

Вопросы к экзамену по методам математической физики
5 семестр, 10 января 2023

- Выполнить следующие задания.

(1) Написать формулу разложения рациональной функции на простые дроби. Используя эту формулу, разложить на простые дроби функцию $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$. (1.5 балла)

Ответ: $f_{-1} = \frac{1}{3(z+1)}, f_2 = \frac{8}{3(z-2)}, f_\infty = z, C = 1$.

(2) Функция f регулярна в круге $|z| < 10$, вещественна на отрезке $[-10, 10]$ вещественной оси и $f(1+2i) = 3-i$. Чему равно значение $f(1-2i)$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $3+i$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1, |z-1-i| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = -1$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 2$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f = \frac{4}{i\pi} \ln \frac{z}{z-2} - 5, \varphi = 5 - \frac{4}{\pi} \arg \frac{z}{z-2}, E = \frac{8}{i\pi z(z-2)}$.

(4) Найти решение задачи Коши $x'' - 4x' + 4x = \begin{cases} 1, t \leq 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$, $x(0) = 1, x'(0) = 4$ при

$t \geq 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{4}(\theta(t)(1 + e^{2t}(3 + 10t)) + \theta(t-1)((3 - 2t)e^{2(t-1)} - 1))$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\int_1^5 x e^{\lambda(8 \ln x - 14x + \frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3})} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (2 балла)

Ответ: $\frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{(16 \ln 2 - \frac{64}{3})\lambda} (1 + O(\frac{1}{\lambda}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Доказать, что аналитическое продолжение функции $\int_0^\infty \frac{e^{-tz} dt}{1 + e^{-2t}}$ не имеет во всей комплексной плоскости никаких особых точек, кроме полюсов. Найти все эти полюсы и главные части в них. (3 балла)

Ответ: интеграл равен $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{z+2n} = 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+4n)(z+4n+2)}, z \in \mathbb{C} \setminus -2\mathbb{Z}_+$.

- Выполнить следующие задания.

(1) Написать формулу разложения рациональной функции на простые дроби. Используя эту формулу, разложить на простые дроби функцию $\frac{z^3}{(z-1)(z+2)}$. (1.5 балла)

Ответ: $f_1 = \frac{1}{3(z-1)}, f_{-2} = \frac{8}{3(z+2)}, f_\infty = z, C = -1$.

(2) Функция f регулярна в круге $|z| < 10$, вещественна на отрезке $[-10, 10]$ вещественной оси и $f(-1+2i) = -1-2i$. Чему равно значение $f(-1-2i)$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $-1+2i$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1, |z-1+i| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = -3$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f = \frac{16i}{3\pi} \ln \frac{z}{z-2} + \frac{17}{3}, \varphi = \frac{16}{3\pi} \arg \frac{z}{z-2} - \frac{17}{3}, E = \frac{32i}{3\pi z(\bar{z}-2)}$.

(4) Найти решение задачи Коши $x'' + 2x' + x = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $x(0) = 2, x'(0) = -4$ при

$t \geq 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t)(1 + e^{-t}(1 - 3t)) + \theta(t-1)(te^{1-t} - 1)$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\int_1^5 xe^{\lambda(12 \ln x - 19x + 4x^2 - \frac{x^3}{3})} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} e^{-\frac{46}{3}\lambda} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Доказать, что аналитическое продолжение функции $\int_0^\infty \frac{e^{-tz} dt}{1+e^{-t}}$ не имеет во всей комплексной плоскости никаких особых точек, кроме полюсов. Найти все эти полюсы и главные части в них. (3 балла)

Ответ: интеграл равен $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{z+n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+2n)(z+2n+1)}, z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{Z}_+$.

- Выполнить следующие задания.

(1) Написать формулу разложения рациональной функции на простые дроби. Используя эту формулу, разложить на простые дроби функцию $\frac{z^3}{(z-3)(z+1)}$. (1.5 балла)

Ответ: $f_{-1} = \frac{1}{4(z+1)}$, $f_3 = \frac{27}{4(z-3)}$, $f_\infty = z$, $C = 2$.

(2) Функция f регулярна в круге $|z| < 10$, вещественна на отрезке $[-10, 10]$ вещественной оси и $f(2+i) = -2+3i$. Чему равно значение $f(2-i)$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $-2-3i$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1, |z-1-i| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = -1$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 3$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f = \frac{16}{i3\pi} \ln \frac{z}{z-2} + 7$, $\varphi = 7 - \frac{16}{3\pi} \arg \frac{z}{z-2}$, $E = \frac{32}{3i\pi z(z-2)}$.

(4) Найти решение задачи Коши $x'' + 4x' + 4x = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 4$ при

$t \geq 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{4} \left(\theta(t)(1 + e^{-2t}(6t - 5)) + \theta(t-1)((2t-1)e^{-2(t-1)} - 1) \right)$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\int_1^6 x e^{\lambda(15 \ln x - 23x + \frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3})} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{113}{6}\lambda} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Доказать, что аналитическое продолжение функции $\int_0^\infty \frac{e^{-tz} dt}{1 + e^{-3t}}$ не имеет во всей комплексной плоскости никаких особых точек, кроме полюсов. Найти все эти полюсы и главные части в них. (3 балла)

Ответ: интеграл равен $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{z+3n} = 3 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+6n)(z+6n+3)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus -3\mathbb{Z}_+$.

- Выполнить следующие задания.

(1) Написать формулу разложения рациональной функции на простые дроби. Используя эту формулу, разложить на простые дроби функцию $\frac{z^3}{(z-1)(z+3)}$. (1.5 балла)

Ответ: $f_1 = \frac{1}{4(z-1)}, f_{-3} = \frac{27}{4(z+3)}, f_\infty = z, C = -2$.

(2) Функция f регулярна в круге $|z| < 10$, вещественна на отрезке $[-10, 10]$ вещественной оси и $f(-2-i) = 1-2i$. Чему равно значение $f(-2+i)$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $1+2i$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1, |z-1+i| < \sqrt{2}\}$ при граничных условиях

• $\varphi|_{\gamma_1} = -2$, где $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$,

• $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, где $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| = \sqrt{2}\}$. (2 балла)

Ответ: $f = \frac{4i}{\pi} \ln \frac{z}{z-2} + 4, \varphi = \frac{4}{\pi} \arg \frac{z}{z-2} - 4, E = \frac{8i}{\pi z(\bar{z}-2)}$.

(4) Найти решение задачи Коши $x'' - 2x' + x = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $x(0) = 2, x'(0) = 4$ при

$t \geq 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t)(1 + e^t(1 + 3t)) + \theta(t-1)((2-t)e^{t-1} - 1)$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\int_1^4 x e^{\lambda(6 \ln x - 11x + 3x^2 - \frac{x^3}{3})} dx$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{25}{3}\lambda} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Доказать, что аналитическое продолжение функции $\int_0^\infty \frac{e^{-tz} dt}{1 + e^{-\frac{t}{2}}}$ не имеет во всей комплексной плоскости никаких особых точек, кроме полюсов. Найти все эти полюсы и главные части в них. (3 балла)

Ответ: интеграл равен $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{z + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)(z+n+\frac{1}{2})}, z \in \mathbb{C} \setminus -\frac{\mathbb{Z}_+}{2}$.