

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему Руше. Сколько нулей имеет функция  $z^4 - \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$  в круге  $|z| < 1$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: 4

(2) Дать определение конформного отображения. Является ли конформным отображение  $e^z$  в полосе а)  $\pi < \text{Im } z < 2\pi$ ; б)  $-\pi < \text{Im } z < 2\pi$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: а) да, б) нет.

- Решить следующие задачи

(3) Вычислить интеграл  $\int_2^\infty \frac{\sqrt[4]{x-2} dx}{(x-1)^2}$ . (2 балла)

Ответ:  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(4) Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность электростатического поля  $E$  в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \sqrt{2}, \text{Im } z > 0\}$  при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1} = -1$ , где  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \sqrt{2}\}$ ,
- $\varphi|_{\gamma_2} = 3$ , где  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0\}$ . (2 балла)

Ответ:  $f = \frac{8i}{\pi} \ln \frac{z-1+\sqrt{2}}{z+1+\sqrt{2}} - 5$ ,  $\varphi = \frac{8}{\pi} \arg \frac{z+1-\sqrt{2}}{z+1+\sqrt{2}} - 5$ ,  $E = -\frac{8i}{\pi} \left( \frac{1}{z+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+1+\sqrt{2}} \right)$

(5) Найти решение задачи Коши  $x'' + 4x = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ t-1, & t > 1 \end{cases}$ ,  $x(0) = 1, x'(0) = -3$  при  $t \geq 0$  операционным методом. (2 балла)

Ответ:  $\theta(t) \left( \cos 2t - \frac{3 \sin 2t}{2} \right) + \theta(t-1) \left( \frac{t-1}{4} - \frac{\sin 2(t-1)}{8} \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Найти два первых слагаемых и оценку остатка в асимптотике интеграла  $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\lambda x^2} \text{th } x dx$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . (3 балла)

Ответ:  $\frac{\text{th } 1}{2\lambda} e^\lambda - \left( \frac{1}{\text{ch}^2 1} - \text{th } 1 \right) \frac{e^\lambda}{4\lambda^2} + O\left(\frac{e^\lambda}{\lambda^3}\right)$

Вопросы к экзамену по методам математической физики  
5 семестр, 10 января 2024

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему Руше. Сколько нулей имеет функция  $z^4 + \frac{z^3}{3} + \frac{z}{4}$  в круге  $|z| < 1$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: 4

(2) Дать определение конформного отображения. Является ли конформным отображение  $e^z$  в полосе а)  $-2\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ ; б)  $-2\pi < \operatorname{Im} z < -\pi$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: а) нет, б) да.

- Решить следующие задачи

(3) Вычислить интеграл  $\int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{x-1} dx}{(x+1)^2}$ . (2 балла)

Ответ:  $\frac{\pi}{2^{\frac{9}{4}}}$

(4) Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность электростатического поля  $E$  в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, \operatorname{Im} z < 0\}$  при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1} = -1$ , где  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \sqrt{2}\}$ ,

- $\varphi|_{\gamma_2} = 3$ , где  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ . (2 балла)

Ответ:  $f = \frac{8i}{\pi} \ln \frac{z-1+\sqrt{2}}{z-1-\sqrt{2}} + 5$ ,  $\varphi = -5 + \frac{8}{\pi} \arg \frac{z-1+\sqrt{2}}{z-1-\sqrt{2}}$ ,  $E = -\frac{8i}{\pi} \left( \frac{1}{z-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{z-1-\sqrt{2}} \right)$

(5) Найти решение задачи Коши  $x'' + 9x = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ t-1, & t > 1 \end{cases}$ ,  $x(0) = -2, x'(0) = 1$  при

$t \geq 0$  операционным методом. (2 балла)

Ответ:  $\theta(t) \left( \frac{\sin 3t}{3} - 2 \cos 3t \right) + \theta(t-1) \left( \frac{t-1}{9} - \frac{\sin 3(t-1)}{27} \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Найти два первых слагаемых и оценку остатка в асимптотике интеграла  $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\lambda x^2} \operatorname{tg} x dx$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . (3 балла)

Ответ:  $\frac{\operatorname{tg} 1}{2\lambda} e^\lambda - \left( \frac{1}{\cos^2 1} - \operatorname{tg} 1 \right) \frac{e^\lambda}{4\lambda^2} + O\left(\frac{e^\lambda}{\lambda^3}\right)$

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему Руше. Сколько нулей имеет функция  $z^4 - \frac{z^3}{3} + \frac{z}{5}$  в круге  $|z| < 1$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: 4

(2) Дать определение конформного отображения. Является ли конформным отображение  $e^z$  в полосе а)  $\pi < \text{Im } z < 4\pi$ ; б)  $0 < \text{Im } z < \pi$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: а) нет, б) да.

- Решить следующие задачи

(3) Вычислить интеграл  $\int_{-1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} dx}{(x+2)^2}$ . (2 балла)

Ответ:  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(4) Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность электростатического поля  $E$  в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \sqrt{2}, \text{Im } z > 0\}$  при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1} = -3$ , где  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \sqrt{2}\}$ ,

- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0\}$ . (2 балла)

Ответ:  $f = 7 - \frac{8i}{\pi} \ln \frac{z+1+\sqrt{2}}{z+1-\sqrt{2}}$ ,  $\varphi = -7 - \frac{8}{\pi} \arg \frac{z+1+\sqrt{2}}{z+1-\sqrt{2}}$ ,  $E = \frac{8i}{\pi} \left( \frac{1}{\bar{z}+1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\bar{z}+1-\sqrt{2}} \right)$

(5) Найти решение задачи Коши  $x'' + 16x = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ t-1, & t > 1 \end{cases}$ ,  $x(0) = -1, x'(0) = 1$  при  $t \geq 0$  операционным методом. (2 балла)

Ответ:  $\theta(t) \left( \frac{\sin 4t}{4} - \cos 4t \right) + \theta(t-1) \left( \frac{t-1}{16} - \frac{\sin 4(t-1)}{64} \right)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Найти два первых слагаемых и оценку остатка в асимптотике интеграла  $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\lambda x^2} \ln(x+1) dx$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . (3 балла)

Ответ:  $\frac{\ln 2}{2\lambda} e^\lambda - (1 - \ln 2) \frac{e^\lambda}{16\lambda^2} + O\left(\frac{e^\lambda}{\lambda^3}\right)$

Вопросы к экзамену по методам математической физики  
5 семестр, 10 января 2024

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему Руше. Сколько нулей имеет функция  $z^4 + \frac{z^3}{5} + \frac{1}{2}$  в круге  $|z| < 1$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: 4

(2) Дать определение конформного отображения. Является ли конформным отображение  $e^z$  в полосе а)  $-2\pi < \text{Im } z < \pi$ ; б)  $-\pi < \text{Im } z < 0$ ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: а) нет, б) да.

- Решить следующие задачи

(3) Вычислить интеграл  $\int_3^\infty \frac{\sqrt[4]{x-3} dx}{x^2}$ . (2 балла)

Ответ:  $\frac{\pi}{3^{\frac{3}{4}} 2\sqrt{2}}$

(4) Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность электростатического поля  $E$  в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, \text{Im } z < 0\}$  при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1} = -3$ , где  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \sqrt{2}\}$ ,
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$ , где  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0\}$ . (2 балла)

Ответ:  $f = -\frac{8i}{\pi} \ln \frac{z-1-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}} - 9$ ,  $\varphi = 9 - \frac{8}{\pi} \arg \frac{z-1-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}}$ ,  $E = \frac{8i}{\pi} \left( \frac{1}{\bar{z}-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\bar{z}-1+\sqrt{2}} \right)$

(5) Найти решение задачи Коши  $x'' + x = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ t-1, & t > 1 \end{cases}$ ,  $x(0) = -3, x'(0) = 1$  при  $t \geq 0$  операционным методом. (2 балла)

Ответ:  $\theta(t)(\sin t - 3 \cos t) + \theta(t-1)(t-1 - \sin(t-1))$

- Выполнить следующее задание.

(6) Найти два первых слагаемых и оценку остатка в асимптотике интеграла  $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\lambda x^2} \text{ctg } x dx$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . (3 балла)

Ответ:  $\frac{\text{ctg } 1}{2\lambda} e^\lambda - \left( \frac{1}{\sin^2 1} - \text{ctg } 1 \right) \frac{e^\lambda}{4\lambda^2} + O\left(\frac{e^\lambda}{\lambda^3}\right)$