

Вопросы к экзамену по методам математической физики
5 семестр, 10 января 2022

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать принцип аргумента. Используя сформулированный результат, найти приращение аргумента функции $\frac{(z+1)^3(z+3)^2}{(z-1)^5(z-3)^5}$ при однократном обходе окружности $|z|=2$ в положительном направлении. (1.5 балла)

Ответ: -4π .

(2) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простые дроби. Используя сформулированный результат, разложить на простые дроби функцию $\frac{z^3}{z^2-1}$. (1.5 балла)

Ответ: $f_\infty = z, f_1 = \frac{1}{2(z-1)}, f_{-1} = \frac{1}{2(z+1)}, C = 0$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z+i| > \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $\varphi = 3 - \frac{4}{\pi} \arg \frac{z-1}{z+1}, E = \frac{8}{i\pi} \frac{1}{z^2-1}$.

(4) Найти решение задачи Коши $x'' + 3x' + 2x = \begin{cases} e^{t-1}, t \leq 1 \\ 1, t > 1 \end{cases}$, $x(0) = 2, x'(0) = -6$

при $t \geq 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t) \left(\frac{e^{t-1}}{6} - \frac{e^{-t-1}}{2} + \frac{e^{-2t-1}}{3} + 4e^{-2t} - 2e^{-t} \right) + \theta(t-1) \left(-\frac{e^{t-1}}{6} + \frac{e^{-t+1}}{2} + \frac{e^{-2t+2}}{6} + \frac{1}{2} \right)$.

(5) Найти первое слагаемое в асимптотике интеграла $\int_0^{1+\frac{i}{3}} z e^{\lambda(iz^2-iz+\frac{z}{3})} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и написать порядок поправки. (2 балла)

Ответ: $\frac{1+2i}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{\lambda(\frac{1}{6}-\frac{2i}{9})} (1 + O(\frac{1}{\lambda}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. (3 балла)

Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Вопросы к экзамену по методам математической физики

5 семестр, 10 января 2022

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать принцип аргумента. Используя сформулированный результат, найти приращение аргумента функции $\frac{(z+1)^5(z+3)^4}{(z-1)^3(z-3)^3}$ при однократном обходе окружности $|z|=2$ в положительном направлении. (1.5 балла)

Ответ: 4π .

(2) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простые дроби. Используя сформулированный результат, разложить на простые дроби функцию $\frac{z^3}{(z-1)(z-2)}$. (1.5 балла)

Ответ: $f_\infty = z, f_1 = -\frac{1}{z-1}, f_2 = \frac{8}{z-2}, C = 3$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z+i| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $\varphi = 2 - \frac{4}{3\pi} \arg \frac{z-1}{z+1}, E = \frac{8i}{3\pi} \frac{1}{z^2-1}$.

(4) Найти решение задачи Коши $x'' + 4x' + 3x = \begin{cases} e^{t-1}, t \leq 1 \\ 1, t > 1 \end{cases}, x(0) = -2, x'(0) = 8$

при $t \geq 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t) \left(\frac{e^{t-1}}{8} - \frac{e^{-t-1}}{4} + \frac{e^{-3t-1}}{8} + e^{-t} - 3e^{-3t} \right) + \theta(t-1) \left(\frac{e^{t-1}}{8} - \frac{3e^{-t+1}}{4} + \frac{7e^{-3t+3}}{24} + \frac{1}{3} \right)$.

(5) Найти первое слагаемое в асимптотике интеграла $\int_0^{1+3i} z e^{\lambda(iz^2-iz+3z)} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и написать порядок поправки. (2 балла)

Ответ: $(-1 + 2i) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\lambda(\frac{3}{2}+2i)} (1 + O(\frac{1}{\lambda}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$. (3 балла)

Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.