ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (6 СЕМЕСТР)

А. А. Пожарский

Содержание

17 марта 2014 г.

1. Специальные функции

1.1. Уравнение Лежандра.

Определение 1.1 (Уравнение Лежандра)**.** *Уравнением Лежандра называют уравнение вида*

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}W+\nu(\nu+1)W=0,$$

где $\nu\in\mathbb{C}$.

Теорема 1.2 (Поведение решений уравнения Лежандра в окрестности его особых точек)**.** *В окрестности точки* $z=1$ *уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_1(z)=1+O(z-1),\quad W_2(z)=\ln(z-1)+O(1),\quad z\to 1.$$

В окрестности точки $z=-1$ *уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_3(z)=1+O(z+1),\quad W_4(z)=\ln(z+1)+O(1),\quad z\to -1.$$

В окрестности бесконечности уравнение Лежандра при $2\nu\notin\mathbb{Z}$ *имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_5(z)=z^{\nu}+O(z^{\nu-1}),\quad W_6(z)=z^{-\nu-1}+O(z^{-\nu-2}),\quad z\to\infty.$$

Доказательство. Следует из теорем **??** и **??**. □

Определение 1.3 (Функция Лежандра)**.** *Решение* P_ν *уравнения Лежандра, регулярное в окрестности точки* $z=1$ *и удовлетворяющее условию*

$$P_\nu(1)=1,$$

называют функцией Лежандра.

Теорема 1.4 (Интегральное представление для функции Лежандра)**.** *Пусть*

- $\nu\in\mathbb{C}$, $z\in(-1,1]$;
- $D=\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-1]\cup[z,1]\big)$;
- γ *– замкнутый гладкий контур в* D *ориентированный против хода часовой стрелки и охватывающий отрезок* $[z,1]$;
- $f(t,z)$ *– регулярная в области* D *по переменной* t *ветвь функции* $\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}$, *удовлетворяющая условию* $\lim\limits_{t\to1}f(t,1)(t-1)=2^\nu$, *где предполагается, что* $2^\nu=e^{\nu\ln 2}$.

Тогда

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i2^\nu}\int\limits_\gamma f(t,z)\,dt \tag{1.1}$$

или, в упрощенной записи,

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i2^\nu}\int\limits_\gamma \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt.$$

Доказательство. Регулярность функции f может быть установлена стандартными методами, например, с помощью введения полярных координат с центрами в точках $t = \pm 1$ и $t = z$.

Проверим, что p_ν удовлетворяет уравнению Лагранжа. Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}f(t,z) + \nu(\nu+1)f(t,z) = C\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t,z)}{t-z}\right),$$

где C – некоторая постоянная (проверка этого равенства довольно длинна и мы ее опустим). Отсюда получим, что

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}p_\nu(z) + \nu(\nu+1)p_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma \left(\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}f(t,z) + \nu(\nu+1)f(t,z)\right) dt =$$

$$= \frac{C}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t,z)}{t-z}\right) dt = 0.$$

Последний интеграл равен нулю в силу замкнутости контура γ и регулярности функции $f(t,z)$ по переменной t в окрестности γ.

Для завершения доказательства заметим, что

$$P_\nu(1) = \frac{1}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma f(t,1)\,dt = \frac{1}{2\pi i 2^\nu}\int\limits_\gamma \frac{(t+1)^\nu}{t-1}\,dt = \frac{(1+1)^\nu}{2^\nu} = 1. \ \square$$

Замечание 1.5. *При $z \notin [-1,1]$ значения функции $P_\nu(z)$ могут быть получены с помощью аналитического продолжения интеграла* (1.1).

Теорема 1.6 (Вывод интегрального представления для функции Лежандра с помощью метода Лапласа)**.** *Интегральное представление для функции Лежандра может быть получено применением метода Лапласа к уравнению Лежандра.*

Доказательство. Будем искать решение уравнения Лежандра в виде интеграла Лапласа

$$W(z) = \int\limits_\Gamma V(t)e^{zt}\,dt. \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в уравнение Лежандра получим, что

$$t^2V + 2tV' - [t^2 + \nu(\nu+1)]V = 0, \quad t^2(V'(t) - zV(t))e^{zt}\Big|_\Gamma. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) является возмущением уравнением Эйлера

$$t^2V + 2tV' - \nu(\nu+1)V = 0,$$

одно из решений которого имеет вид t^ν (второе равно либо $t^{-\nu-1}$, либо $t^\nu \ln t$). Сделаем подстановку $V(t) = t^\nu Y(t)$ в уравнении (1.3). В результате получим, что

$$tY'' + 2(\nu+1)Y' - tY = 0. \tag{1.4}$$

Решая уравнение (1.4) методом Лапласа, получим

$$Y(t) = \int\limits_\gamma (\zeta^2-1)^\nu e^{-\zeta t}\,d\zeta,$$

где γ – подходящий контур интегрирования

Собирая полученные формулы вместе, найдем

$$W(z) = \int\limits_\Gamma t^\nu e^{zt} \left(\int\limits_\gamma (\zeta^2-1)^\nu e^{-\zeta t}\, d\zeta \right) dt = \int\limits_\gamma (\zeta^2-1)^\nu \left(\int\limits_\Gamma t^\nu e^{(z-\zeta)t}\, dt \right) d\zeta = \Big[\tau = (\zeta - z)t\Big] =$$

$$= \int\limits_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(\zeta-z)^{\nu+1}} \left(\int\limits_{\tilde\Gamma} t^\nu e^{-t}\, dt \right) d\zeta = C \int\limits_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta,$$

где C – некоторая постоянная. Мы позволим себе не останавливаться на описании контуров γ, Γ и $\tilde\Gamma$, отметим лишь, что при правильном их выборе перестановка интегралов возможна в силу теоремы Фубини. □

Теорема 1.7 (Поведение функции Лежандра в окрестности точки -1)**.** *В окрестности точки $z_0 = -1$ справедливо равенство*

$$P_\nu(z) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \ln(z+1) p_\nu(-z) + \omega(z),$$

где ω – некоторая регулярная функция в окрестности $z_0 = -1$.

Доказательство. Заметим, что функция $P_\nu(-z)$ является решением уравнения Лежандра, причем $P_\nu(-z)$ – регулярна в окрестности точки $z_0 = -1$. Отсюда и из теоремы **??** следует, что в окрестности точки $z_0 = -1$ справедливо разложение вида

$$P_\nu(z) = A \ln(z+1) P_\nu(-z) + \omega(z),$$

где A – некоторая постоянная.

Утверждение о том, что $A = \frac{\sin \pi\nu}{\pi}$ мы позволим себе оставить без доказательства. □

1.2. **Полиномы Лежандра.**

Теорема 1.8 (Формула Родрига (для полиномов Лежандра))**.** *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, тогда справедлива формула Родрига*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n.$$

Доказательство. Из теоремы 1.4 следует, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i 2^n} \int\limits_{|t-z|=\varepsilon} \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

где ε – достаточно малое положительное число. Отсюда, применяя теорему о вычетах, получим что

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \operatorname*{res}_{t=z} \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \Big|_{t=z} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n. \square$$

Определение 1.9 (Полиномы Лежандра)**.** *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$ функцию вида*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

называют полиномом Лежандра ($P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1)$, ...).

Теорема 1.10 (Симметричность оператора отвечающего уравнению Лежандра)**.** *Пусть*

- $\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x)$;

- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \{u \mid u \in C^2(-1,1) \cap C[-1,1]\}$;
- $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(-1,1)$.

Тогда

$$\forall\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v).$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ и $v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Интегрируя по частям, получим, что

$$(\mathcal{L}u, v) = -\int\limits_{-1}^{1} \left((1-x^2)u'(x)\right)' v(x)\,dx = -(1-x^2)u'(x)v(x)\Big|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)u'(x)v'(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)v'(x)\,du(x) = (1-x^2)v'(x)u(x)\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} u(x)\left((1-x^2)v'(x)\right)'\,dx = (u, \mathcal{L}v). \ \square$$

Теорема 1.11 (Свойства полиномов Лежандра)**.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad P_{-n-1} = P_n$.
(2) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+$ *полином* P_n *имеет ровно* n *однократных корней на отрезке* $[-1,1]$.
(3) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\ z \in \mathbb{C} \quad P_n(z) = (-1)^n P_n(-z)$.
(4) $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ – *ортонормированный базис в* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. (1) Следует из того, что уравнение Лежандра при $\nu = n$ и $\nu = -n-1$ имеет один и тот же вид.

(2) При $n = 0$ утверждение очевидно. Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(z) = (z^2-1)^n$ имеет нули порядка n в точках ± 1. Из теоремы Ролля следует, что функция $f'(z)$ имеет по крайней мере один нуль $z_1^{(1)}$ на интервале $(-1,1)$. Отсюда и из теоремы Ролля следует, что функция $f^{(2)}(z)$ имеет по крайней мере по одному нулю $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$ на каждом из интервалов $(-1, z_1^{(1)})$ и $(z_1^{(1)}, 1)$. Продолжая рассуждения получим, что функция $f^{(n)}(z)$ имеет по крайней по одному нулю $z_1^{(n)}$, $z_2^{(n)}$, $\ldots$ $z_n^{(n)}$ на каждом из интервалов вида

$$\left(-1, z_1^{(n-1)}\right), \quad \left(z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}\right), \quad \ldots, \quad \left(z_{n-1}^{(n-1)}, 1\right).$$

(3) Легко видеть, что

$$P_n(-z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(-z)^n}((-z)^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(-z)^n}(z^2-1)^n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = (-1)^n P_n(z).$$

(4) Пусть $\mathcal{L}$ – оператор, отвечающий уравнению Лежандра. Для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $n \neq m$ верно, что

$$\mathcal{L}P_n = n(n+1)P_n, \quad \mathcal{L}P_m = m(m+1)P_m.$$

Отсюда и из теоремы 1.10 получим, что

$$n(n+1)(P_n, P_m) = (\mathcal{L}P_n, P_m) = (P_n, \mathcal{L}P_m) = m(m+1)(P_n, P_m),$$

откуда следует, что

$$(P_n, P_m) = 0.$$

Таким образом, полиномы Лежандра образуют ортогональное семейство в $L_2(-1,1)$.

Далее, при $n \in \mathbb{Z}_+$ верно, что

$$\|P_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^n P_n(x)}{dx^n}\,dx = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \left[x^2 = t,\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right] = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^n t^{-1/2}\,dt =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2}{(2n+1)}\frac{(2n)!}{2^n n!(2n-1)\ldots 1} = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Таким образом, $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированное семейство в $L_2(-1,1)$.

Для завершения доказательства необходимо показать, что любой элемент из $L_2(-1,1)$ можно разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Легко видеть, что линейная оболочка полиномов Лежандра совпадает с пространством полиномов на отрезке $(-1,1)$ (любой полином можно разложить в конечный ряд по полиномам Лежандра). Далее, известно, что пространство полиномов на отрезке плотно в пространстве непрерывных функций (по норме в $C(-1,1)$, а, следовательно, и по норме в $L_2(-1,1)$). В свою очередь, пространство непрерывных функций плотно в $L_2(-1,1)$ (по норме в $L_2(-1,1)$). Окончательно, получим, что линейная оболочка полиномов Лежандра плотна в $L_2(-1,1)$ (по норме в $L_2(-1,1)$). Отсюда, с учетом того, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему, следует, что любой элемент из $L_2(-1,1)$ можно разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра. □

Определение 1.12 (Сингулярная задача Штурма-Лиувиллия для уравнения Лежандра)**.** *Сингулярной задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Лежандра называют задачу об определении всех параметров λ таких, что на интервале $(-1,1)$ существует нетривиальное решение задачи*

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}),$$

где

- $\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x)$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \{u \mid u \in C^2(-1,1) \cap C[-1,1]\}$.

Значение параметра λ, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.

Теорема 1.13 (Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувиллия для уравнения Лежандра)**.** *Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувиллия для уравнения Лежандра имеют вид*

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_n = n(n+1),\ u_n = P_n.$$

Доказательство. Следует из теорем 1.7 и 1.11. □

1.3. **Присоединенные функции Лежандра.**

Определение 1.14 (Присоединенное уравнение Лежандра)**.** *Присоединенным уравнением Лежандра называют уравнение вида*

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}W - \frac{m^2}{1-z^2}W + \nu(\nu+1)W = 0,$$

где $\nu \in \mathbb{C}$ и $m = \mathbb{N}$.

Теорема 1.15 (Поведение решений присоединенного уравнения Лежандра в окрестности особых точек)**.** *В окрестности точки $z = 1$ присоединенное уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением*

$$W_1(z) = (z-1)^{\frac{m}{2}} + O\left((z-1)^{\frac{m+2}{2}}\right), \quad W_2(z) = (z-1)^{-\frac{m}{2}} + o\left((z-1)^{-\frac{m}{2}}\right), \quad z \to 1.$$

В окрестности точки $z = -1$ присоединенное уравнение Лежандра имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением

$$W_3(z) = (z+1)^{\frac{m}{2}} + O\left((z+1)^{\frac{m+2}{2}}\right), \quad W_4(z) = (z+1)^{-\frac{m}{2}} + o\left((z+1)^{-\frac{m}{2}}\right), \quad z \to -1.$$

В окрестности бесконечности уравнение Лежандра при $2\nu \notin \mathbb{Z}$ имеет два линейно независимых решения со следующим асимптотическим поведением

$$W_5(z) = z^{\nu} + O(z^{\nu-1}), \quad W_6(z) = z^{-\nu-1} + O(z^{-\nu-2}), \quad z \to \infty.$$

Теорема 1.16 (Связь между решениями присоединенного уравнения Лежандра и решениями уравнения Лежандра)**.** *Пусть V – решение уравнения Лежандра. Тогда функция*

$$W(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}V(z)$$

является решением присоединенного уравнения Лежандра.

Доказательство. Сделаем подстановку

$$W(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}\varphi(z)$$

в присоединенном уравнении Лежандра. В результате получим, что φ удовлетворяет уравнению вида

$$(1-z^2)\varphi'' - 2z(m+1)\varphi' + (\nu^2+\nu-m^2-m)\varphi = 0. \tag{1.5}$$

С другой стороны, дифференцируя m раз уравнение Лежандра

$$(1-z^2)V'' - 2zV' + (\nu^2+\nu)V = 0$$

по переменной z, получим, что

$$\begin{aligned}
m=1 &: (1-z^2)V^{(3)} - 2(1+1)zV^{(2)} + (\nu^2+\nu-2)V^{(1)} = 0,\\
m=2 &: (1-z^2)V^{(4)} - 2(2+1)zV^{(3)} + (\nu^2+\nu-2-4)V^{(2)} = 0,\\
m=3 &: (1-z^2)V^{(5)} - 2(3+1)zV^{(4)} + (\nu^2+\nu-2-4-6)V^{(3)} = 0,
\end{aligned}$$

$$(1-z^2)V^{(m+2)} - 2(m+1)zV^{(m+1)} + (\nu^2+\nu-m^2-m)V^{(m)} = 0. \tag{1.6}$$

Сравнивая (1.5) и (1.6) получим утверждение теоремы. □

Определение 1.17 (Присоединенные функции Лежандра)**.** *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{N}$ таких, что $m \geqslant n$ функцию вида*

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)$$

называют присоединенной функцией Лежандра.

Кроме того, что полагают, что $P_n^0 \equiv P_n$.

Теорема 1.18 (Симметричность оператора отвечающего присоединенному уравнению Лежандра)**.** *Пусть*

- $\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x) + \frac{m^2}{1-x^2}u(x)$, *где* $m \in \mathbb{N}$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} \in C^2(-1,1) \cap C[-1,1] \right\}$;
- $(\cdot,\cdot)$ – *скалярное произведение в* $L_2(-1,1)$.

Тогда

$$\forall\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v).$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ и $v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$. Отсюда следует, что корректно определен интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{1-x^2}\,dx.$$

Также как и при доказательстве теоремы 1.10, интегрируя по частям, получим, что

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v). \ \square$$

Теорема 1.19 (Основное свойство присоединенных функций Лежандра)**.** *Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ семейство функций $\{P_n^m\}_{n=m}^{\infty}$ образует ортогональный базис в $L_2(-1,1)$.*[1]

Доказательство. Из симметричности оператора, отвечающего присоединенному уравнению Лежандра, следует, что семейство $\{P_n^m\}_{n=m}^{\infty}$ является ортогональным в $L_2(-1,1)$.

Полнота семейства $\{P_n^m\}_{n=m}^{\infty}$ в $L_2(-1,1)$ может быть доказана также, как полнота семейства $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $L_2(-1,1)$ (см. доказательство теоремы 1.11). $\square$

Определение 1.20 (Сингулярная задача Штурма-Лиувиллия для присоединенного уравнения Лежандра)**.** *Сингулярной задачей Штурма-Лиувилля для присоединенного уравнения Лежандра называют задачу об определении всех параметров λ таких, что на интервале $(-1,1)$ существует нетривиальное решение задачи*

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}),$$

где

- $\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}u(x) + \frac{m^2}{1-x^2}u(x)$, $m \in \mathbb{N}$;
- $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \left\{ u \;\middle|\; \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} \in C^2(-1,1) \cap C[-1,1] \right\}$.

Значение параметра λ, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.

[1] При $m \in \mathbb{Z}_+$ семейство функций $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m \right\}_{n=m}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(-1,1)$.

Теорема 1.21 (Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма–Лиувиллия для присоединенного уравнения Лежандра)**.** *Собственные значения и собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувиллия для присоединенного уравнения Лежандра при $m \in \mathbb{N}$ имеют вид*

$$\forall\ n \geqslant m \quad \lambda_n = n(n+1),\ u_n = P_n^m.$$

Доказательство. Следует из теорем 1.7, 1.15 и 1.16. □

1.4. **Сферические функции.**

Теорема 1.22 (Оператор Лапласа в сферических координатах)**.** *Пусть*

- *в $\mathbb{R}^3$ заданы сферические координаты отображением ψ вида*

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

  где $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$ и $r \in (0,+\infty)$;
- *Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$;*
- *$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.*

Тогда

$$(\Delta f)\circ\psi = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right](f\circ\psi),$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Доказательство. Без доказательства (доказано на 1-ом курсе).□

Определение 1.23 (Оператор Лапласа-Бельтрами)**.** *Оператор*

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

называют оператором Лапласа-Бельтрами на сфере в $\mathbb{R}^3$.

Определение 1.24 (Гладкая функция на сфере)**.** *Пусть*

- *$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$;*
- *$f : S \to \mathbb{R}$.*

Говорят, что функция f бесконечно дифференцируема на сфере (или принадлежит классу $C^\infty(S)$), если для любой $s \in S$ найдутся область $D \subset \mathbb{R}^2$ и отображение $\psi \in C^\infty(D,S)$ такие, что

(1) *$s \in \psi(D)$;*
(2) *$f\circ\psi \in C^\infty(D)$.*

Определение 1.25 (Задача на собственные функции и собственные числа для оператора Лапласа-Бельтрами)**.** *Пусть*

- *S – единичная сфера с центром в начале координат в $\mathbb{R}^3$;*
- *$\Delta_{\theta,\varphi}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на сфере S;*
- *$\mathrm{Dom}(\Delta_{\theta,\varphi}) = C^\infty(S)$.*

Задачей на собственные функции и собственные числа для оператора Лапласа-Бельтрами называют задачу об определении всех параметров λ таких, что

$$-\Delta_{\theta,\varphi}u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\Delta_{\theta,\varphi}).$$

Значение параметра λ, при котором данная задача имеет нетривиальное решение, называют собственным значением оператора Лапласа-Бельтрами, а соответствующее решение называется собственной функцией оператора Лапласа-Бельтрами.

Теорема 1.26 (Собственные функции и собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами)**.** *Пусть*

- S *– единичная сфера с центром в начале координат в* $\mathbb{R}^3$*;*
- $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_n = -n(n+1)$*;*
- $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\ m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leqslant n\} \quad Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta)$*;*

Тогда

(1) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\ m \in \{m \mid m \in \mathbb{Z}, |m| \leqslant n\} \quad -\Delta_{\theta,\varphi}Y_n^m = \lambda_n Y_n^m,\ Y_n^m \in C^\infty(S)$*;*
(2) $\{\lambda_n\}$ *– полный набор собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на* S*;*
(3) $\{Y_n^m\}$ *– полный набор собственных функций оператора Лапласа-Бельтрами на* S*.*

Доказательство. Доказательство проведем методом разделения переменных. Для этого будем искать решение задачи

$$-\Delta_{\theta,\varphi}u = \lambda u, \quad u \in \mathrm{Dom}(\Delta_{\theta,\varphi}) \tag{1.7}$$

в виде

$$u(\theta,\varphi) = Z(\theta)\Phi(\varphi). \tag{1.8}$$

Подставляя представление (1.8) в уравнение (1.7), получим, что

$$-\frac{\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'}{\sin\theta}\Phi(\varphi) - \frac{Z(\theta)}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi) = \lambda Z(\theta)\Phi(\varphi),$$

$$\frac{\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'\sin\theta}{Z(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \tag{1.9}$$

Заметим, что равенство (1.9) должно выполняться для всех $\theta \in (0,\pi)$ и $\varphi \in (0,2\pi)$. Отсюда, учитывая, что левая часть равенства (1.9) зависит только от θ, а правая – от φ, получим, что найдется постоянная ν такая, что

$$\frac{\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'\sin\theta}{Z(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu. \tag{1.10}$$

Отсюда и из условия $Z(\theta)\Phi(\varphi) \in C^\infty(S)$ следует, что Φ – 2π-периодическое решение уравнения

$$-\Phi'' = \nu\Phi.$$

Решая полученную краевую задачу на функцию Φ получим, что

$$\forall\ m \in \mathbb{Z} \quad \nu_m = m^2,\ \Phi_n = e^{im\varphi}.$$

Отсюда и из (1.10) получим, что Z удовлетворяет уравнению вида

$$\big(Z'\sin\theta\big)'\sin\theta + \lambda Z\sin^2\theta = m^2 Z. \tag{1.11}$$

Сделаем замену переменных

$$\cos\theta = t, \quad Z(\theta) = v(\cos\theta) \tag{1.12}$$

в уравнении (1.11). В результате получим, что

$$Z'(\theta)\sin\theta = \frac{\partial v(\cos\theta)}{\partial\theta}\sin\theta = -v'(\cos\theta)\sin^2\theta = -v'(t)(1-t^2)\big|_{t=\cos\theta}\ ,$$

$$\big(Z'(\theta)\sin\theta\big)'\sin\theta = \big(v'(t)(1-t^2)\big)'(1-t^2)\big|_{t=\cos\theta}\ ,$$

откуда

$$-\big(v'(1-t^2)\big)' + \frac{m^2}{1-t^2}v = \lambda v.$$

Определение 1.27 (Сферическая функция). *Сферической функцией порядка $l \in \mathbb{Z}_+$ называют любой однородный гармонический полином степени l, рассматриваемый на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1.28 (Симметричность оператора Лапласа-Бельтрами). *Пусть*

- *S – единичная сфера с центром в начале координат в $\mathbb{R}^3$;*
- *$\Delta_{\theta,\varphi}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на сфере S;*
- *$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = C^\infty(S)$;*
- *$(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathcal{H} = L_2\left((0,\pi)\times(0,2\pi);\ \sin\theta\right)$, другими словами,*

$$\forall\ u \in \mathcal{H}\ \forall\ v \in \mathcal{H} \quad (u,v) = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} u(\theta,\varphi)\overline{v(\theta,\varphi)}\sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Тогда

$$\forall\ u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L})\ \forall\ v \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v).$$

Доказательство. Доказывается интегрированием по частям (самостоятельно). □