла

$\int_{-1}^1 f(x) e^{-5\lambda x^2} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (3 балла)

Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{5\lambda}} f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{4(5\lambda)^{\frac{3}{2}}} f''(0) + O(\lambda^{-\frac{5}{2}})$

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\frac{z^3 + 1}{(z - 1)(z - 2)}$

(1.5 балла)

Ответ: $z + 3 - \frac{2}{z-1} + \frac{9}{z-2}$

(2) Сформулировать теорему Римана о конформном отображении. Какие из следующих областей можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

а) \mathbb{C} ; б) $|z - 1| < 2$; в) $2 < |z - i| < 4$; г) $-1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0$?

Почему? (1.5 балла)

Ответ: б, г

- Решите следующие задачи

(3) Вычислить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)\sqrt{x-1}}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}} \sin \frac{\pi}{9}$

(4) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z) = \frac{4}{\pi} i \ln w(z) + 5$, $w(z) = \frac{z - 2e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$, $\varphi = \frac{4}{\pi} \arg w_1(z) - 5$, $E(z) = \overline{f'(z)}$.

(5) Найти решение задачи Коши $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t < 1 \\ -2, & t \geq 1 \end{cases}$,

$x(0) = -1, x'(0) = 2$, при $t > 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $X(p) = \frac{1 - e^{1-p}}{(p-1)(p+1)^2} - \frac{2e^{-p}}{p(p+1)^2} - \frac{p}{(p+1)^2}$,

$x(t) = \theta(t) \left(\frac{e^t}{4} + e^{-t} \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{4} \right) \right) + \theta(t-1) \left(-2 - \frac{e^t}{4} + e^{-(t-1)} \left((t-1) \left(\frac{e}{2} + 2 \right) + \frac{e}{4} + 2 \right) \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть функция $f \in C^\infty([-1, 1])$ тождественно обращается в нуль вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Найти первые два слагаемых и оценить остаток в асимптотике интеграла

$\int_{-1}^1 f(x) e^{-3\lambda x^2} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (3 балла)

Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{4(3\lambda)^{\frac{3}{2}}} f''(0) + O(\lambda^{-\frac{5}{2}})$

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\frac{z^3 + 1}{(z - 1)(z + 2)}$

(1.5 балла)

Ответ: $z - 1 + \frac{7}{3(z+2)} + \frac{2}{3(z-1)}$

(2) Сформулировать теорему Римана о конформном отображении. Какие из следующих областей можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

а) $|z + 1| < 2$; б) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; в) $1 < |z + i| < 3$; г) $-1 < \text{Im } z < 1$?

Почему? (1.5 балла)

Ответ: а, г

- Решите следующие задачи

(3) Вычислить интеграл $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt[3]{x + 1}}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt[6]{2}} \sin \frac{\pi}{4}$

(4) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{\sqrt{2}}| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z) = -\frac{4}{3\pi} i \ln w(z) - \frac{5}{3}$, $w(z) = \frac{z - e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - e^{-i\frac{\pi}{4}}}$, $\varphi = \frac{5}{3} - \frac{4}{3\pi} \arg w(z)$, $E(z) = \overline{f'(z)}$.

(5) Найти решение задачи Коши $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = \begin{cases} e^t, 0 < t < 1 \\ -1, t \geq 1 \end{cases}$,

$x(0) = -1, x'(0) = 4$, при $t > 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $X(p) = \frac{1 - e^{1-p}}{(p-1)(p+2)^2} - \frac{e^{-p}}{p(p+2)^2} - \frac{p}{(p+2)^2}$,

$x(t) = \theta(t) \left(\frac{e^t}{9} + e^{-2t} \left(\frac{4t}{3} - \frac{10}{9} \right) \right) + \theta(t-1) \left(-\frac{1}{4} - \frac{e^t}{9} + e^{-2(t-1)} \left((t-1) \left(\frac{e}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{e}{9} + \frac{1}{4} \right) \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть функция $f \in C^\infty([-1, 1])$ тождественно обращается в нуль вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Найти первые два слагаемых и оценить остаток в асимптотике интеграла

$\int_{-1}^1 f(x) e^{-2\lambda x^2} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (3 балла)

Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{4(2\lambda)^{\frac{3}{2}}} f''(0) + O(\lambda^{-\frac{5}{2}})$