диться. И действительно, в 1873 г. П. Дюбуа-Реймон установил, что существуют непрерывные в точке функции, ряды Фурье которых в этой точке расходятся. Вплоть до 1966 г. не было известно, сходится ли ряд Фурье каждой непрерывной функции хотя бы в одной точке.

Эта проблема была решена в 1966 г., когда Л. Карлесон доказал следующую теорему.

Теорема 7.10 (*теорема Карлесона*). Для любых действительных чисел a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ сходится, тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

сходится почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$. #

Из теоремы Карлесона следует, что ряды Фурье (7.10) по тригонометрической системе (7.7) сходятся почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ для всякой функции из $L_2[-\pi,\pi]$, и в частности для всякой непрерывной функции.

7.7. Многочлены Лежандра

Наряду с *тригонометрической* часто используют и другую систему элементарных функций — систему многочленов. Построим, например, *базис гильбертова пространства* $L_2[-1,1]$, состоящий из многочленов. Для этого рассмотрим последовательность одночленов 1, x, x^2, ..., x^n, как систему элементов гильбертова пространства $L_2[-1,1]$. Линейной оболочкой этой системы является *множество* всех многочленов, которое по теореме 7.7 *всюду плотно* в $L_2[-1,1]$. Это значит, что система одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ является *замкнутой системой* в $L_2[-1,1]$. Однако замкнутая система может и не быть базисом в гильбертовом пространстве.

Теорема 7.11. Система одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ не является базисом в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$.

◄ Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L_2[-1,1]$. Если предположить, что система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ является базисом в $L_2[-1,1]$, то функция $f(x)$ должна иметь единственное разложение в *ряд* по этой системе, т.е.

$$f(x) \overset{L_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{7.11}$$

причем *сходимость* ряда здесь необходимо понимать *по норме* гильбертова пространства $L_2[-1,1]$, т.е. *в среднем квадратичном*. Это значит, что последовательность *частичных сумм* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ в среднем квадратичном сходится к функции $f(x)$:

$$\|f - S_n\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right|^2 dx} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Из сходимости последовательности в среднем квадратичном следует *сходимость* этой последовательности *в среднем*. Поэтому

$$\|f - S_n\|_{L_1} = \int\limits_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right| dx \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{7.12}$$

Согласно свойствам *интеграла Лебега*, функция $f(x)$, *суммируемая с квадратом* на $[-1, 1]$, является суммируемой на $[-1, 1]$ и, следовательно, является суммируемой на любом *измеримом* подмножестве отрезка $[-1, 1]$. В частности, на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$ существует конечный интеграл Лебега от функции $f(x)$. Введем интеграл Лебега с переменным верхним пределом, полагая

$$\int_0^s f(x)\,dx = (L)\int_{[0,s]} f(x)\,dx$$

при $s \geqslant 0$ и

$$\int_0^s f(x)\,dx = -(L)\int_{[s,0]} f(x)\,dx$$

при $s < 0$. Рассмотрим функцию

$$F(s) = \int_0^s f(x)\,dx, \quad s \in [-1, 1]$$

и *функциональную последовательность* $\{F_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ с общим членом

$$F_n(s) = \int_0^s \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\Big)\,dx, \quad s \in [-1, 1],$$

где коэффициенты c_k те же, что и в равенстве (7.11).

Докажем, что если для функции $f(x)$ верно разложение (7.11), то *функциональная последовательность* $\{F_n(s)\}$ *сходится поточечно* на отрезке $[-1, 1]$ к функции $F(s)$. Действительно, используя свойства интеграла Лебега и сходимость (7.12), для всех $s \in [-1, 1]$ получаем

$$|F_n(s) - F(s)| \leqslant \left|\int_0^s \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\Big)\,dx - \int_0^s f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^s \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right| dx\right| \leqslant \int_{-1}^{1} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right| dx \to 0$$

при $n \to \infty$, откуда и следует поточечная сходимость последовательности $\{F_n(s)\}$. Из этой сходимости с учетом линейных свойств интеграла Лебега и его связи с *интегралом Римана* при $s \in [-1, 1]$ имеем

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^s \Big(\sum_{k=0}^n c_k x^k\Big)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \Big(\int_0^s c_k x^k\, dx\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \Big(\int_0^s c_k x^k\, dx\Big) = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k+1} s^{k+1}$$

Таким образом, если система одночленов $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ является базисом в $L_2[-1,1]$, то для всякой функции $f \in L_2[-1,1]$ построенную по ней функцию $F(s)$ на отрезке $[-1, 1]$ можно представить *степенным рядом*, сходящимся к $F(s)$ поточечно на этом отрезке. Но тогда функция $F(s)$ является *действительной аналитической функцией* на отрезке $[-1, 1]$ и, в частности, *бесконечно дифференцируемой* в интервале $(-1, 1)$ (см. теорему 2.19). Однако можно привести примеры функций из $L_2[-1,1]$, для которых функция $F(s)$ не будет аналитической на отрезке $[-1, 1]$. Например, для функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ в силу ограниченности принадлежащей $L_2[-1,1]$ функция

$$F(s) = \int_0^s \operatorname{sgn}(x)\, dx = |s|, \quad s \in [-1, 1],$$

не дифференцируема в нуле. Полученное противоречие доказывает, что система одночленов $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ не является базисом в $L_2[-1,1]$. ►

Нетрудно показать, незначительно изменив доказательство теоремы 7.11, что система $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ не является базисом ни в каком другом гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$.

Хотя система $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ не является базисом в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$, она, как мы отмечали ранее, есть замкнутая *линейно независимая система* в $L_2[-1,1]$, т.е. замыкание ее линейной оболочки совпадает с $L_2[-1,1]$. Для таких систем имеется простой способ получения на их основе базисов гильбертова пространства — *процесс ортогонализации Грама — Шмидта*. Применим к системе одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ процесс ортогонализации, в результате которого получим *ортонормированный базис*

$$Q_0(x), \quad Q_1(x), \qquad Q_k(x), \tag{7.13}$$

в *сепарабельном гильбертовом пространстве* $L_2[-1,1]$ (см. следствие 6.4). Заметим, что наряду с системой (7.13) ортонормированным базисом будет и любая другая система, члены которой отличаются от соответствующих членов системы (7.13) только знаком. В соответствии с процессом ортогонализации каждый элемент $Q_k(x)$ полученного ортонормированного базиса является линейной комбинацией первых $k+1$ элементов 1, x, x^2, ..., x^k исходной системы, т.е. является многочленом степени k. Таким образом, ортонормированный базис (7.13) состоит из многочленов.

Учитывая вид *скалярного произведения* в $L_2[-1,1]$, вычисляем в явном виде несколько первых членов ортонормированного базиса (7.13):

$$Q_0(x) = 1;$$

$$Q_1(x) = x - \frac{(x,\, Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0(x) = x - \frac{\int\limits_{-1}^{1} x\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} dx} \cdot 1 = x;$$

$$Q_2(x) = x^2 - \frac{(x^2,\, Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0(x) - \frac{(x^2,\, Q_1)}{\|Q_1\|^2} Q_1(x) =$$

$$= x^2 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} dx} \cdot 1 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx} x = x^2 - \frac{1}{3};$$

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{(x^3,\, Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0(x) - \frac{(x^3,\, Q_1)}{\|Q_1\|^2} Q_1(x) -$$

$$- \frac{(x^3,\, Q_2)}{\|Q_2\|^2} Q_2(x) = x^3 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} dx} \cdot 1 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx} x -$$

$$- \frac{\int\limits_{-1}^{1} x^3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx}{\int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Продолжая вычисления, в принципе можно вычислить в явном виде любой член $Q_k(x)$ ортонормированного базиса (7.13). Однако этот путь технически сложен, сопряжен с громоздкими вычислениями и не приводит к легко устанавливаемому явному представлению многочлена $Q_k(x)$. Как отмечалось, точные выражения для $Q_k(x)$ не обязательны. Достаточно построить систему, члены которой совпадали бы с членами системы (7.13) с точностью до постоянного числового множителя. Тогда, пронормировав эту систему, получим требуемый ортонормированный базис. Покажем, что всякий многочлен $Q_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленом

$$R_k(x) = \frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^k$$

(при $k = 0$ считаем, что $R_0(x) \equiv 1$). Причем докажем это утверждение не путем явного вычисления многочленов $R_k(x)$, а используя только свойства системы функций $\{R_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 7.12. Система функций $\{R_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является *ортогональной системой* в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$.

◀ Для всякого k функция $R_k(x)$ является многочленом k-й степени, т.е. непрерывной функцией, не равной тождественно нулю на отрезке $[-1, 1]$. Таким образом, при любом k функция $R_k(x)$ не является нулевым элементом в $L_2[-1,1]$.

Докажем, что

$$(R_k, R_n) = \int_{-1}^{1} R_k(x) R_n(x)\, dx = 0, \quad k \neq n.$$

Пусть для определенности $k < n$. Тогда вследствие того, что многочлен $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ имеет корни -1 и $+1$ кратности n, производная порядка $m < n$ этого многочлена будет иметь корни -1 и $+1$ кратности $n - m \geqslant 1$. Следовательно,

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = 0, \quad \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = 0$$

для всех* $m = \overline{0, n-1}$. Учитывая эти равенства, проинтегрируем по частям** скалярное произведение функций $R_k(x)$ и $R_n(x)$:

$$(R_k, R_n) = \int_{-1}^{1} R_k(x) R_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\Big)\Big(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big) dx =$$

$$= \Big(\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\Big)\Big(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k\Big)\Big(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big) dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k\Big)\Big(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big) dx.$$

*Напомним, что „нулевой“ производной от функции считается сама функция.

**Интегрирование по частям возможно, поскольку интеграл Лебега для многочленов совпадает с интегралом Римана.

Повторяя процесс интегрирования по частям n раз, получаем

$$(R_k,\, R_n) = (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(x^2-1)^k\Big)(x^2-1)^n\,dx.$$

Многочлен $(x^2-1)^k$ степени $2k$ имеет нулевую производную порядка $k+n > 2k$. Поэтому и интеграл в последнем равенстве справа равен нулю, т.е. $(R_k,\, R_n) = 0$ при $k < n$. ►

Сравним теперь системы $\{Q_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{R_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Всякая функция $R_k(x) = \dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$, будучи k-й производной многочлена степени $2k$, сама является многочленом степени k, т.е. принадлежит *подпространству*, порожденному первыми $k+1$ элементами системы $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$. Наоборот, любой одночлен x^k принадлежит подпространству, порожденному первыми $k+1$ элементами системы $\{R_k(x)\}$. Поэтому две ортогональные системы многочленов $\{Q_k(x)\}$ и $\{R_k(x)\}$ связаны с системой одночленов $\{x^k\}$ следующим образом (см. теорему 6.15): k-е элементы обеих систем принадлежат линейной оболочке элементов 1, x, x^k системы $\{x^k\}$. Отсюда следует, что два k-х элемента систем $\{R_k(x)\}$ и $\{Q_k(x)\}$ могут отличаться как элементы гильбертова пространства $L_2[-1,1]$ только постоянным числовым множителем. Поскольку $R_k(x)$ и $Q_k(x)$ являются многочленами (непрерывными функциями), то они как функции различаются только постоянным множителем.

Чтобы из ортогональной системы $\{R_k(x)\}$ получить ортонормированную, нужно элементы этой системы пронормировать. Применяя уже использовавшийся прием многократного интегрирования по частям, получаем

$$\|R_k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} R_k^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \Big(\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\Big)\Big(\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\Big)\,dx =$$

$$= (-1)^k \int\limits_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2-1)^k\Big)(x^2-1)^k\,dx = (-1)^k(2k)! \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^k\,dx.$$

Вычислим интегралы

$$I_k = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^k\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots$$

используя рекуррентные формулы.

При $k=0$ получаем $I_0 = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^0\,dx = 2$. А при $k \geqslant 1$ имеем

$$I_k = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^k\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^{k-1}(x^2-1)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^{k-1}x^2\,dx - I_{k-1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^{k-1}x\,d(x^2-1) -$$

$$- I_{k-1} = \frac{1}{2k}\int\limits_{-1}^{1} x\,d(x^2-1)^k - I_{k-1} =$$

$$= \frac{x(x^2-1)^k}{2k}\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{2k}\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^k\,dx - I_{k-1} = -\frac{1}{2k}I_k - I_{k-1}.$$

Отсюда заключаем, что

$$I_k = -\frac{2k}{2k+1}I_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Применяя полученную формулу n раз, находим

$$I_n = (-1)^n\frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}I_0 = (-1)^n\frac{2^{n+1}n!}{(2n+1)!!}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где по определению $(2k+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)$.

С помощью найденного интеграла вычисляем норму многочлена $R_k(x)$:

$$\|R_k\|^2 = (-1)^k(2k)!\,I_k = \frac{2^{k+1}(2k)!\,k!}{(2k+1)!!} = \frac{2^{k+1}k!\,(2k)!!}{2k+1} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1},$$

где $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)$. Таким образом,

$$\|R_k\| = k!\,2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

а система пронормированных многочленов имеет вид

$$\frac{R_k(x)}{\|R_k\|} = \frac{1}{k!\,2^k}\sqrt{\frac{2k+1}{2}}R_k(x) =$$
$$= \frac{1}{k!\,2^k}\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (7.14)$$

и представляет собой ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$.

Обычно в качестве базиса в $L_2[-1,1]$ используют не ортонормированную систему многочленов (7.14) с громоздким радикалом $\sqrt{\frac{2k+1}{2}}$, а более простую ортогональную (но не ортонормированную) систему многочленов

$$P_k(x) = \frac{1}{k!\,2^k}\,\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7.15)$$

Многочлены $P_k(x)$ называют ***многочленами Лежандра****, а их представление (7.15) — ***формулой Родрига***.

Многочлены Лежандра попарно ортогональны, однако их нормы не равны единице:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\,P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & k = n. \end{cases}$$

Поскольку система $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$, то каждую функ-

---

*Лежандр Адриен Мари (Legendre A.M.) (1752–1833) — французский математик.

цию $f(x) \in L_2[-1,1]$ можно однозначно представить своим *рядом Фурье* по системе многочленов Лежандра:

$$f(x) \stackrel{L_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x),$$

где сходимость ряда справа рассматривается относительно нормы в $L_2[-1,1]$, т.е. в среднем квадратичном, а равенство выполняется почти всюду на отрезке $[-1, 1]$. *Коэффициенты Фурье* c_k определяются по формулам

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_k(x)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Как производные четных функций $\left(x^2 - 1\right)^k / (k!\, 2^k)$, многочлены Лежандра являются попеременно четными и нечетными функциями. Поэтому в силу симметричности отрезка интегрирования $[-1, 1]$ четные функции из $L_2[-1,1]$ можно разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра с четными номерами:

$$f(x) \stackrel{L_2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} P_{2m}(x),$$

где

$$c_{2m} = \frac{4m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_{2m}(x)\, dx =$$

$$= (4m+1) \int_{0}^{1} f(x)\, P_{2m}(x)\, dx, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Нечетные функции из $L_2[-1,1]$ имеют ряд Фурье по многочленам Лежандра с нечетными номерами:

$$f(x) \stackrel{L_2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} P_{2m+1}(x),$$

где

$$c_{2m+1} = \frac{4m+3}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, P_{2m+1}(x)\, dx =$$

$$= (4m+3) \int\limits_{0}^{1} f(x)\, P_{2m+1}(x)\, dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 7.2. Разложим в ряд Фурье по многочленам Лежандра в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 100, & x = -1; \\ -1, & -1 < x < 0; \\ -500, & x = 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ 300, & x = 1. \end{cases}$$

В $L_2[-1,1]$ любую функцию можно произвольно изменить на множестве *меры* нуль, сохраняя ее неизменной как элемент этого гильбертова пространства. Учитывая это, заменим заданную функцию более простой:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ представляют собой один и тот же элемент гильбертова пространства $L_2[-1,1]$. Поэтому их ряды Фурье по ортогональному базису в $L_2[-1,1]$, состоящему из многочленов Лежандра, совпадают. Функция $g(x)$ нечетна на симметричном отрезке $[-1, 1]$, поэтому она имеет ряд Фурье по многочленам Лежандра с нечетными номерами:

$$g(x) \overset{L_2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} P_{2m+1}(x),$$

где

$$c_{2m+1} = (4m+3)\int\limits_0^1 g(x)\,P_{2m+1}(x)\,dx =$$

$$= (4m+3)\int\limits_0^1 P_{2m+1}(x)\,dx, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Используя формулы Родрига, находим

$$c_{2m+1} = \frac{4m+3}{(2m+1)!\,2^{2m+1}}\int\limits_0^1 \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}(x^2-1)^{2m+1}\,dx =$$

$$= \frac{4m+3}{(2m+1)!\,2^{2m+1}}\,\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x^2-1)^{2m+1}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4m+3}{(2m+1)!\,2^{2m+1}}\big(F_m(1)-F_m(0)\big),$$

где

$$F_m(x) = \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x^2-1)^{2m+1}, m = 0, 1, \ldots$$

Вычислим значения $F_m(1)$ и $F_m(0)$. При дифференцировании многочлена кратность всякого его корня уменьшается на единицу. Поэтому при $(2m)$-кратном дифференцировании многочлена $(x^2-1)^{2m+1}$ с корнем $x=1$ кратности $2m+1$ получим многочлен, для которого число 1 является корнем кратности 1. Следовательно, $F_m(1) = 0$.

Для вычисления значения $F_m(0)$ используем равенство

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x^{2k}) = \begin{cases} (2k)(2k-1)\ldots(2k-2m+1)\,x^{2k-2m}, & m < k; \\ (2k)! = (2m)!, & m = k; \\ 0, & m > k. \end{cases}$$

Из этого равенства следует, что значение функции $(x^{2k})^{(2m)}$ в точке $x=0$ отлично от нуля только при $m=k$, причем в этом случае оно равно $(2m)!$ Учитывая это и применяя к многочлену $(x^2-1)^{2m+1}$ формулу *бинома Ньютона*, получаем

$$F_m(0) = \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x^2-1)^{2m+1}\Big|_{x=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k (-1)^{2m+1-k} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x^{2k})\Big|_{x=0} =$$

$$= C_{2m+1}^m (-1)^{m+1}(2m)! = (-1)^{m+1}(2m)!\,\frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}.$$

Следовательно,

$$c_{2m+1} = \frac{4m+3}{(2m+1)!\,2^{2m+1}}\big(F_m(1)-F_m(0)\big) =$$

$$= (-1)^m \frac{(4m+3)\,(2m)!}{m!\,(m+1)!\,2^{2m+1}}, \quad m = 0, 1, 2,$$

Так как функции $g(x)$ и $f(x)$ представляют собой один и тот же элемент гильбертова пространства $L_2[-1,1]$ и их ряды Фурье по многочленам Лежандра совпадают, то функция $f(x)$ имеет следующее разложение в ряд Фурье по многочленам Лежандра в $L_2[-1,1]$:

$$f(x) \overset{L_2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m+3)\,(2m)!}{m!\,(m+1)!\,2^{2m+1}} P_{2m+1}(x),$$

где сходимость ряда справа рассматривается относительно нормы в $L_2[-1,1]$, т.е. в среднем квадратичном. #

В заключение приведем несколько первых многочленов Лежандра в явном виде:

$$P_0(x)=1, \qquad P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$$

$$P_1(x)=x, \qquad P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right), \qquad P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right),$$

(сравните с первыми многочленами системы $\{Q_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$).

7.8. Многочлены Чебышева

Пусть $\varphi(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная *суммируемая* на отрезке $[-1,1]$ *функция*, не являющаяся на $[-1,1]$ *почти всюду* равной нулю. Рассмотрим на $[-1,1]$ *измеримые* ***функции***, ***суммируемые с квадратом и весом*** $\varphi(x)$, т.е. такие функции $f(x)$, для которых интеграл Лебега $\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)\varphi(x)\,dx$ конечен. Совокупность всех таких функций $f(x)$, с условием отождествления функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых функции $f(x)\sqrt{\varphi(x)}$ и $g(x)\sqrt{\varphi(x)}$ совпадают почти всюду на отрезке $[-1,1]$, обозначим через $L_2\bigl([-1,1],\varphi\bigr)$. Очевидно, что

$$f(x)\in L_2\bigl([-1,1],\varphi\bigr) \iff f(x)\sqrt{\varphi(x)}\in L_2[-1,1].$$

Легко видеть, что множество $L_2\bigl([-1,1],\varphi\bigr)$ является действительным линейным пространством. Оно *бесконечномерно*, поскольку содержит бесконечную *линейно независимую систему* элементов 1, x, x^2, $\ldots$, x^n, $\ldots$ Кроме того, из неравенства Ко-