Вопросы к экзамену по методам математической физики
5 семестр, 11 января 2025

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\dfrac{2z^3+3z^2}{z^2+1}$. (1.5 балла)

Ответ: $2z+3+\frac{3i-2}{2(z-i)}-\frac{3i+2}{2(z+i)}$.

(2) Дать определение гармонического поля. Является ли указанное поле гармоническим в $\mathbb{C}$? Если да, то найти его комплексный потенциал: а) $2x-y+i(2y+x)$; б) $2x+y+i(x-2y)$ (1.5 балла)

Ответ: а) поле не гармоническое; б) поле гармоническое, $f(z)=\frac{2-i}{2}z^2$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D=\{z\in\mathbb{C}:|z+i|<2, \operatorname{Im} z>0\}$ при граничных условиях
- $\varphi|_{\gamma_1}=-1$, где $\gamma_1=\{z\in\mathbb{C}:|z+i|=2\}$,
- $\varphi|_{\gamma_2}=3$, где $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z=0\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z)=\frac{12i}{\pi}\ln\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}+9$, $E=-\frac{12i}{\pi}(\frac{1}{\overline{z}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\overline{z}+\sqrt{3}})$, $\varphi=\frac{12}{\pi}\arg\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}-9$.

(4) Найти решение задачи Коши $x''-4x=\begin{cases}0, & t\leqslant 1\\ e^{-2t}, & t>1\end{cases}, x(0)=1, x'(0)=-2$ при $t\geqslant 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t)e^{-2t}-\frac{1}{4}\theta(t-1)((t-1)e^{-2t}-\frac{\operatorname{sh}2(t-1)}{2e^2})$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} xe^{\lambda(x^3-\frac{3}{4}x)}dx$ при $\lambda\to+\infty$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{6\lambda}}e^{\frac{\lambda}{4}}(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{arctg} z$ задана в окрестности ломаной $[0,-1+3i]\cup[-1+3i,1]$ условием $f(0)=0$. Найти $f(1)$. (3 балла)

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}$.

Вопросы к экзамену по методам математической физики
5 семестр, 11 января 2025

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\dfrac{z^3+3z^2}{z^2+1}$. (1.5 балла)

Ответ: $z+3+\frac{3i-1}{2(z-i)}-\frac{3i+1}{2(z+i)}$.

(2) Дать определение гармонического поля. Является ли указанное поле гармоническим в $\mathbb{C}$? Если да, то найти его комплексный потенциал: а) $x-2y+i(y+2x)$; б) $x+2y+i(2x-y)$ (1.5 балла)

Ответ: а) поле не гармоническое; б) поле гармоническое, $f(z)=\frac{1-2i}{2}z^2$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D=\{z\in\mathbb{C}:|z+i|<2, \operatorname{Im} z<0\}$ при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1}=-1$, где $\gamma_1=\{z\in\mathbb{C}:|z+i|=2\}$,
- $\varphi|_{\gamma_2}=3$, где $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z=0\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z)=-\frac{6i}{\pi}\ln\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}+3$, $E=\frac{6i}{\pi}(\frac{1}{\overline{z}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\overline{z}+\sqrt{3}})$, $\varphi=-\frac{6}{\pi}\arg\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}-3$.

(4) Найти решение задачи Коши $x''-x=\begin{cases}0, & t\leqslant 1\\ e^{-t}, & t>1\end{cases}$, $x(0)=1, x'(0)=-1$ при $t\geqslant 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t)e^{-t}-\frac{1}{2}\theta(t-1)((t-1)e^{-t}-\frac{\operatorname{sh}(t-1)}{e})$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\displaystyle\int_{-2}^{4} xe^{\lambda(x^3-12x)}dx$ при $\lambda\to+\infty$. (2 балла)

Ответ: $-\sqrt{\frac{\pi}{6\lambda}}e^{16\lambda}(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{arctg} z$ задана в окрестности ломаной $[0,1+3i]\cup[1+3i,-1]$ условием $f(0)=0$. Найти $f(-1)$. (3 балла)

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

Вопросы к экзамену по методам математической физики
5 семестр, 11 января 2025

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\dfrac{2z^3+z^2}{z^2+1}$. (1.5 балла)

Ответ: $2z+1-\frac{2+i}{2(z-i)}-\frac{2-i}{2(z+i)}$.

(2) Дать определение гармонического поля. Является ли указанное поле гармоническим в $\mathbb{C}$? Если да, то найти его комплексный потенциал: а) $-2x-y+i(x-2y)$; б) $y-2x+i(x+2y)$ (1.5 балла)

Ответ: а) поле не гармоническое; б) поле гармоническое, $f(z)=-\frac{2+i}{2}z^2$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D=\{z\in\mathbb{C}:|z+1|<2,\operatorname{Re}z>0\}$ при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1}=-1$, где $\gamma_1=\{z\in\mathbb{C}:|z+1|=2\}$,
- $\varphi|_{\gamma_2}=3$, где $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=0\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z)=\frac{12i}{\pi}\ln\frac{z+i\sqrt{3}}{z-i\sqrt{3}}+9$, $E=-\frac{12i}{\pi}(\frac{1}{\overline{z}-i\sqrt{3}}-\frac{1}{\overline{z}+i\sqrt{3}})$, $\varphi=\frac{12}{\pi}\arg\frac{z+i\sqrt{3}}{z-i\sqrt{3}}-9$.

(4) Найти решение задачи Коши $x''-x=\begin{cases}0, & t\leqslant 1\\ e^t, & t>1\end{cases}$, $x(0)=1, x'(0)=1$ при $t\geqslant 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t)e^t+\frac{1}{2}\theta(t-1)((t-1)e^t-e\operatorname{sh}(t-1))$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} xe^{\lambda(x^3-\frac{1}{3}x)}dx$ при $\lambda\to+\infty$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{\frac{2\lambda}{27}}(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{arctg}z$ задана в окрестности ломаной $[0,-1-3i]\cup[-1-3i,1]$ условием $f(0)=0$. Найти $f(1)$. (3 балла)

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}$.

Вопросы к экзамену по методам математической физики
5 семестр, 11 января 2025

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби. Используя эту теорему, разложить на простейшие дроби функцию $\dfrac{3z^3+2z^2}{z^2+1}$. (1.5 балла)

Ответ: $3z+2+\frac{2i-3}{2(z-i)}-\frac{2i+3}{2(z+i)}$.

(2) Дать определение гармонического поля. Является ли указанное поле гармоническим в $\mathbb{C}$? Если да, то найти его комплексный потенциал: а) $-x-2y+i(2x-y)$; б) $2y-x+i(2x+y)$ (1.5 балла)

Ответ: а) поле не гармоническое; б) поле гармоническое, $f(z)=-\frac{1+2i}{2}z^2$.

- Решить следующие задачи

(3) Найти потенциал φ и напряженность электростатического поля E в области $D=\{z\in\mathbb{C}:|z+1|<2,\operatorname{Re}z<0\}$ при граничных условиях

- $\varphi|_{\gamma_1}=-1$, где $\gamma_1=\{z\in\mathbb{C}:|z+1|=2\}$,
- $\varphi|_{\gamma_2}=3$, где $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=0\}$. (2 балла)

Ответ: $f(z)=\frac{6i}{\pi}\ln\frac{z-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}+3$, $E=\frac{6i}{\pi}(\frac{1}{\overline{z}-i\sqrt{3}}-\frac{1}{\overline{z}+i\sqrt{3}})$, $\varphi=\frac{6}{\pi}\arg\frac{z-i\sqrt{3}}{z+i\sqrt{3}}-3$.

(4) Найти решение задачи Коши $x''-4x=\begin{cases}0, & t\leqslant 1\\ e^{2t}, & t>1\end{cases}$, $x(0)=1, x'(0)=2$ при $t\geqslant 0$ операционным методом. (2 балла)

Ответ: $\theta(t)e^{2t}+\frac{1}{4}\theta(t-1)((t-1)e^{2t}-\frac{e^2\operatorname{sh}2(t-1)}{2})$.

(5) Найти асимптотику интеграла $\displaystyle\int_{-3}^{6}xe^{\lambda(x^3-27x)}dx$ при $\lambda\to+\infty$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{54\lambda}(1+O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}))$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{arctg}z$ задана в окрестности ломаной $[0,1-3i]\cup[1-3i,-1]$ условием $f(0)=0$. Найти $f(-1)$. (3 балла)

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.