МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ – 6 СЕМЕСТР

А. А. Пожарский

Содержание

25 января 2015 г.

Предисловие

Предлагаемое «методическое пособие» предназначено для студентов и преподавателей физического факультета СПбГУ. «Пособие» содержит теоретический и практический материал, который предполагается изучать на практических занятиях по математической физике в шестом семестре.

Для удобства использования «пособия» весь материал разбит на 22 секции, каждая из которых примерно соответствует одному двух-часовому практическому занятию. Порядок изложения материала в каждой главе соответствует порядку его изложения на практических занятиях. В конце каждого раздела приводятся формулировки задач для самостоятельного решения.

Обратите внимание, что время проведения переписывания перед коллоквиумом не соответствует середине семестра и должно быть проведено не на последнем занятии перед коллоквиумом, а несколько раньше.

Настоящее «пособие» может содержать опечатки и, быть может, ошибки. Автор будет признателен за любые исправления, замечания и всевозможные пожелания, которые можно отправлять по адресу: $sofyto@mail.ru$ (Пожарский Алексей Андреевич).

1. Свойства обобщенных функций.

Определение 1.1. Носителем *непрерывной функции* $\varphi(x)$ *называют замыкание множества точек вещественной оси, на котором функция* $\varphi(x)$ *отлична от нуля. Носитель функции* $\varphi(x)$ *обозначается символом* $\operatorname{supp}\varphi(x)$.

Определение 1.2. Пространством основных функций $D(\mathbb{R})$ *или сокращенно* D *называют совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на вещественной оси и имеющих ограниченный носитель.*

Определение 1.3. *Последовательность функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *из* D *называется* сходящейся в пространстве D *к функции* $\varphi(x)$ *из* D, *если выполнены следующие условия.*

(1) *Существует такое число* $R > 0$, *что* $\operatorname{supp}\varphi_n(x) \subset [-R, R]$ *при* $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Для любого* $p \geqslant 0$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)\right| = 0.$$

Сходимость в пространстве D *обозначается символом* $\varphi_n(x) \xrightarrow{D} \varphi(x)$ *при* $n \to \infty$.

Определение 1.4. Функционалом $f(x)$ *над пространством основных функций* D *называют правило, которое сопоставляет каждой основной функции* $\varphi(x)$ *некоторое комплексное число. Это число обозначают символом* $(f(x), \varphi(x))$.

Определение 1.5. *Функционал* $f(x)$ *называют* линейным, *если для любых* α, $\beta \in \mathbb{C}$ *и* φ, $\psi \in D$ *выполняется равенство*

$$(f(x), \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = \alpha(f(x), \varphi(x)) + \beta(f(x), \psi(x)).$$

Определение 1.6. *Линейный функционал* $f(x)$ *называют* непрерывным *в* D, *если для любой последовательности основных функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что* $\varphi_n(x) \xrightarrow{D} 0$ *при* $n \to \infty$, *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} (f(x), \varphi_n(x)) = 0$$

Определение 1.7. Пространством обобщенных функций $D'(\mathbb{R})$ *или сокращенно* D' *называют совокупность всех линейных непрерывных функционалов над* D.

Определение 1.8. *Дельта-функцией Дирака называют функционал, определенный равенством*

$$(\delta(x-a), \varphi(x)) = \varphi(a), \quad \varphi \in D,$$

где $a \in \mathbb{R}$.

Пример 1.9. *Доказать, что дельта-функция Дирака* $\delta(x)$ *является обобщенной функцией.*

Решение. Докажем линейность функционала $\delta(x)$

$$(\delta(x), \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0) = \alpha(\delta(x), \varphi(x)) + \beta(\delta(x), \psi(x)).$$

Докажем непрерывность функционала $\delta(x)$. Пусть задана последовательность основных функций такая, что $\varphi_n(x) \xrightarrow{D} 0$ при $n \to \infty$. Из определения 1.3 при $p = 0$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - 0| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} (\delta(x), \varphi_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 0. \ \square$$

Определение 1.10. *Обобщенную функцию $f(x)$ называют* регулярной*, если существует локально абсолютно интегрируемая функция $F(x)$ такая, что*

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D.$$

Функцию $F(x)$ называют ядром *регулярного функционала $f(x)$.*

Замечание 1.11. *В дальнейшем мы позволим себе пользоваться одним и тем же символом $f(x)$ для обозначения регулярной обобщенной функции $f(x)$ и ее ядра $F(x)$.*

Определение 1.12. *Обычной (не обобщенной) тэта-функцией Хевисайда называют функцию*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Обобщенной тэта-функцией Хевисайда называют регулярный функционал, определенный равенством

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D.$$

Определение 1.13. Сингулярной обобщенной функцией *называют всякую обобщенную функцию, не являющуюся регулярной.*

Пример 1.14. *Доказать, что $\delta(x)$ является* сингулярной *обобщенной функцией.*

Решение. Доказательство проведем от противного. Пусть нашлась локально абсолютно интегрируемая функция $F(x)$ такая, что

$$\varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D. \tag{1.1}$$

Выбирая $\varphi(x)$ такие, что $\varphi(0) = 0$ получим

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{1.2}$$

Используя оставшийся произвол в выборе функции $\varphi(x)$ можно показать, что $F(x) = 0$ всюду за исключением точки $x = 0$. Известно, что интеграл (Лебега или Римана) от функции, равной нулю всюду за исключением одной точки, обращается в ноль. Поэтому равенство (1.2) обязано выполняться и для произвольной $\varphi \in D$. Последнее утверждение противоречит соотношению (1.1). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Определение 1.15. *Говорят, что обобщенная функция $f(x)$* равна нулю в открытой области G*, если $(f(x), \varphi(x)) = 0$ для всех $\varphi \in D$ таких, что* $\operatorname{supp}\varphi \subset G$.

Определение 1.16. Носителем *обобщенной функции $f(x)$ называют множество точек вещественной оси, полученное исключением из $\mathbb{R}$ всех открытых интервалов, на которых $f(x)$ обращается в ноль.*

Пример 1.17. *Найти носитель обобщенной функции $\delta(x)$.*

Решение. Ясно, что для любой функции $\varphi \in D$ такой, что ее носитель сосредоточен на одном из интервалов $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$, справедливо равенство

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = 0.$$

Поэтому носитель $\delta(x)$ может быть сосредоточен только в точке $x = 0$.

Далее для любого интервала $(-a, b)$, где $a > 0$ и $b > 0$ найдется такая функция $\varphi \in D$, что $\operatorname{supp}\varphi(x) \in (-a, b)$ и $\varphi(0) \neq 0$. Отсюда следует, что носитель $\delta(x)$ совпадает с точкой $x = 0$. $\square$

Ответ: $\operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}$.

Определение 1.18. Произведением *обобщенной функции $f(x)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$ называют называют обобщенную функцию $\alpha(x)f(x)$, действующую по правилу*

$$(\alpha(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), \alpha(x)\varphi(x)).$$

Пример 1.19. *Упростить выражение $(1 + e^x)\delta(x)$.*

Решение. Пусть $\varphi \in D$, тогда

$$((1 + e^x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), (1 + e^x)\varphi(x)) = (1 + e^0)\varphi(0) = 2\varphi(0) = (2\delta(x), \varphi(x)).$$

Отсюда следует, что

$$(1 + e^x)\delta(x) = 2\delta(x). \square$$

Ответ: $(1 + e^x)\delta(x) = 2\delta(x)$.

Домашнее задание:

Задача 1.20. *Упростить выражение $x\delta(x)$.*

Ответ: $x\delta(x) = 0$.

Задача 1.21. *Упростить выражение $x\delta(x + 1)$.*

Ответ: $x\delta(x + 1) = -\delta(x + 1)$.

2. Обобщенная производная, дифференцирование скачков.

Приведем рассуждения, мотивирующие определение обобщенной производной. Точное определение обобщенной производной приведено ниже, см. определение 2.1.

Производную обобщенной функции определяют так, чтобы она, в случае регулярной обобщенной функции с гладким ядром, совпадала с производной в обычном смысле. Пусть задана регулярная обобщенная функция $f(x)$ с гладким ядром. Тогда справедливы равенства

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f(x), \varphi'(x)), \quad \varphi \in D. \tag{2.1}$$

В случае сингулярной обобщенной функции $f(x)$ первые два равенства в (2.1) не имеют никакого смысла. Поэтому формулу (2.1) следует рассматривать не как доказательство, а как мотивировку определения 2.1. Далее, правая часть в формуле (2.1) корректно определена для любой обобщенной функции, в том числе и сингулярной. Отсюда мы приходим к следующему определению.

Определение 2.1. Производной *обобщенной функции $f \in D'$ называется функционал $f' \in D'$, определенный равенством*

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)), \quad \varphi \in D.$$

Пример 2.2. *Найти обобщенную производную функции $\theta(x)$.*

Решение. Для произвольной $\varphi \in D$ выполнены равенства

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Отсюда следует, что $\theta'(x) = \delta(x)$. $\square$

Ответ: $\theta'(x) = \delta(x)$.

Пример 2.3. *Пусть $f(x)$ – обобщенная функция и $\alpha(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция. Доказать равенство*

$$(\alpha(x)f(x))' = \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x).$$

Решение. В этот раз, ради упрощения записи, мы позволим себе не писать аргумент x

$$\begin{aligned}((\alpha f)', \varphi) &= -(\alpha f, \varphi') = -(f, \alpha\varphi') = -(f, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi) = -(f, (\alpha\varphi)') + (f, \alpha'\varphi) = \\ &= (f', \alpha\varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha f', \varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha' f + \alpha f', \varphi)\,. \ \square\end{aligned}$$

Пример 2.4. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям.*

(1) *$f(x) \in C^1(-\infty, a) \cap C^1(a, +\infty)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$.*
(2) *Левое $f(a-0)$ и правое $f(a+0)$ предельные значения конечны.*
(3) *Классическая производная $f'_{\text{кл}}(x)$ является регулярной обобщенной функцией.*

Доказать, что производная регулярной обобщенной функции с ядром $f(x)$ может быть найдена по формуле

$$f'(x) = f'_{\text{кл}}(x) + [f(a+0) - f(a-0)]\,\delta(x-a).$$

где $f'_{\text{кл}}(x)$ – классическая производная.

Решение. Воспользуемся определением производной обобщенной функцией и формулой интегрирования по частям

$$(f'(x),\varphi(x)) = -(f(x),\varphi'(x)) = -\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{a-0} + \int\limits_{-\infty}^{a} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\,dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{a+0}^{+\infty} + \int\limits_{a}^{+\infty} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f'_{\text{кл}}(x)\varphi(x)\,dx + [f(a+0)-f(a-0)]\,\varphi(a) =$$

$$= \Big(f'_{\text{кл}}(x),\varphi(x)\Big) + \Big([f(a+0)-f(a-0)]\,\delta(x-a),\varphi(x)\Big). \ \square$$

Пример 2.5. *Найти вторую обобщенную производную функции*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,0], \\ x^2, & x\in(0,1], \\ 0, & x\in(1,+\infty]. \end{cases}$$

Решение. Используя результат примера 2.4, получим

$$f'(x) = -\delta(x-1) + \begin{cases} 1, & x \in (-\infty,0], \\ 2x, & x\in(0,1], \\ 0, & x\in(1,+\infty]. \end{cases}$$

Аналогично,

$$f''(x) = -\delta(x) - 2\delta(x-1) - \delta'(x-1) + \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0], \\ 2, & x\in(0,1], \\ 0, & x\in(1,+\infty]. \end{cases} \qquad \square$$

Ответ: $f''(x) = -\delta(x) - 2\delta(x-1) - \delta'(x-1) + \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0], \\ 2, & x\in(0,1], \\ 0, & x\in(1,+\infty]. \end{cases}$

Пример 2.6. *Найти вторую обобщенную производную функции*

$$f(x) = (x-1)\theta(x^2-x).$$

Решение. Используя результаты примеров 2.3 и 2.4, получим

$$f'(x) = \theta(x^2-x) + (x-1)\,(\delta(x-1)-\delta(x)) = \theta(x^2-x)+\delta(x),$$

$$f''(x) = \delta(x-1) - \delta(x) + \delta'(x). \ \square$$

Ответ: $f''(x) = \delta(x-1)-\delta(x)+\delta'(x)$.

Домашнее задание:

Задача 2.7. *Упростить выражение* $(e^x+x)\delta'(x)$.

Ответ: $(e^x+x)\delta'(x) = \delta'(x) - 2\delta(x)$.

Задача 2.8. *Упростить выражение* $(2x^3-x)\delta'(x-1)$.

Ответ: $(2x^3-x)\delta'(x-1) = -5\delta(x-1) + \delta'(x-1)$.

Задача 2.9. *Найти вторую обобщенную производную функции*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (-\infty, 1], \\ x^3, & x \in (1, 2], \\ 1 + 2x, & x \in (2, +\infty]. \end{cases}$$

Ответ: $f''(x) = -3\delta'(x-2) - 10\delta(x-2) + 4\delta(x-1) + \begin{cases} 6x, & x \in (1, 2], \\ 0, & x \notin (1, 2]. \end{cases}$

Задача 2.10. *Найти вторую обобщенную производную функции*

$$f(x) = (x^2 - x)\theta(x^3 - x).$$

Ответ: $f''(x) = 2\theta(x^3 - x) - 3\delta(x+1) + \delta(x) + \delta(x-1) + 2\delta'(x+1)$.

3. Формулы, упрощающие выражения вида $h(x)\delta^{(n)}(x)$.

Пример 3.1. *Упростить выражение* $h(x)\delta'(x)$, *где* $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Решение. Для произвольной $\varphi \in D$ имеем

$$\begin{aligned}
&(h(x)\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), h(x)\varphi(x)) = -(\delta(x), (h(x)\varphi(x))') = \\
&= -(\delta(x), h'(x)\varphi(x)) - (\delta(x), h(x)\varphi'(x)) = -h'(0)\varphi(0) - h(0)\varphi'(0) = \\
&= -h'(0)(\delta(x), \varphi(x)) - h(0)(\delta(x), \varphi'(x)) = -h'(0)(\delta(x), \varphi(x)) + h(0)(\delta'(x), \varphi(x)).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$h(x)\delta'(x) = -h'(0)\delta(x) + h(0)\delta'(x). \ \square$$

Ответ: $h(x)\delta'(x) = -h'(0)\delta(x) + h(0)\delta'(x)$.

Пример 3.2. *Упростить выражение* $x\delta^{(n)}(x)$.

Решение. Для произвольной $\varphi \in D$ имеем

$$\begin{aligned}
&(x\delta^{(n)}(x), \varphi(x)) = (\delta^{(n)}(x), x\varphi(x)) = (-1)^n(\delta(x), (x\varphi(x))^{(n)}) = \\
&= (-1)^n(\delta(x), x\varphi^{(n)}(x) + n\varphi^{(n-1)}(x)) = (-1)^n n(\delta(x), \varphi^{(n-1)}(x)) = -n(\delta^{(n-1)}(x), \varphi(x)). \ \square
\end{aligned}$$

Ответ: $x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x)$.

Домашнее задание:

Задача 3.3. *Упростить выражение* $e^{x^2-x}\,\delta'(x-1)$.

Ответ: $e^{x^2-x}\,\delta'(x-1) = -\delta(x-1) + \delta'(x-1)$.

Задача 3.4. *Упростить выражение* $x^2\delta^{(3)}(x)$.

Ответ: $x^2\delta^{(3)}(x) = 6\delta'(x)$.

Задача 3.5. *Упростить выражение* $e^x\delta^{(2)}(x)$.

Ответ: $e^x\delta^{(2)}(x) = \delta^{(2)}(x) - 2\delta'(x) + \delta(x)$.

Задача 3.6. *Упростить выражение* $x^3\delta^{(2)}(x+1)$.

Ответ: $x^3\delta^{(2)}(x+1) = -6\delta(x+1) - 6\delta'(x+1) - \delta^{(2)}(x+1)$.

4. 1-ая контрольная работа (задача: 1; 10 минут).

Вариант контрольной работы №1.

Задача 1. Найти 2-ую обобщенную производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, 1], \\ 2x - 1, & x \in (1, 2], \\ 1, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Ответ:

$$f''(x) = -\delta(x) - 2\delta(x-2) - 2\delta'(x-2) + \begin{cases} 0, \ x \in (-\infty, 0], \\ 2, \ x \in (0, 1], \\ 0, \ x \in (1, 2], \\ 0, \ x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Вариант контрольной работы №1.

Задача 1. Найти 2-ую обобщенную производную функции

$$f(x) = (x^2 - x)\theta(x^2 - 2x).$$

Ответ:

5. Регуляризация степенных особенностей. Деление на полином.

Пример 5.1. *Найти первую производную регулярной обобщенной функции* $\ln|x|$.

Решение. Перед тем как приступить к решению этой задачи, заметим, что обобщенная производная от функции $\ln|x|$, вне окрестности точки $x = 0$, должна совпадать с классической производной от функции $\ln|x|$, т. е. с функцией $\frac{1}{x}$, см. мотивацию перед определением 2.1. При этом функция $\frac{1}{x}$ не может быть ядром регулярной обобщенной функции, потому что она не является абсолютно интегрируемой в окрестности точки $x = 0$.

Воспользуемся определением обобщенной производной. Для произвольной $\varphi \in D$ справедливы равенства

$$((\ln|x|)', \varphi(x)) = -(\ln|x|, \varphi'(x)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx. \tag{5.1}$$

В последнем интеграле хочется произвести интегрирование по частям, однако этого нельзя делать из за особенности у подынтегральной функции в нуле. Для того чтобы обойти эту трудность перепишем интеграл в правой части (5.1) в виде

$$-\int\limits_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Интеграл в правой части (5.2) интегрируется вне окрестности нуля и, как следствие, не содержит никаких особенностей. Теперь можно произвести интегрирование по частям

$$\begin{aligned}
-\int\limits_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx &= -\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx = \\
&= -\ln|x|\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \ln|x|\,\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \\
&= (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon + \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (5.2), найдем

$$((\ln|x|)', \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to+0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \tag{5.3}$$

Учитывая, что $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + O(\varepsilon)$ при малых ε, получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0} O(\varepsilon)\ln\varepsilon = 0.$$

Отсюда и из (5.3) найдем, что

$$((\ln|x|)', \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \tag{5.4}$$

Интеграл в правой части равенства (5.4) называют интегралом в смысле главного значения, а соответствующий функционал принято обозначать символом $P\frac{1}{x}$

$$\left(P\frac{1}{x}\,,\varphi(x)\right) = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \ \square$$

Ответ: $(\ln|x|)' = P\frac{1}{x}$.

Замечание 5.2. *Функционал $P\frac{1}{x}$ называют* регуляризацией *функции $\frac{1}{x}$. Это означает, что функционал $P\frac{1}{x}$ действует на основные функции, которые обращаются в ноль в окрестности точки $x = 0$, также как и функция $\frac{1}{x}$. Существуют и другие регуляризации функции $\frac{1}{x}$.*

Определение 5.3. *Следующие равенства корректно определяют две сингулярные обобщенные функции*

$$\left(\frac{1}{x-i0}\,,\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx, \quad \left(\frac{1}{x+i0}\,,\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx, \quad \varphi\in D.$$

Замечание 5.4. *Мы позволим себе не останавливаться на доказательстве того, что функционалы $\frac{1}{x-i0}$ и $\frac{1}{x+i0}$ являются обобщенными функциями. В частности, мы не будем доказывать, что соответствующие пределы всегда существуют.*

Пример 5.5. *Найти производную обобщенной функции $P\frac{1}{x}$.*

Решение. Этот пример решается вполне аналогично примеру 5.1. Для произвольной $\varphi \in D$ справедливы равенства

$$\left(\left(P\frac{1}{x}\right)'\,,\varphi(x)\right) = -\left(P\frac{1}{x}\,,\varphi'(x)\right) = -v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\right). \tag{5.5}$$

Преобразуем выражение в правой части (5.5)

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \frac{\varphi(x)}{x}\bigg|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \frac{\varphi(x)}{x}\bigg|_{\varepsilon}^{\infty} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Отсюда, разлагая функцию $\varphi(\varepsilon)$ в ряд Тейлора $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} + O(\varepsilon) = \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx + O(\varepsilon). \tag{5.6}$$

В последнем равенстве мы учли, что $\int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\varepsilon}$.

Подставляя (5.6) в (5.5), найдем

$$\left(\left(P\frac{1}{x}\right)', \varphi(x)\right) = -\int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx = -v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx. \tag{5.7}$$

Функционал в правой части (5.7) принято обозначать символом $-P\frac{1}{x^2}$ □

Ответ: $\left(P\frac{1}{x}\right)' = -P\frac{1}{x^2}$.

Определение 5.6. *Следующие равенства корректно определяют сингулярные обобщенные функции*

$$\left(P\frac{1}{x^n}, \varphi(x)\right) = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \sum_{p=0}^{n-2}\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(0)x^p}{x^n}\,dx, \quad \varphi \in D,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 5.7. *При* $n=1$ *или* $n=2$ *корректность определения* 5.6 *косвенно установлена в примерах* 5.1 *и* 5.5. *Для остальных* n *мы позволим себе не останавливаться на доказательстве корректности определения.*

Пример 5.8. *Доказать равенство* $xP\frac{1}{x^2} = P\frac{1}{x}$.

Решение. Для любой $\varphi \in D$ справедливы равенства

$$\left(xP\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \left(P\frac{1}{x^2}, x\varphi(x)\right) = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x) - 0\varphi(0)}{x^2}\,dx = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \left(P\frac{1}{x}, \varphi(x)\right). \;\square$$

Пример 5.9. *Найти несколько регуляризаций функции* $\frac{1}{x(x-1)}$.

Решение. По аналогии с функционалами $P\frac{1}{x^n}$, указанную функцию можно регуляризовать следующим образом

$$\left(P\frac{1}{x(x-1)}, \varphi(x)\right) = v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x(x-1)}\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{\{|x|>\varepsilon_1\}\cap\{|x-1|>\varepsilon_2\}} \frac{\varphi(x)}{x(x-1)}\,dx, \quad \varphi \in D.$$

Однако такой способ регуляризации не всегда удобен. Например, регуляризация функции $\frac{1}{x^2(x-1)^2}$ подобным способом может оказаться трудоемким мероприятием.

Другой способ регуляризации функции вида $\frac{1}{x(x-1)}$ заключается в том, чтобы предварительно разложить ее на простейшие дроби

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

В результате регуляризация совпадает с предыдущей и имеет вид имеет вид

$$P\frac{1}{x(x-1)} = P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x}.$$

Еще один, зачастую более удобный, способ регуляризации заключается в том, чтобы сдвинуть особенности (в нашем случае есть две особые точки $x=0$ и $x=1$) с вещественной оси, а затем перейти к пределу так, чтобы в пределе особенности вернулись на свои места. В нашем случае подобная регуляризация имеет, например, такой вид

$$\left(\frac{1}{(x-i0)(x-1-i0)}\,,\varphi(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{(x-i\varepsilon)(x-1-i\varepsilon)}\,dx,\quad \varphi\in D.$$

Возможны еще три различные регуляризации подобного вида $\frac{1}{(x+i0)(x-1-i0)}$, $\frac{1}{(x-i0)(x-1+i0)}$ или $\frac{1}{(x+i0)(x-1+i0)}$. $\square$

Ответ: Регуляризацией функции $\frac{1}{x(x-1)}$ являются, например, обобщенные функции $P\frac{1}{x(x-1)}$ и $\frac{1}{(x\pm i0)(x-1\pm i0)}$.

Следующая теорема устанавливает связь между различными регуляризациями функции $\frac{1}{x}$.

Теорема 5.10 (Формулы Сохоцкого)**.** *Справедливы следующие равенства*

$$\frac{1}{x+i0}=P\frac{1}{x}-i\pi\delta(x),\quad \frac{1}{x-i0}=P\frac{1}{x}+i\pi\delta(x).$$

Определение 5.11. *Пусть $\gamma\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ и $n=[\gamma]$ – целая часть числа γ. Следующие равенства корректно определяют сингулярные обобщенные функции*

$$\left(x_+^{-\gamma}\,,\varphi(x)\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(0)x^p}{x^\gamma}\,dx,\quad \varphi\in D.$$

Домашнее задание:

Задача 5.12. *Доказать равенство* $x\frac{1}{x-i0}=1$.

Задача 5.13. *Найти несколько регуляризаций функции* $\frac{1}{x^2(x-1)}$.

Ответ: Регуляризацией функции $\frac{1}{x^2(x-1)}$ являются, например, обобщенные функции вида $P\frac{1}{x-1}-P\frac{1}{x^2}-P\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{(x\pm i0)^2(x-1\pm i0)}$.

Задача 5.14. *Доказать равенство* $\left(\frac{1}{x-i0}\right)'=-\frac{1}{(x-i0)^2}$.

Задача 5.15. *Доказать равенство* $\frac{1}{(x-i0)^2}=P\frac{1}{x^2}-i\pi\delta'(x)$.

Задача 5.16. *Доказать равенство* $\left(x_+^{-\gamma}\right)'=-\gamma\,x_+^{-\gamma-1}$.

6. Обобщенные решения дифференциальных уравнений со степенными коэффициентами в $D'(\mathbb{R})$.

В дальнейшем, для решения уравнений в пространстве обобщенных функций, нам понадобятся две следующие теоремы. Мы позволим себе не останавливаться на их доказательстве.

Теорема 6.1. *Пусть носитель обобщенной функции $f(x)$ сосредоточен в одной точке $x = a$. Тогда существуют постоянные C_1, ... C_n и N такие, что*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n\,\delta^{(n)}(x-a).$$

Теорема 6.2. *Общее решение уравнения $y' = 0$ в D' имеет вид $y(x) = C$, где C – произвольная постоянная*

Пример 6.3. *Найти общий вид решения уравнения $xy = 1$ в D'.*

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$xy_0 = 0. \tag{6.1}$$

Очевидно, что $y_0(x) \equiv 0$ при $x \neq 0$. Это означает, что носитель функции $y_0(x)$ может быть сосредоточен только в точке $x = 0$. Теперь из теоремы 6.1 следует, что функция $y_0(x)$ имеет вид

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n\,\delta^{(n)}(x), \tag{6.2}$$

где постоянные C_n и N подлежат дальнейшему определению. Подставляя (6.2) в однородное уравнение (6.1), получим

$$0 = x\sum_{n=0}^{N} C_n\,\delta^{(n)}(x) = C_0x\delta(x) + C_1x\delta'(x) + \ldots + C_Nx\delta^{(N)}(x). \tag{6.3}$$

Используя результат примера 3.2, преобразуем уравнение (6.3) к виду

$$-C_1\delta(x) - \ldots - C_NN\delta^{(N-1)}(x) = 0. \tag{6.4}$$

Из уравнения (6.4) следует, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_N = 0$ и C_0 – произвольная постоянная.

Таким образом, общее решение однородного уравнения (6.1) имеет вид

$$y_0(x) = C_0\,\delta(x).$$

Шаг 2. Найдем частное (т. е. хотя бы какое-нибудь) решение исходного уравнения

$$xy_1 = 1. \tag{6.5}$$

Попробуем догадаться до ответа. Для этого будем решать уравнение на $y_1(x)$ вне окрестности точеки $x = 0$. В результате получим $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Для того чтобы получить обобщенное решение, нужно выбрать какую-нибудь регуляризацию функции $\frac{1}{x}$, например,

$$y_1(x) = P\frac{1}{x}\,.$$

Осталось проверить, что это действительной частное решение

$$xy_1 = xP\frac{1}{x} = 1.$$

Шаг 3. Общее решение исходного уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения (6.1) и частного решения неоднородного уравнения (6.5)

$$y(x) = P\frac{1}{x} + C_0\,\delta(x),$$

где C_0 – произвольная постоянная. □

Ответ: $y(x) = P\frac{1}{x} + C_0\,\delta(x)$, где C_0 – произвольная постоянная.

Пример 6.4. *Найти общий вид решения уравнения $xy' = P\frac{1}{x}$ в D'.*

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем общее решение однородного уравнения

$$xy_0' = 0, \tag{6.6}$$

Так же как и в примере 6.3 получим, что

$$y_0'(x) = C_0\delta(x). \tag{6.7}$$

Общее решение уравнения (6.7) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения $y_0'(x) = 0$ и частного решения неоднородного уравнения $y_0'(x) = C_0\delta(x)$. Из теоремы 6.2 следует, что общее решение однородного уравнения $y_0' = 0$ имеет вид $y_0(x) = C_1$. Вспоминая, что $\theta'(x) = \delta(x)$, легко догадаться до частного решения уравнения (6.7)

$$y_0(x) = C_0\theta(x).$$

Итак, общее решение уравнения (6.6) имеет вид

$$y_0(x) = C_0\theta(x) + C_1.$$

Шаг 2. Найдем частное решение исходного уравнения

$$xy_1' = P\frac{1}{x}. \tag{6.8}$$

Как обычно, вначале попробуем догадаться до ответа. Для этого рассмотрим уравнение (6.8) вне особой точки $x = 0$. В результате найдем, что

$$y_1'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Longleftarrow \quad y_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

Обобщенным решением уравнения (6.8) будет любая регуляризация полученной функции, например,

$$y_1(x) = -P\frac{1}{x}.$$

Проверим, что это действительной частное решение уравнения (6.8)

$$xy_1'(x) = -x\left(P\frac{1}{x}\right)' = xP\frac{1}{x^2} = P\frac{1}{x}.$$

Шаг 3. Общее решение исходного уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения (6.6) и частного решения неоднородного уравнения (6.8)

$$y(x) = -P\frac{1}{x} + C_0\theta(x) + C_1,$$

где C_0 и C_1 – произвольные постоянные. □

Ответ: $y(x) = -P\frac{1}{x} + C_0\theta(x) + C_1$, где C_0 и C_1 – произвольные постоянные.

Пример 6.5. *Найти общее решение уравнения*

$$x(x-1)y'' = P\frac{1}{x} + \delta(x) \quad \text{в} \quad D'.$$

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем общее решение однородного уравнения $x(x-1)y_0'' = 0$. Полагая $v = y_0''$, получим

$$x(x-1)v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(x) = C_1\delta(x) + C_2\delta(x-1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= C_1\delta(x) + C_2\delta(x-1), \\ y_0'(x) &= C_1\theta(x) + C_2\theta(x-1) + C_3, \\ y_0(x) &= C_1x\theta(x) + C_2(x-1)\theta(x-1) + C_3x + C_4, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Шаг 2. Найдем частное (т. е. хотя бы какое-нибудь) решение уравнения $x(x-1)y_1'' = P\frac{1}{x}$. Положим $v(x) = y_1''(x)$ и, вначале, попробуем догадаться до ответа. Для этого будем решать уравнение на v вне окрестности точек $x=0$ и $x=1$

$$\begin{aligned} x(x-1)v &= P\frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \\ v(x) &= \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Теперь логично предположить, что функция

$$v(x) = P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x} - P\frac{1}{x^2}$$

является решением уравнения $x(x-1)v = P\frac{1}{x}$ в $D'(\mathbb{R})$. Докажем, что наше предположение верно

$$\begin{aligned} x(x-1)v &= x(x-1)P\frac{1}{x-1} - (x-1)xP\frac{1}{x} - (x-1)xP\frac{1}{x^2} = x - (x-1) - (x-1)P\frac{1}{x} = \\ &= 1 - xP\frac{1}{x} + P\frac{1}{x} = P\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x} - P\frac{1}{x^2}, \\ y_1'(x) &= \ln|x-1| - \ln|x| + P\frac{1}{x}, \\ y_1(x) &= (x-1)(\ln|x-1| - 1) - x(\ln|x| - 1) + \ln|x|, \\ y_1(x) &= (x-1)\ln|x-1| - x\ln|x| + \ln|x| + 1. \end{aligned}$$

Шаг 3. Найдем частное решение уравнения $x(x-1)y_2'' = \delta(x)$. Удобно ввести новую неизвестную функцию $v(x) = xy_2''(x)$, откуда

$$(x-1)v = \delta(x). \tag{6.9}$$

Попробуем вначале догадаться до решения уравнения (6.9). Для этого формально поделим на $(x-1)$, предполагая, что $x \neq 1$

$$v(x) = \frac{1}{x-1}\delta(x) = -\delta(x).$$

Здесь мы воспользовались правилом умножения гладкой функции на $\delta(x)$-функцию: $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$. Проверим теперь, что $v(x) = -\delta(x)$ решение уравнения (6.9)

$$(x-1)v = -(x-1)\delta(x) = \delta(x).$$

Получаем новое уравнение на $y_2(x)$

$$xy_2'' = -\delta(x).$$

Удобно ввести новую неизвестную функцию $u(x) = y_2''(x)$, откуда

$$xu = -\delta(x). \tag{6.10}$$

Ясно, что вне точки $x = 0$ существует только тривиальное $u(x) \equiv 0$ решение уравнения (6.10). Это означает, что носитель обобщенной функции $u(x)$ сосредоточен в нуле. Отсюда следует, что $u(x)$ можно искать в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \delta^{(n)}(x), \tag{6.11}$$

где A_n – некоторые постоянные. Перед тем как подставлять (6.11) в (6.10), заметим, что N не может быть больше 1 (иначе в левой части равенства (6.10) появится $\delta^{(N-1)}(x)$, которой не с чем будет сократиться).

Подставляя (6.11) в (6.10) при $N = 1$, получим

$$xu = x(A_0\delta(x) + A_1\delta'(x)) = A_1 x\delta'(x) = -A_1\delta(x).$$

Сверяя с уравнением (6.10) найдем, что $A_1 = 1$ и A_0 – произвольная постоянная. Поскольку мы ищем частное решение, то постоянную A_0 удобно положить равной нулю. Далее,

$$y_2''(x) = \delta'(x) \quad \Longleftarrow \quad y_2'(x) = \delta(x) \quad \Longleftarrow \quad y_2(x) = \theta(x).$$

Шаг 4. Окончательный ответ записывается в виде $y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x)$. □

Ответ: $y(x) = C_1 x\theta(x) + C_2(x-1)\theta(x-1) + C_3 x + C_4 + (x-1)\ln|x-1| - x\ln|x| + \ln|x| + 1 + \theta(x)$, где C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Пример 6.6. *Найти общий вид решения уравнения*

$$xy = \theta(x) \quad \text{в} \quad D'. \tag{6.12}$$

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Общее решение однородного уравнения $xy_0 = 0$ имеет вид

$$y_0(x) = C\delta(x), \tag{6.13}$$

где C – произвольная постоянная.

Шаг 2. Найдем теперь частное решение уравнения (6.12). Вне точки $x = 0$ это уравнение имеет классическое решение $x^{-1}\theta(x)$, которое обязано совпадать с любым решением (6.12) вне точки $x = 0$.

Из-за неинтегрируемой особенности в нуле функция $x^{-1}\theta(x)$ не принадлежит пространству D'. Поэтому задача о поиске частного решения сводится к регуляризации функции $x^{-1}\theta(x)$. Другими словами, мы должны найти такую обобщенную функцию y_1, которая совпадает с $x^{-1}\theta(x)$ вне точки $x = 0$. Более строго, для любой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в ноль в некоторой окрестности точки $x = 0$, должно быть выполнено равенство

$$(y_1(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} x^{-1}\theta(x)\varphi(x)\,dx.$$

Заметим, что классическая первообразная $\ln|x|\,\theta(x)$ функции $x^{-1}\theta(x)$ является регулярной обобщенной функцией

$$(\ln|x|\theta(x),\varphi(x)) = \int\limits_0^\infty \ln|x|\varphi(x)\,dx.$$

Это следует из того, что у функции $\ln|x|$ интегрируемая особенность в нуле. Поэтому регуляризацию функции $x^{-1}\theta(x)$ можно искать в виде $(\ln|x|\theta(x))'$, где производная понимается в обобщенном смысле. Вычислим эту производную

$$\Big((\ln|x|\,\theta(x))',\varphi(x)\Big) = -\Big(\ln|x|\,\theta(x),\varphi'(x)\Big) = -\int\limits_0^\infty \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon + \int\limits_\varepsilon^\infty x^{-1}\varphi(x)\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi(0)\ln\varepsilon + \int\limits_\varepsilon^\infty x^{-1}\varphi(x)\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\varphi(0)\int\limits_\varepsilon^1 x^{-1}\,dx + \int\limits_\varepsilon^\infty x^{-1}\varphi(x)\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_\varepsilon^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Осталось проверить, что найденная обобщенная функция

$$(y_1(x),\varphi(x)) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \tag{6.14}$$

является частным решением уравнения (6.12). Действительно,

$$(xy_1(x),\psi(x)) = (y_1(x),x\psi(x)) = [\varphi(x) = x\psi(x)] = (y_1(x),\varphi(x)) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \psi(x)\,dx + \int\limits_1^\infty \psi(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \psi(x)\,dx = (\theta(x),\psi(x)).$$

Шаг 3. Общее решение уравнения (6.12) имеет вид $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$, где y_0 и y_1 задаются формулами (6.13) и (6.14) соответственно.

Ответ: $y(x) = C\delta(x) + y_1(x)$, где C – произвольная постоянная и y_1 задается формулой (6.14).

Домашнее задание:

Задача 6.7. *Найти общий вид решения уравнения* $(x-1)y = x$ *в* D'.

Ответ: $y(x) = 1 + P\frac{1}{x-1} + C\delta(x-1)$, где C – произвольная постоянная.

Задача 6.8. *Найти общий вид решения уравнения* $(x+1)y' = P\frac{1}{x} + \delta(x-2)$ *в* D'.

Ответ: $y(x) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{3}\theta(x-2) + C_0\theta(x+1) + C_1$, где C_0 и C_1 – произвольные постоянные.

Задача 6.9. *Найти общий вид решения уравнения* $x(x+1)y'' = \delta'(x)$ *в* D'.

Ответ: $y(x) = -\frac{1}{2}\delta(x) - \theta(x) + C_0x\theta(x) + C_1(x+1)\theta(x+1) + C_2x + C_3$, где C_0, C_1, C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Задача 6.10. *Найти общий вид решения уравнения* $(x+1)y = \frac{1}{x-i0}$ *в* D'.

Ответ: $y(x) = \frac{1}{(x-i0)(x+1-i0)} + C\delta(x+1)$, где C – произвольная постоянная.

Задача 6.11. *Найти общий вид решения уравнения* $xy = \frac{1}{x+i0}$ *в* D'.

Ответ: $y(x) = \frac{1}{(x+i0)^2} + C\delta(x)$, где C – произвольная постоянная.

7. 2-ая контрольная работа (задача: 2; 15 минут).

Вариант контрольной работы №2.

Задача 2. Найти общий вид решения уравнения в D'

$$(x+1)y' = P\frac{1}{x} + \delta(x).$$

Ответ: $y(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + \theta(x) + C_1 + C_2\theta(x+1)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Вариант контрольной работы №2.

Задача 2. Найти общий вид решения уравнения в D'

$$xy' = P\frac{1}{x-1}.$$

Ответ:

8. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Перед тем как ввести понятие преобразования Фурье, сформулируем несколько вспомогательных определений.

Определение 8.1. Пространством основных функций $S(\mathbb{R})$ *или сокращенно* S *называют совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на вещественной оси и убывающих при* $|x| \to \infty$ *вместе со всеми своими производными быстрее любой степени* $\frac{1}{|x|}$.

Определение 8.2. *Последовательность функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *из* S *называется* сходящейся в пространстве S *к функции* $\varphi(x)$ *из* S, *если для любых* $p \geqslant 0$ *и* $k \geqslant 0$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \left|\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)\right| = 0.$$

Сходимость в пространстве S *обозначается символом* $\varphi_n(x) \xrightarrow{S} \varphi(x)$ *при* $n \to \infty$.

Определение 8.3. *Функционал* $f(x)$ *называют* непрерывным *в* S, *если для любой последовательности основных функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что* $\varphi_n(x) \xrightarrow{S} 0$ *при* $n \to \infty$, *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} (f(x), \varphi_n(x)) = 0.$$

Определение 8.4. Пространством обобщенных функций $S'(\mathbb{R})$ *или сокращенно* S' *называют совокупность всех линейных непрерывных функционалов над* S.

Пример 8.5. *Доказать, что* $S' \subset D'$.

Решение. Сравнивая определения 1.2 и 8.1, находим, что $D \subset S$. Отсюда следует, что произвольный функционал из S' определен на любой функции из D и, следовательно, принадлежит пространству D'. □

Замечание 8.6. *Из включения* $S' \subset D'$ *следует, что все введенные ранее операции над обобщенными функциями из* D' *могут применяться и к обобщенным функциям из* S'.

Напомним классическое определение преобразования Фурье.

Определение 8.7. Преобразование Фурье *функции* $\varphi \in S$ *задается формулой*

$$F[\varphi](k) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ikx}\, dx.$$

Обратное преобразование Фурье *задается формулой*

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) e^{-ikx}\, dk.$$

Теорема 8.8. *Пусть* $\varphi \in S$, *тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $F[\varphi] \in S$.

(2) $F^{-1}[\varphi] \in S$.

(3) $F[F^{-1}[\varphi]](k) = \varphi(k)$.

(4) $F^{-1}[F[\varphi]](x) = \varphi(x)$.

Преобразование Фурье обобщенной функции определяют так, чтобы оно, в случае регулярной обобщенной функции с гладким, быстро убывающим ядром, совпало с классическим преобразованием Фурье (сравни с мотивировкой к определению 2.1 обобщенной производной на стр. 7).

Пусть задана регулярная обобщенная функция $f(x)$ с гладким, быстро убывающим ядром. Справедливы равенства

$$(F[f](k), \varphi(k)) = \int\limits_{\mathbb{R}} F[f](k)\varphi(k)\,dk = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx}\,dx \right) \varphi(k)\,dk =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(k)e^{ikx}\,dk \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)F[\varphi](x)\,dk = (f(x), F[\varphi](x)).$$

Отсюда мы приходим к следующему определению.

Определение 8.9. Преобразованием Фурье *обобщенной функции* $f(x) \in S'(\mathbb{R})$ *называется функционал* $F[f](k) \in S'(\mathbb{R})$, *определенный формулой*

$$(F[f](k), \varphi(k)) = (f(x), F[\varphi](x)), \quad \varphi \in S.$$

Обратное преобразование Фурье *задается формулой*

$$\left(F^{-1}[f](x), \varphi(x)\right) = \left(f(k), F^{-1}[\varphi](k)\right), \quad \varphi \in S.$$

Корректность определения 8.9 вытекает из теоремы 8.8.

Обсудим теперь причину, по которой мы определили преобразование Фурье на пространстве S' более узком чем D', а не на самом D'. Допустим, что нам удалось корректно определить преобразование Фурье $F[f]$ для произвольной функции f из D' также как в определении 8.9 и $F[f] \in D'$. Тогда для любой функции $\varphi \in D$ должно быть корректно определено выражение $(f(x), F[\varphi](x))$. Для этого необходимо, чтобы функция $F[\varphi](x)$ принадлежала D. Однако преобразование Фурье $F[\varphi](x)$ произвольной функции $\varphi \in D$, вообще говоря, не принадлежит пространству D, потому что носитель функции $F[\varphi](x)$ не обязан быть ограничен. Отсюда следует, что выражение $(f(x), F[\varphi](x))$ может оказаться не определено. Эта причина не позволяет определить преобразование Фурье $F[f]$ произвольной обобщенной функции f из D' так, чтобы $F[f] \in D'$.

Пример 8.10. *Найти преобразование Фурье функции* $\delta(x)$.

Решение. Несложно убедиться в том, что $\theta(x) \in S'(\mathbb{R})$. Далее, для любой функции $\varphi \in S'$ справедливы равенства

$$(F[\delta(x)](k), \varphi(k)) = (\delta(x), F[\varphi](x)) = F[\varphi](0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(k)\,dk = \int\limits_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(k)\,dk. \ \square$$

Ответ: $F[\delta(x)](k) = 1.$

Пример 8.11. *Найти преобразование Фурье функции $\theta(x)$.*

Решение. Для любой функции $\varphi \in S'$ справедливы равенства

$$(F[\theta(x)](k), \varphi(k)) = (\theta(x), F[\varphi](x)) = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx}\, dk = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{(ik-\varepsilon)x}\, dk =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, \varphi(k) \int\limits_0^{+\infty} e^{(ik-\varepsilon)x}\, dx = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{ik-\varepsilon}\, dk = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\varphi(k)}{k+i\varepsilon}\, dk = \left(\frac{i}{k+i0}, \varphi(k)\right). \ \square$$

Ответ: $F[\theta(x)](k) = \frac{i}{k+i0}$.

Пример 8.12. *Найти преобразование Фурье функции*

$$\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}.$$

Решение. Для любой функции $\varphi \in S'$ справедливы равенства

$$\left(F\left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}\right](k), \varphi(k)\right) = \left(\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}, F[\varphi](x)\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0} \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(k)\, e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dk =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(k) \left(\lim_{\varepsilon_1\to+0} \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dx\right) dk. \qquad (8.1)$$

Перестановка пределов интегрирования и переход к пределу под знаком интеграла в последнем равенстве возможны благодаря абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dx$. Из (8.1) следует, что

$$F\left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}\right] = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dx. \qquad (8.2)$$

Интеграл в правой части (8.2) легко берется по вычетам. При $k \geqslant 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{x=i\varepsilon_1} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} = 2\pi i\, \frac{e^{-\varepsilon_1 k}}{1+i\varepsilon_1+i\varepsilon_2}.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0} \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dx = 2\pi i, \quad k \geqslant 0. \qquad (8.3)$$

При $k \leqslant 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\, dx = -2\pi i \operatorname*{res}_{x=-1-i\varepsilon_2} \frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)} = -2\pi i\, \frac{e^{ik(-1-i\varepsilon_2)}}{-1-i\varepsilon_2-i\varepsilon_1}.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{(x-i\varepsilon_1)(x+1+i\varepsilon_2)}\,dx = 2\pi i\,e^{-ik}, \quad k\leqslant 0. \tag{8.4}$$

Подставляя (8.3) и (8.4) в представление (8.2), найдем

$$F\left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}\right] = 2\pi i\,\left[\theta(k)+e^{-ik}(1-\theta(k))\right]. \tag{8.5}$$

Учитывая, что

$$1-\theta(k)=\theta(-k), \tag{8.6}$$

в смысле равенства обобщенных функций (в смысле обычных функций равенство (8.6) не выполнено при $k=0$), равенство (8.5) удобно переписать в виде

$$F\left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}\right] = 2\pi i\,\left[\theta(k)+e^{-ik}\theta(-k)\right]. \ \square$$

Ответ: $F\left[\frac{1}{(x-i0)(x+1+i0)}\right] = 2\pi i\,\left[\theta(k)+e^{-ik}\theta(-k)\right]$.

Замечание 8.13. *Вычисление преобразования Фурье по формуле* (8.2)*, с последующим вычислением двух пределов при $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ оказалось довольно громоздким мероприятием. Следующий пример показывает, как можно избежать трудностей, связанных с введением дополнительных параметров ε_1 и ε_2.*

Пример 8.14. *Найти преобразование Фурье функции*

$$\frac{1}{(x+i0)(x-i)}.$$

Решение. Как и в примере 8.12 получим, что

$$F\left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{(x+i\varepsilon)(x-i)}\,dx. \tag{8.7}$$

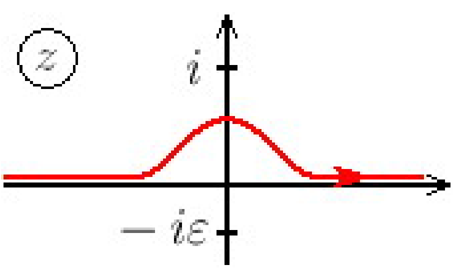

Рис. 1. Контур γ.

Заметим теперь, что при $\varepsilon>0$ функция

$$\frac{e^{ikz}}{(z+i\varepsilon)(z-i)}$$

регулярна в малой окрестности точки $z=0$. При этом ближайшая особенность к началу координат располагается в точке $z=-i\varepsilon$, которая располагается в нижней полуплоскости. Отсюда следует, что в окрестности нуля можно продеформировать контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, не изменяя значение интеграла (8.7). Деформируя контур как показано на рисунке 1, получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{(x+i\varepsilon)(x-i)}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{ikz}}{(z+i\varepsilon)(z-i)}\,dz = \int\limits_{\gamma}\frac{e^{ikz}}{z(z-i)}\,dz. \tag{8.8}$$

Мы сразу смогли перейти к пределу $\varepsilon\to 0+0$ в равенстве (8.8), потому что подынтегральная функция не содержит особенностей, лежащих на контуре γ при $\varepsilon>0$.

Далее, при $k \geqslant 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости

$$F\left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)}\right] = \int\limits_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)} = 2\pi e^{-k}.$$

При $k \leqslant 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости

$$F\left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)}\right] = \int\limits_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)}\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^{ikz}}{z(z-i)} = 2\pi.$$

Отсюда

$$F\left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)}\right] = 2\pi e^{-k}\theta(k) + 2\pi\theta(-k). \ \square$$

Ответ: $F\left[\frac{1}{(x+i0)(x-i)}\right] = 2\pi e^{-k}\theta(k) + 2\pi\theta(-k)$.

Для вычисления преобразования Фурье обобщенных функций полезна следующая теорема.

Теорема 8.15. *Пусть $f(x) \in S'(\mathbb{R})$, тогда справедливы следующие формулы.*

(1) $F[f^{(n)}(x)](k) = (-ik)^n F[f(x)](k)$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) $F^{(n)}[f(x)](k) = F[(ix)^n f(x)](k)$, $n \in \mathbb{N}$.

(3) $F[f(x+x_0)](k) = e^{-ikx_0} F[f(x)](k)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(4) $F[f(x)](k+k_0) = F\left[f(x)e^{ik_0x}\right](k)$, $k_0 \in \mathbb{R}$.

(5) $F^{-1}[f(x)](k) = \frac{1}{2\pi} F[f(x)](-k)$.

Пример 8.16. *Найти преобразование Фурье функции*

$$\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)}.$$

Решение. Воспользуемся утверждением 2 теоремы 8.15

$$F\left[\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right](k) = -F''\left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right](k). \tag{8.9}$$

Найдем теперь преобразование Фурье $F\left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right]$. Как и в примере 8.14 получим, что

$$F\left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right] = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\lim_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x+2-i\varepsilon_1)(x-1-i\varepsilon_2)}\,dx =$$

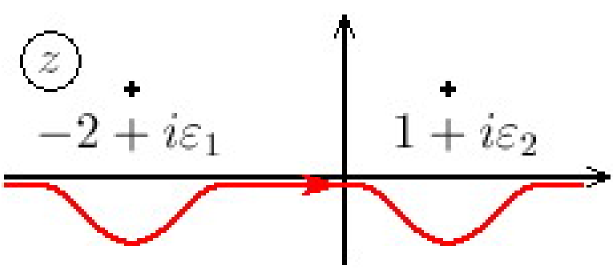

Рис. 2. Контур γ выделен красным цветом.

$$= \int\limits_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)}\,dz, \tag{8.10}$$

где контур интегрирования γ изображен на рисунке 2

Интеграл (8.10) берется по вычетам. При $k \geqslant 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)} + \operatorname*{res}_{z=1} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)}\right) = \frac{2\pi i}{3}\left(e^{ik} - e^{-2ik}\right). \tag{8.11}$$

При $k \leqslant 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости
$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{(z+2)(z-1)}\, dz = 0. \tag{8.12}$$

Подставляя (8.11) и (8.12) в (8.10), найдем
$$F\left[\frac{1}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right] = \frac{2\pi i}{3}\left(e^{ik} - e^{-2ik}\right)\theta(k).$$

Отсюда и из (8.9) получим, что
$$F\left[\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right] = -\frac{2\pi i}{3}\left[\left(e^{ik} - e^{-2ik}\right)\delta(k) + \left(ie^{ik} + 2ie^{-2ik}\right)\theta(k)\right]' =$$
$$= -\frac{2\pi i}{3}\left[\left(ie^{ik} + 2ie^{-2ik}\right)\theta(k)\right]' = -\frac{2\pi i}{3}\left[\left(-e^{ik} + 4e^{-2ik}\right)\theta(k) + \left(ie^{ik} + 2ie^{-2ik}\right)\delta(k)\right] =$$
$$= \frac{2\pi i}{3}\left[\left(e^{ik} - 4e^{-2ik}\right)\theta(k) - 3i\delta(k)\right] = \frac{2\pi i}{3}\left(e^{ik} - 4e^{-2ik}\right)\theta(k) + 2\pi\delta(k). \ \Box$$

Ответ: $F\left[\frac{x^2}{(x+2-i0)(x-1-i0)}\right] = \frac{2\pi i}{3}\left(e^{ik} - 4e^{-2ik}\right)\theta(k) + 2\pi\delta(k).$

Пример 8.17. *Найти преобразование Фурье функции x.*

Решение. Воспользуемся результатами теоремы 8.15 и примера 8.10
$$F[x](k) = -iF'[1](k) = -2\pi i\left(F^{-1}[1](-k)\right)' = -2\pi i\,(\delta(-k))' = -2\pi i\,(\delta(k))' = -2\pi i\,\delta'(k). \ \Box$$

Ответ: $F[x](k) = -2\pi i\,\delta'(k)$.

Пример 8.18. *Найти преобразование Фурье функции $P\frac{1}{x}$.*

Решение. Воспользуемся формулой Сохоцкого, см. стр. 15, и результатами теоремы 8.15 и примера 8.11
$$F\left[P\frac{1}{x}\right](k) = F\left[\frac{1}{x+i0}\right](k) + i\pi F\left[\delta(x)\right](k) = 2\pi F^{-1}\left[\frac{1}{x+i0}\right](-k) + i\pi =$$
$$= -2\pi i\theta(-k) + i\pi = i\pi\,\mathrm{sign}\,k. \ \Box$$

Ответ: $F\left[P\frac{1}{x}\right](k) = i\pi\,\mathrm{sign}\,k$.

Пример 8.19. *Найти преобразование Фурье функции*
$$\frac{1-\cos x}{x^2}P\frac{1}{x}. \tag{8.13}$$

Решение. Функция
$$\frac{1-\cos x}{x^2}$$
бесконечно дифференцируема на вещественной оси, поэтому обобщенная функция (8.13) определена корректно. Используя формулу Сохоцкого 5.10, получим
$$F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}P\frac{1}{x}\right] = -i\pi F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\delta(x)\right] + F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{x-i0}\right]. \tag{8.14}$$

Легко видеть, что
$$\frac{1-\cos x}{x^2}\delta(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}\Big|_{x=0}\delta(x) = \frac{1}{2}\delta(x).$$
Отсюда найдем первое преобразование Фурье
$$F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\delta(x)\right] = F\left[\frac{1}{2}\delta(x)\right] = \frac{1}{2}.$$

Второе преобразование Фурье может быть вычислено по классической формуле
$$F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{x-i0}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{x-i\varepsilon}e^{ikx}\,dx. \tag{8.15}$$

Функция
$$\frac{1-\cos z}{z^2}\frac{1}{z-i\varepsilon}e^{ikz}$$
регулярна во всей комплексной плоскости за исключением точки $z = i\varepsilon$. Продеформируем контур интегрирования в интеграле (8.15) так, чтобы в окрестности точки $z = 0$ он стал располагаться в нижней комплексной плоскости. Обозначим полученный контур через γ, см. рисунок 3. Поскольку при данной деформации контура мы не пересекли полюс $z = i\varepsilon$, значение интеграла (8.15) не изменилось. В результате получим
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{x-i\varepsilon}e^{ikx}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\gamma} \frac{1-\cos z}{z^2(z-i\varepsilon)}e^{ikz}\,dz.$$

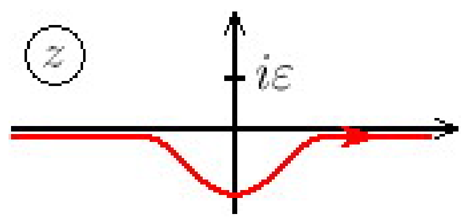

Рис. 3. Контур γ выделен красным цветом.

Поскольку при $\varepsilon \to +0$ полюс $z = i\varepsilon$ не пересекает контур γ, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Отсюда
$$F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{x-i0}\right] = \int\limits_{\gamma}\frac{1-\cos z}{z^3}e^{ikz}\,dz =$$
$$= \int\limits_{\gamma}\frac{e^{ikz}}{z^3}\,dz - \int\limits_{\gamma}\frac{e^{i(k+1)z}}{2z^3}\,dz - \int\limits_{\gamma}\frac{e^{i(k-1)z}}{2z^3}\,dz. \tag{8.16}$$

Вычислим первый интеграл в (8.16). По лемме Жордана при $k \geq 0$ контур интегрирования необходимо замкнуть сверху, а при $k < 0$ снизу. Отсюда
$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^{ikz}}{z^3}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{ikz}}{z^3} = -\pi i k^2, \quad \text{при} \quad k \geq 0,$$
$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^{ikz}}{z^3}\,dz = 0, \quad \text{при} \quad k < 0.$$

Перепишем полученное выражение в компактной форме
$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^{ikz}}{z^3}\,dz = -\pi i k^2\theta(k).$$

Аналогично можно вычислить два оставшихся интеграла
$$\int\limits_\gamma \frac{e^{i(k+1)z}}{2z^3}\,dz = -\frac{\pi i}{2}k^2\theta(k+1), \quad \int\limits_\gamma \frac{e^{i(k-1)z}}{2z^3}\,dz = -\frac{\pi i}{2}k^2\theta(k-1).$$
Отсюда
$$F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{x-i0}\right] = \frac{\pi i}{2}\Big[(k-1)^2\theta(k-1)+(k+1)^2\theta(k+1)-2k^2\theta(k)\Big].$$
Осталось подставить полученные выражения в (8.14).

Ответ:
$$F\left[\frac{1-\cos x}{x^2}P\frac{1}{x}\right] = \frac{\pi i}{2}\Big[(k-1)^2\theta(k-1)+(k+1)^2\theta(k+1)-2k^2\theta(k)-1\Big].$$

Домашнее задание:

Задача 8.20. *Докажите теорему* 8.15.

Задача 8.21. *Найти преобразование Фурье функции* $\theta(x^2-1)$.

Ответ: $F[\theta(x^2-1)](k) = \frac{i}{k+i0}e^{ik} - \frac{i}{k-i0}e^{-ik} = 2\pi\delta(k) - 2\sin k\,P\frac{1}{k} = 2\pi\delta(k) - 2\frac{\sin(k)}{k}$.

Задача 8.22. *Найти преобразование Фурье функции* $\frac{1}{(x-i0)(x+4+i0)}$.

Ответ: $F\left[\frac{1}{(x-i0)(x+4+i0)}\right] = \frac{\pi i}{2}\left(\theta(k)+e^{-4ik}\theta(-k)\right)$.

Задача 8.23. *Найти преобразование Фурье функции* $\frac{1}{(x-i0)^2}$.

Ответ: $F\left[\frac{1}{(x-i0)^2}\right] = -2\pi k\,\theta(k)$.

Задача 8.24. *Найти преобразование Фурье функции* $P\frac{1}{x^2}$.

Ответ: $F\left[P\frac{1}{x^2}\right] = -\pi k\,\mathrm{sign}\,k = -\pi|k|$.

9. Свертка обобщенных функций.

Напомним классическое определение свертки двух функций.

Определение 9.1. *Пусть заданы две локально интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что при любом $x \in \mathbb{R}$ сходится интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|\,dy.$$

Тогда свerткой *функций $f(x)$ и $g(x)$ называют функцию*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Свертку обобщенных функций определяют так, чтобы она, в случае регулярной обобщенной функции с гладким быстро убывающим ядром совпала с классической сверткой (сравни с мотивировками к определению 2.1 обобщенной производной на стр. 7 и к определению 8.9 преобразования Фурье на стр. 24).

Пусть заданы регулярные обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$ с гладкими быстро убывающими ядрами. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}((f*g)(x), \varphi(x)) &= \int\limits_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy \right) \varphi(x)\,dx = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \int\limits_{\mathbb{R}} g(x-y)\varphi(x)\,dx\,dy = \Big[x = z+y\Big] = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \int\limits_{\mathbb{R}} g(z)\varphi(y+z)\,dz\,dy = \\ &= \Big(f(y), \big(g(z), \varphi(y+z)\big)\Big).\end{aligned}$$

Отсюда мы приходим к следующему определению.

Определение 9.2. Сверткой *обобщенных функций $f \in D'$ и $g \in D'$ называют функционал $f * g$, действующий по правилу*

$$\big((f*g)(x), \varphi(x)\big) = \Big(f(y), \big(g(z), \varphi(y+z)\big)\Big).$$

Здесь следует понимать, что $\big(g(z), \varphi(y+z)\big)$ не всегда функция с ограниченным носителем и поэтому определение 9.2 *не всегда корректно*. Например, при $f(x) = 1$ и $g(x) = 1$ имеем

$$\big((1*1)(x), \varphi(x)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y+z)\,dz\,dy = \Big[z = y - x\Big] = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx\,dy. \tag{9.1}$$

Интеграл в правой части (9.1), вообще говоря, расходится и, следовательно, свертка обобщенных функций $f(x) = 1$ и $g(x) = 1$ не существует.

Следующая теорема приводит достаточные условия существования свертки.

Теорема 9.3. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – обобщенные функции из $D'(\mathbb{R})$, удовлетворяющие одному из следующих условий.*

- *Носитель* $\operatorname{supp} f$ *является ограниченным множеством.*
- *Носитель* $\operatorname{supp} g$ *является ограниченным множеством.*
- *Носители* $\operatorname{supp} f$ *и* $\operatorname{supp} g$ *принадлежат множеству $[x_0, +\infty)$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$.*

• *Носители* $\operatorname{supp} f$ *и* $\operatorname{supp} g$ *принадлежат множеству* $(-\infty, x_0]$ *при некотором* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Тогда свертка обобщенных функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *корректно определена и* $f * g \in D'$.

Сформулируем основные свойства свертки обобщенных функций.

Теорема 9.4. *Справедливы следующие равенства, при условии, что выражения, стоящие в левой и правой частях, корректно определены.*

(1) $f * g = g * f$.

(2) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(3) $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

(4) $F[f * g] = F[f]\, F[g]$.

Пример 9.5. *Найти свертку* $f(x) * \delta(x - a)$, *где* $f(x) \in D'(\mathbb{R})$.

Решение. Воспользуемся определением 9.2

$$\big(f(x) * \delta(x-a), \varphi(x)\big) = \Big(f(y), \big(\delta(z-a), \varphi(y+z)\big)\Big) = \big(f(y), \varphi(y+a)\big) = \big(f(x-a), \varphi(x)\big)\,. \square$$

Ответ: $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$.

Пример 9.6. *Найти свертку* $x * \theta(1 - x^2)$, *используя преобразование Фурье.*

Решение. Вычислим преобразования Фурье функций x и $\theta(1 - x^2)$

$$F[x](k) = -iF'[1](k) = -2\pi i \delta'(k), \tag{9.2}$$

$$F\left[\theta(1-x^2)\right](k) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ikx}\, dx = \frac{1}{ik} e^{ikx}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin k}{k}.$$

Воспользуемся теперь утверждением 4 теоремы 9.4

$$F\left[x * \theta(1-x^2)\right](k) = F[x](k)\, F\left[\theta(1-x^2)\right](k) = -4\pi i \delta'(k)\, \frac{\sin k}{k} = -4\pi i \delta'(k). \tag{9.3}$$

Здесь мы воспользовались результатом примера 3.1 на стр. 10.

Из (9.2) следует, что $F^{-1}[-4\pi i \delta'(k)] = 2x$. Отсюда и из (9.3) получим, что

$$x * \theta(1 - x^2) = 2x. \square$$

Ответ: $x * \theta(1 - x^2) = 2x$.

Домашнее задание:

Задача 9.7. *Найти свертку* $\delta'(x) * \cos x$ *двумя способами.*

Ответ: $\delta'(x) * \cos x = -\sin x$.

Задача 9.8. *Найти свертку* $x^2 * \theta(x - x^2)$, *используя преобразование Фурье.*

Ответ: $x^2 * \theta(x - x^2) = x^2 - x + \frac{1}{3}$.

Задача 9.9. *Найти свертку* $\theta(x) * \theta(x)$, *используя преобразование Фурье.*

Ответ: $\theta(x) * \theta(x) = x\theta(x)$.

Задача 9.10. *Найти свертку* $\frac{1}{x+1+i0} * \frac{1}{x-1+i0}$, *используя преобразование Фурье.*

Ответ: $\frac{1}{x+1+i0} * \frac{1}{x-1+i0} = \frac{-2\pi i}{x+i0}$.

Задача 9.11. *Найти свертку* $\frac{\cos x}{x+i0} * \frac{1}{x-1-i0}$, *используя преобразование Фурье.*

Ответ: $\frac{\cos x}{x+i0} * \frac{1}{x-1-i0} =?$.

10. 3-ая контрольная работа (задача: 3; 15 минут).

Вариант контрольной работы №3.

Задача 3. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{x}{(x+i0)(x+1-i0)}\,.$$

Вариант контрольной работы №3.

Задача 3. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{x}{x^2+x-i0}\,.$$

11. Метод Фурье для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R})$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad f(x) \in S'(\mathbb{R}) \tag{11.1}$$

с постоянными коэффициентами a_0, …, a_n. Метод Фурье для решения уравнений вида (11.1) в $S'(\mathbb{R})$ заключается в следующем. Решение строится в два шага.

(1) Вычисляем преобразование Фурье от обеих частей равенства (11.1). Используя теорему 8.15 на стр. 27, преобразуем полученное выражение к виду

$$F[y]\Big(a_n(-ik)^n + a_{n-1}(-ik)^{n-1} + \ldots + a_1(-ik) + a_0\Big) = F[f(x)]. \tag{11.2}$$

Решаем уравнение (11.2) методами, изложенными на стр. 16, и находим $F[y]$.

(2) Вычисляем обратное преобразование Фурье от полученного выражения для $F[y]$ и находим решение $y(x)$.

- Из свойств преобразования Фурье вытекает, что найденное таким способом решение $y(x)$ принадлежит пространству $S'(\mathbb{R})$.

Пример 11.1. *Найти общий вид решения уравнения $y' + y = \delta(x)$ в S'.*

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства $y' + y = \delta(x)$, найдем

$$F[y'] + F[y] = F[\delta(x)] \quad \Longleftrightarrow \quad -ikF[y] + F[y] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad F[y] = \frac{1}{1-ik} = \frac{i}{k+i}.$$

Шаг 2. Для того чтобы найти решение исходного уравнения, осталось вычислить обратное преобразование Фурье

$$y(x) = F^{-1}\left[\frac{i}{k+i}\right](x).$$

Пусть $\varphi(x) \in S'(\mathbb{R})$, тогда

$$\left(F^{-1}\left[\frac{i}{k+i}\right](x), \varphi(x)\right) = \left(\frac{i}{k+i}, F^{-1}[\varphi(x)](k)\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{i}{k+i}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ikx}\,dx\right) dk =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{k+i}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x)e^{-ikx}\,dx\right) dk + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{k+i}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ikx}\,dx\right) dk =$$

$$= -i^2 \operatorname*{res}_{k=-i}\left(\frac{1}{k+i}\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ikx}\,dx\right) = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x)e^{-x}\,dx.$$

Отсюда

$$y(x) = F^{-1}\left[\frac{i}{k+i}\right](x) = e^{-x}\theta(x). \tag{11.3}$$

Заметим, что функция $\frac{i}{k+i}$ не является абсолютно интегрируемой, поэтому мы не могли вычислять обратное преобразование Фурье по классичесческой формуле.

Отметим также, что решение (11.3) не содержит общего решения $y_0(x) = Ce^{-x}$ однородного уравнения $y_0' + y_0 = 0$. Это следствие того, что преобразование Фурье действует как взаимно однозначное отображение на пространстве $S'(\mathbb{R})$ и e^{-x} не принадлежит $S'(\mathbb{R})$. $\square$

Ответ: $y(x) = e^{-x}\theta(x)$.

Пример 11.2. *Найти общий вид решения уравнения в* S'

$$y'' + y = 1 + \delta(x). \tag{11.4}$$

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства (11.4), найдем

$$F[y''] + F[y] = F[1] + F[\delta(x)] \quad \Longleftrightarrow \quad -k^2F[y] + F[y] = 2\pi\delta(k) + 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad F[y] = 2\pi\delta(k) - \frac{1}{(k+1+i0)(k-1+i0)} + C_1\delta(k-1) + C_2\delta(k+1),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Шаг 2. Вычисляем обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}\left[2\pi\delta(k)\right] = 1, \quad F^{-1}\left[\delta(k-1)\right] = \frac{1}{2\pi}e^{-ix}, \quad F^{-1}\left[\delta(k+1)\right] = \frac{1}{2\pi}e^{ix},$$

$$F^{-1}\left[\frac{1}{(k+1+i0)(k-1+i0)}\right] = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon_1\to+0}\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{(k+1+i\varepsilon_1)(k-1+i\varepsilon_2)}e^{-ikx}\,dk =$$

$$= -i\left(\operatorname*{res}_{k=-1}\frac{1}{(k+1)(k-1)}e^{-ikx} + \operatorname*{res}_{k=1}\frac{1}{(k+1)(k-1)}e^{-ikx}\right)\theta(x) =$$

$$= -i\left(\frac{1}{-2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}\right)\theta(-x) = -\sin(x)\,\theta(x).$$

Отсюда

$$y(x) = 1 + \sin(x)\,\theta(x) + \frac{C_1}{2\pi}\,e^{-ix} + \frac{C_2}{2\pi}\,e^{ix} = 1 + \sin(x)\,\theta(x) + Ae^{-ix} + Be^{ix},$$

где A и B – произвольные постоянные. $\square$

Ответ: $y(x) = 1 + \sin(x)\,\theta(x) + Ae^{-ix} + Be^{ix}$, где A и B – произвольные постоянные.

Пример 11.3. *Найти общий вид решения уравнения в* D'

$$y'' - y = \delta'(x). \tag{11.5}$$

Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Найдем вначале решение уравнения (11.5) в S'. Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства (11.5), найдем

$$F[y''] - F[y] = F[\delta'(x)] \quad \Longleftrightarrow \quad -k^2F[y] - F[y] = -ik \quad \Longleftrightarrow \quad F[y] = -\frac{ik}{k^2+1}.$$

Шаг 2. Вычисляем обратное преобразование Фурье

$$y(x) = -F^{-1}\left[\frac{ik}{k^2+1}\right](x) = \left(F^{-1}\left[\frac{1}{k^2+1}\right](x)\right)' = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{k^2+1}e^{-ikx}\,dk\right)' =$$

$$= i\left(\theta(-x)\operatorname*{res}_{k=i}\frac{1}{k^2+1}e^{-ikx} - \theta(x)\operatorname*{res}_{k=-i}\frac{1}{k^2+1}e^{-ikx}\right)' = i\left(\theta(-x)\frac{1}{2i}e^{x} - \theta(x)\frac{1}{-2i}e^{-x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x\theta(-x) + e^{-x}\theta(x)\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x\theta(-x) - e^x\delta(x) - e^{-x}\theta(x) + e^{-x}\delta(x)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x\theta(-x) - e^{-x}\theta(x)\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (11.5) в S' имеет вид

$$y_s(x) = \frac{1}{2}\left(e^x\theta(-x) - e^{-x}\theta(x)\right).$$

Шаг 3. Общее решение однородного уравнения $y_0'' - y_0 = 0$ в D' можно записать в виде

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x},$$

где A и B – произвольные постоянные. Заметим, что $y_0(x) \notin S'(\mathbb{R})$, если $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Шаг 4. Общее решение уравнения (11.5) в D' имеет вид

$$y(x) = y_s(x) + y_0(x) = \frac{1}{2}\left(e^x\theta(-x) - e^{-x}\theta(x)\right) + Ae^x + Be^{-x}. \ \square$$

Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}\left(e^x\theta(-x) - e^{-x}\theta(x)\right) + Ae^x + Be^{-x}$, где A и B – произвольные постоянные.

Домашнее задание:

Задача 11.4. *Найти общий вид решения уравнения* $y' - iy = 1 + \delta'(x)$ *в* S'.

Ответ: $y(x) = i + \delta(x) + ie^{ix}\theta(x) + Ae^{ix}$, где A – произвольная постоянная.

Задача 11.5. *Найти общий вид решения уравнения* $y'' - 2y' + y = \delta(x)$ *в* S'.

Ответ: $y(x) = -xe^x\theta(-x)$.

Задача 11.6. *Найти общий вид решения уравнения* $y''' + y'' + y' + y = 2\delta(x)$ *в* S'.

Ответ: $y(x) = \left(e^{-x} + \sin x - \cos x\right)\theta(x) + A\sin x + B\cos x$, где A и B – произвольные постоянные.

Задача 11.7. *Найти общий вид решения уравнения* $y'' + 2y' + 2y = \delta(x) + 5e^x\theta(-x)$ *в* S'.

Ответ: $y(x) = e^{-x}\sin x\,\theta(x) + e^x\theta(-x) + e^{-x}(2\sin x + \cos x)\theta(x)$.

Задача 11.8. *Найти общий вид решения уравнения* $y'' + 2y' + y = x + 3\delta(x)$ *в* D'.

Ответ: $y(x) = 3xe^{-x}\theta(x) + x - 2 + Ae^x + Bxe^x$, где A и B – произвольные постоянные.

12. 4-ая контрольная работа (задача: 4; 10 минут).

Вариант контрольной работы №4.

Задача 4. Найти общий вид решения уравнения в S'

$$y' - 2iy = \delta(x).$$

Ответ: $y(x) = e^{2ix}\theta(x) + Ce^{2ix}$, где C – произвольная постоянная.

Вариант контрольной работы №4.

Задача 4. Найти общий вид решения уравнения в S'

$$y'' + iy' = \delta(x).$$

Ответ:

13. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Выражение фундаментального решения через решение задачи Коши.

Определение 13.1. Фундаментальным решением *линейного дифференциального оператора*

$$Ly = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

с постоянными коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$ *называется произвольная обобщенная функция* $g(x)$ *из* $D'(\mathbb{R})$, *удовлетворяющая уравнению*

$$Lg(x) = \delta(x).$$

Замечание 13.2. *Фундаментальное решение определено с точностью до прибавления произвольного решения однородного уравнения* $Ly = 0$.

Один из способов вычисления фундаментального решения, основанный на методе Фурье, был разобран ранее, см. стр. 35. Напомним, что этот метод всегда нас приводил к фундаментальному решению из пространства $S'(\mathbb{R})$. Следующая теорема дает другой, иногда более простой, алгоритм вычисления фундаментального решения.

Теорема 13.3. *Пусть* $z(x)$ *– решение классической задачи Коши*

$$\begin{cases} Lz = a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z' + a_0 z = 0, \ a_n \neq 0, \\ z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0, \\ z^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = \frac{1}{a_n} z(x) \theta(x)$$

является фундаментальным решением оператора L.

Пример 13.4. *Найти фундаментальное решение оператора* $Ly = y' - 2y$.

Решение. Общее решение однородного уравнения $z' - 2z = 0$ имеет вид

$$z(x) = Ce^{2x},$$

где C – произвольная постоянная. Отсюда находим, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} z' - 2z = 0, \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

имеет вид

$$z(x) = e^{2x}.$$

Теперь из теоремы 13.3 следует, что функция $g(x) = e^{2x}\theta(x)$ является фундаментальным решением оператора $Ly = y' - 2y$. □

Ответ: $g(x) = e^{2x}\theta(x)$.

Пример 13.5. *Найти фундаментальное решение оператора* $Ly = 2y''' - 8y'$.

Решение. Общее решение однородного уравнения $2z''' - 8z' = 0$ имеет вид

$$z(x) = A + Be^{2x} + Ce^{-2x},$$

где A, B и C – произвольные постоянные. Отсюда находим, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} 2z''' - 8z' = 0, \\ z(0) = z'(0) = 0, \ z''(0) = 1 \end{cases}$$

имеет вид

$$z(x) = \frac{1}{8}(e^{2x} + e^{-2x} - 2).$$

Из теоремы 13.3 следует, что фундаментальным решением оператора L является функция

$$g(x) = \frac{1}{16}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)\theta(x). \ \square$$

Ответ: $g(x) = \frac{1}{16}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)\theta(x)$.

Домашнее задание:

Задача 13.6. *Найти фундаментальное решение оператора* $Ly = y' + 4y$.

Ответ: $g(x) = e^{-4x}\theta(x)$.

Задача 13.7. *Найти фундаментальное решение оператора* $Ly = y'' + 4y' + 4y$.

Ответ: $g(x) = xe^{-2x}\theta(x)$.

Задача 13.8. *Найти фундаментальное решение оператора* $Ly = y'' - 2y' + 2y$.

Ответ: $g(x) = e^{x}\sin x\,\theta(x)$.

14. Решение неоднородных уравнений с использованием фундаментального решения.

Теорема 14.1. *Пусть $g(x)$ – фундаментальное решение линейного дифференциального оператора L. Пусть задана $f(x) \in D'(\mathbb{R})$ такая, что свертка $(g * f)(x)$ существует в $D'(\mathbb{R})$. Тогда*

$$y(x) = (g * f)(x)$$

является решением уравнения

$$Ly(x) = f(x). \tag{14.1}$$

Теорема 14.1 позволяет найти частное решение неоднородного уравнения (14.1). Для того чтобы найти общее решение уравнения (14.1), необходимо добавить к найденному частному решению общее решение однородного уравнения $Ly(x) = 0$.

Пример 14.2. *Найти частное решение уравнения*

$$y' + 2y = x, \tag{14.2}$$

вычислив предварительно фундаментальное решение.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Используя теорему 13.3, найдем Фундаментальное решение оператора $Ly = y' + 2y$

$$g(x) = e^{-2x}\theta(x).$$

Шаг 2. Легко видеть, что существует классическая свертка функций $g(x)$ и $f(x) = x$. Отсюда и из теоремы 14.1 найдем решение уравнения (14.2)

$$y(x) = (g * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2z}\theta(z)(x-z)\,dz = \int\limits_0^{\infty} e^{-2z}(x-z)\,dz =$$

$$= x\int\limits_0^{\infty} e^{-2z}\,dz - \int\limits_0^{\infty} ze^{-2z}\,dz = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\,. \square$$

Ответ: $g(x) = e^{-2x}\theta(x)$, $y(x) = \frac{2x-1}{4}$.

Пример 14.3. *Найти частное решение уравнения*

$$y'' - 9y = e^x, \tag{14.3}$$

вычислив предварительно фундаментальное решение.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Используя теорему 13.3, найдем Фундаментальное решение оператора $Ly = y'' - 9y$

$$g_1(x) = \frac{1}{6}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)\theta(x).$$

Шаг 2. Свертка функций $g_1(x)$ и $f(x) = e^x$ не существует даже в смысле обобщенных функций. Тем не менее можно выбрать другое фундаментальное решение $g(x)$ так, чтобы свертка $g(x)$ и $f(x)$ существовала.

Общий вид фундаментального решения оператора $Ly = y'' - 9y$ складывается из фундаментального решения $g_1(x)$ и общего решения однородного уравнения $y'' - 9y = 0$

$$g(x) = \frac{1}{6}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)\theta(x) + Ae^{3x} + Be^{-3x},$$

где A и B – произвольные постоянные. Полагая $A = -\frac{1}{6}$ и $B = 0$, получим требуемое фундаментальное решение

$$g(x) = -\frac{1}{6}e^{3x}\theta(-x) - \frac{1}{6}e^{-3x}\theta(x).$$

Шаг 3. Легко видеть, что существует классическая свертка функций $g(x)$ и $f(x) = e^x$. Отсюда найдем решение уравнения (14.3)

$$y(x) = (g * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z)\,dz = -\frac{1}{6}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{3z}\theta(-z) + e^{-3z}\theta(z)\right) e^{x-z}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3z}e^{x-z}\,dz - \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3z}e^{x-z}\,dz = -\frac{1}{12}e^x - \frac{1}{24}e^x = -\frac{1}{8}e^x. \ \Box$$

Ответ: $g(x) = -\frac{1}{6}e^{3x}\theta(-x) - \frac{1}{6}e^{-3x}\theta(x)$, $y(x) = -\frac{1}{8}e^x$.

Пример 14.4. *Найти частное решение уравнения*

$$y' + y = e^{-2x}, \tag{14.4}$$

вычислив предварительно фундаментальное решение.

Решение. Решение проводим в несколько шагов.

Шаг 1. Используя теорему 13.3, найдем Фундаментальное решение оператора $Ly = y' + y$

$$g_1(x) = e^{-x}\theta(x).$$

Шаг 2. Свертка функций $g_1(x)$ и $f(x) = e^{-2x}$ не существует. Тем не менее можно выбрать другое фундаментальное решение $g(x)$ так, чтобы свертка $g(x)$ и $f(x)$ существовала.

Общий вид фундаментального решения оператора $Ly = y' + y$ складывается из фундаментального решения $g_1(x)$ и общего решения однородного уравнения $y' + y = 0$

$$g(x) = e^{-x}\theta(x) + Ae^{-x},$$

где A – произвольная постоянная. Полагая $A = -1$, получим требуемое фундаментальное решение

$$g(x) = -e^{-x}\theta(-x).$$

Шаг 3. Легко видеть, что существует классическая свертка функций $g(x)$ и $f(x) = e^{2x}$. Отсюда найдем решение уравнения (14.4)

$$y(x) = (g * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z)\,dz = -\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-z}\theta(-z)e^{-2x+2z}\,dz = -e^{-2x}\int\limits_{-\infty}^{0} e^z\,dz = -e^{-2x}. \ \Box$$

Ответ: $g(x) = -e^{-x}\theta(-x)$, $y(x) = -e^{-2x}$.

Домашнее задание:

Задача 14.5. *Найти частное решение уравнения $-y'' + y = x$, вычислив предварительно фундаментальное решение.*

Ответ: $g(x) = \frac{1}{2}e^x\theta(-x) + \frac{1}{2}e^{-x}\theta(x)$, $y(x) = x$.

Задача 14.6. *Найти частное решение уравнения $y'' + y = 2e^x$, вычислив предварительно фундаментальное решение.*

Ответ: $g(x) = \sin(x)\theta(x)$, $y(x) = e^x$.

Задача 14.7. *Найти частное решение уравнения* $y' - y = \theta(x)$*, вычислив предварительно фундаментальное решение.*

Ответ: $g(x) = e^x\theta(x)$, $y(x) = (e^x - 1)\theta(x)$.

Задача 14.8. *Найти частное решение уравнения* $y'' + y = \theta(x)$*, вычислив предварительно фундаментальное решение.*

Ответ: $g(x) = \sin x\theta(x)$, $y(x) = (1 - \cos x)\theta(x)$.

Задача 14.9. *Найти частное решение уравнения* $y'' + y' - 2y = e^{-x}$*, вычислив предварительно фундаментальное решение.*

Ответ: $g(x) = -\frac{1}{3}e^x\theta(-x) - \frac{1}{3}e^{-2x}\theta(x)$, $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

15. 5-ая контрольная работа (задача: 5; 10 минут).

Вариант контрольной работы №5.

Задача 5. Найти частное решение уравнения

$$y' + y = f(x),$$

где f – непрерывная функция с компактным носителем.

Ответ:

$$y(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-z} f(x-z)\, dz.$$

Вариант контрольной работы №5.

Задача 5. Найти частное решение уравнения

$$y'' - y' = f(x),$$

где f – непрерывная функция с компактным носителем.

Ответ:

$$y(x) = \int\limits_0^{+\infty} (e^{z} - 1) f(x-z)\, dz.$$

16. Метод Фурье для решения простейших линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $S'(\mathbb{R}^2)$.

Определение 16.1. Фундаментальным решением *линейного дифференциального оператора L с постоянными коэффициентами, действующего в $S'(\mathbb{R}^2)$, называется* произвольная *обобщенная функция $g(x,y)$ из $S'(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая уравнению*

$$Lg(x,y) = \delta(x)\delta(y).$$

Пример 16.2. *Найти фундаментальное решение из пространства $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора*

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Фундаментальное решение оператора L удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \delta(x)\delta(y). \tag{16.1}$$

Вычисляя преобразование Фурье по переменной y от обеих частей равенства (16.1), получим

$$\frac{\partial h(x,k)}{\partial x} + kh(x,k) = \delta(x), \tag{16.2}$$

где

$$h(x,k) = F_{y\to k}[g(x,y)]. \tag{16.3}$$

Теорема 13.3 позволяет найти решение уравнения (16.2) в пространстве $D'(\mathbb{R})$

$$h_1(x,k) = e^{-kx}\theta(x).$$

Для того чтобы найти $g(x,y)$, нам потребуется взять обратное преобразование Фурье от $h_1(x,k)$. Поэтому нам необходимо найти фундаментальное решение уравнения (16.2) из пространства $S'(\mathbb{R})$ по переменной k. Общее решение уравнения (16.2) имеет вид

$$h(x,k) = \theta(x)e^{-kx} + C(k)e^{-kx},$$

где $C(k)$ – произвольная функция. Функцию $C(k)$ выбираем так, чтобы функция $h(x,k)$ убывала по k при всех x. Отсюда

$$\begin{cases} \theta(x) + C(k) = 0 & \text{при} \quad x>0,\ k<0, \\ \theta(x) + C(k) = 0 & \text{при} \quad x<0,\ k>0 \end{cases} \iff \begin{cases} C(k) = -\theta(x) = -1 & \text{при} \quad x>0,\ k<0, \\ C(k) = -\theta(x) = 0 & \text{при} \quad x<0,\ k>0. \end{cases}$$

В результате находим, что $C(k) = -\theta(-k)$ и

$$h(x,k) = \Big(\theta(x) - \theta(-k)\Big)\, e^{-kx}.$$

Шаг 2. Из представления (16.3) находим фундаментальное решение оператора L

$$g(x,y) = F^{-1}_{k\to y}\left[h(x,k)\right] = F^{-1}_{k\to y}\left[\Big(\theta(x)-\theta(-k)\Big)\, e^{-kx}\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\theta(x)-\theta(-k)\Big)\, e^{-kx}e^{-iky}\,dk =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} x<0, & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} -\theta(-k)e^{-kx}e^{-iky}\,dk = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-k(x+iy)}\,dk = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x+iy} \\ x\geqslant 0, & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(1-\theta(-k)\Big)\, e^{-kx}e^{-iky}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-k(x+iy)}\,dk = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x+iy} \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{x+iy}\,.$$

Ответ: $g(x,y)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{x+iy}$.

Пример 16.3. *Найти фундаментальное решение из пространства* $S'(\mathbb{R}^2)$ *оператора*

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Фундаментальное решение оператора L удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}=\delta(x)\delta(y). \tag{16.4}$$

Вычисляя преобразование Фурье по переменной y от обеих частей равенства (16.4), получим

$$\frac{\partial^2 h(x,k)}{\partial x^2}+k^2 h(x,k)=\delta(x), \tag{16.5}$$

где

$$h(x,k)=F_{y\to k}[g(x,y)]. \tag{16.6}$$

Теорема 13.3 позволяет найти решение уравнения (16.5)

$$h(x,k)=\frac{\sin(kx)}{k}\theta(x).$$

Легко видеть, что это решение принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^2)$.

Шаг 2. Из представления (16.6) находим фундаментальное решение оператора L

$$g(x,y)=F^{-1}_{k\to y}\left[h(x,k)\right]=F^{-1}_{k\to y}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\theta(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\theta(x)\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin(kx)}{k}e^{-iky}\,dk. \tag{16.7}$$

Интеграл в правой части равенства (16.7) легко вычисляется по вычетам,

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin(kx)}{k}e^{-iky}\,dk=\int\limits_{\gamma}\frac{\sin(kx)}{k}e^{-iky}\,dk=$$

$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{k}(e^{ikx}-e^{-ikx})e^{-iky}\,dk=$$

$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{k}\,e^{ik(x-y)}\,dk-\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{k}\,e^{-ik(x+y)}\,dk=$$

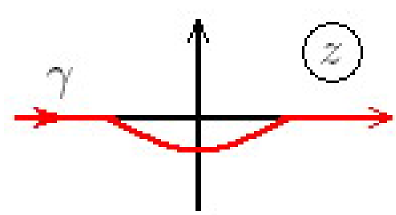

Рис. 4. Контур γ выделен красным цветом.

$$=\pi\theta(x-y)\operatorname*{res}_{k=0}\left(\frac{1}{k}\,e^{ik(x-y)}\right)-\pi\theta(-x-y)\operatorname*{res}_{k=0}\left(\frac{1}{k}\,e^{-ik(x+y)}\right)=\pi\theta(x-y)-\pi\theta(-x-y),$$

где контур интегрирования γ изображен на рисунке 4. Отсюда и из (16.7) найдем

$$g(x,y)=\frac{1}{2}\,\theta(x)\Big(\theta(x-y)-\theta(-x-y)\Big)=\frac{1}{2}\,\theta(x-|y|).$$

Заметим, что мы могли вначале вычислить преобразование Фурье по переменной x. Тогда в качестве фундаментального решения мы нашли бы $g_2(x,y)=-\frac{1}{2}\,\theta(y-|x|)$. □

Ответ: $g(x,y)=\frac{1}{2}\,\theta(x-|y|)$.

Пример 16.4. *Найти частное решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),$$

где $f(x,y)$ – непрерывная функция по обоим аргументам.

Решение. Фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ найдено в примере 16.3. Отсюда

$$u(x,y) = (f*g)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\alpha,\beta)g(x-\alpha, y-\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} d\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} d\beta\, f(\alpha,\beta)\theta(x-\alpha-|y-\beta|) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} d\alpha \int\limits_{y-(x-\alpha)}^{y+(x-\alpha)} d\beta\, f(\alpha,\beta). \ \square$$

Ответ: $u(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} d\alpha \int\limits_{y-(x-\alpha)}^{y+(x-\alpha)} d\beta\, f(\alpha,\beta)$.

Домашнее задание:

Задача 16.5. *Найти фундаментальное решение из $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.*

Ответ: $h(x,k) = \frac{i}{k+i0}\,\theta(x)$, $g(x,y) = \theta(x)\theta(y)$.

Задача 16.6. *Найти фундаментальное решение из $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y}$.*

Ответ: $h(x,k) = \frac{i}{k+i0}\,e^x\theta(x)$, $g(x,y) = e^x\theta(x)\theta(y)$.

17. 6-ая контрольная работа (задача: 6; 20 минут).

Вариант контрольной работы №6.

Задача 6. Найти фундаментальное решение из пространства $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

и найти частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция в $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем.

Ответ:

$$g(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\theta(t),$$

$$u(t,x) = (g * f)(t,x) = \int\limits_0^{+\infty} ds \int\limits_{\mathbb{R}} dy\, \frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\, e^{-\frac{y^2}{4s}} f(t-s, x-y).$$

Вариант контрольной работы №6.

Задача 6. Найти фундаментальное решение из пространства $S'(\mathbb{R}^2)$ оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

и найти частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция в $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем.

Ответ:

$$g(x,y) = \delta(x-y)\theta(x),$$

где

$$\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^2) \quad (g(x,y), \varphi(x,y)) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x,x)\, dx$$

и

$$u(x,y) = (g * f)(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x-z, y-z)\, dz.$$

18. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля.

Определение 18.1. Оператором Штурма-Лиувилля *на промежутке* $[a, b]$ *называется оператор вида*

$$Lu(x) = -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x),$$

определенный на функциях $u(x)$, *удовлетворяющих краевым условиям*

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{cases}$$

Здесь α_k *и* β_k *– заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию* $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ *при* $k = 1, 2$, $p(x)$ *– непрерывно дифференцируемая функция, нигде не обращающаяся в ноль, и* $q(x)$ *– непрерывная функция.*

Определение 18.2. Функцией Грина *оператора Штурма-Лиувилля* L *называют обобщенную функцию* $G(x, y)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y)$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0, \\ \alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0, \end{cases}$$

при $y \in (a, b)$.

Теорема 18.3. *Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля* L *существует тогда и только тогда когда однородная задача*

$$Lu = 0, \quad \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Пример 18.4. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'', \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{18.1}$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$G''_{xx}(x, y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x, y) = C_1(y) + C_2(y)x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A(y)x, & x < y, \\ B(y)(x - 1), & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x, y)$

$$\begin{aligned} L_x G(x, y) &= -\left(\left\{ \begin{array}{ll} A(y)x, & x < y \\ B(y)(x - 1), & x > y \end{array} \right\}\right)''_{xx} = \\ &= -\left(\left\{ \begin{array}{ll} A(y), & x < y \\ B(y), & x > y \end{array} \right\} + [B(y)(y - 1) - A(y)y]\delta(x - y)\right)'_x = \\ &= [A(y) - B(y)]\delta(x - y) - [B(y)(y - 1) - A(y)y]\delta'_x(x - y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$, найдем

$$\begin{cases} A(y) - B(y) = 1, \\ B(y)(y-1) - A(y)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = 1 - y, \\ B(y) = -y. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (18.1) имеет вид

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \leqslant y, \\ (1-x)y, & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \leqslant y, \\ (1-x)y, & x > y. \end{cases}$

Пример 18.5. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -(e^{-x}u')', \quad u'(0) = u(1) = 0. \tag{18.2}$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$(e^{-x}G'_x)'_x(x,y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x,y) = C_1(y) + C_2(y)e^x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A(y), & x < y, \\ B(y)(e^{x-1} - 1), & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x,y)$

$$\begin{aligned} L_x G(x,y) &= -\left(e^{-x}\left(\begin{Bmatrix} A(y), & x < y, \\ B(y)(e^{x-1} - 1), & x > y, \end{Bmatrix}\right)'_x\right)'_x = \\ &= -\left(\begin{Bmatrix} 0, & x < y, \\ B(y)e^{-1}, & x > y, \end{Bmatrix} + e^{-y}[B(y)(e^{y-1} - 1) - A(y)]\delta(x-y)\right)'_x = \\ &= -B(y)e^{-1}\delta(x-y) - e^{-y}[B(y)(e^{y-1} - 1) - A(y)]\delta'_x(x-y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$, найдем

$$\begin{cases} -B(y)e^{-1} = 1, \\ e^{-y}[B(y)(e^{y-1} - 1) - A(y)] = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = e - e^y, \\ B(y) = -e. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (18.2) имеет вид

$$G(x,y) = \begin{cases} e - e^y, & x \leqslant y, \\ e - e^x, & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} e - e^y, & x \leqslant y, \\ e - e^x, & x > y. \end{cases}$

Пример 18.6. *Выяснить существует ли функция Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'', \quad u'(0) + u(0) = u(1) = 0. \tag{18.3}$$

Решение. Однородная задача

$$-u'' = 0, \quad u'(0) + u(0) = u(1) = 0$$

имеет нетривиальное решение $u(x) = x - 1$. Поэтому из теоремы 18.3 следует, что у оператора (18.3) функции Грина не существует. $\square$

Ответ: У оператора (18.3) функции Грина не существует.

Домашнее задание:

Задача 18.7. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'', \quad u(0) = u'(2) = 0.$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y. \end{cases}$

Задача 18.8. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'' - u, \quad u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} \sin(x)\cos(y), & x \leqslant y, \\ \cos(x)\sin(y), & x > y. \end{cases}$

Задача 18.9. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'' + u, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Ответ: $G(x,y) = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y-1), & x \leqslant y, \\ \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{sh}(y), & x > y. \end{cases}$

19. Функция Грина оператора Штурма-Лиувилля (самостоятельно).

Пример 19.1. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'' + 4u, \quad u(0) = u(+\infty) = 0. \tag{19.1}$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$G''_{xx}(x,y) - 4G(x,y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x,y) = C_1(y)e^{2x} + C_2(y)e^{-2x},$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A(y)(e^{2x} - e^{-2x}), & x < y, \\ B(y)e^{-2x}, & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x,y)$

$$\begin{aligned} L_xG(x,y) &= -\left(\left\{ \begin{array}{ll} A(y)(e^{2x} - e^{-2x}), & x < y \\ B(y)e^{-2x}, & x > y \end{array} \right\}\right)''_{xx} = \\ &= -\left(\left\{ \begin{array}{ll} 2A(y)(e^{2x} + e^{-2x}), & x < y \\ -2B(y)e^{-2x}, & x > y \end{array} \right\} + [B(y)e^{-2y} - A(y)(e^{2y} - e^{-2y})]\delta(x-y)\right)'_x = \\ &= \left[2B(y)e^{-2y} + 2A(y)(e^{2y} + e^{-2y})\right]\delta(x-y) - \left[B(y)e^{-2y} - A(y)(e^{2y} - e^{-2y})\right]\delta'_x(x-y). \end{aligned}$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_xG(x,y) = \delta(x-y)$, найдем

$$\begin{cases} 2B(y)e^{-2y} + 2A(y)(e^{2y} + e^{-2y}) = 1 \\ B(y)e^{-2y} - A(y)(e^{2y} - e^{-2y}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = \frac{1}{4}e^{-2y}, \\ B(y) = \frac{1}{4}\left(e^{2y} - e^{-2y}\right). \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (19.1) имеет вид

$$G(x,y) = \frac{1}{4}\begin{cases} (e^{2x} - e^{-2x})e^{-2y}, & x \leqslant y, \\ e^{-2x}(e^{2y} - e^{-2y}), & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x,y) = \frac{1}{4}\begin{cases} (e^{2x} - e^{-2x})e^{-2y}, & x \leqslant y, \\ e^{-2x}(e^{2y} - e^{-2y}), & x > y. \end{cases}$

Пример 19.2. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -(xu')', \quad |u(0)| < \infty, \ u(1) = 0. \tag{19.2}$$

Решение. Из определения функции Грина следует, что при $x \neq y$ она должна удовлетворять однородному уравнению

$$(xG'_x)'_x(x,y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x,y) = C_1(y) + C_2(y)\ln x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A(y), & x < y, \\ B(y)\ln x, & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x,y)$

$$L_xG(x,y) = -\left(x\left(\left\{\begin{array}{ll} A(y), & x<y \\ B(y)\ln x, & x>y \end{array}\right\}\right)'_x\right)'_x =$$
$$= -\left(\left\{\begin{array}{ll} 0, & x<y \\ B(y), & x>y \end{array}\right\} + [B(y)y\ln y - A(y)y]\delta(x-y)\right)'_x =$$
$$= -B(y)\delta(x-y) - [B(y)y\ln y - A(y)y]\delta'_x(x-y).$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_xG(x,y) = \delta(x-y)$, найдем

$$\begin{cases} -B(y) = 1, \\ B(y)y\ln y - A(y)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = -\ln y, \\ B(y) = -1. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора (19.2) имеет вид

$$G(x,y) = -\begin{cases} \ln y, & x \leqslant y, \\ \ln x, & x > y. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} \ln y, & x \leqslant y, \\ \ln x, & x > y. \end{cases}$

Домашнее задание:

Задача 19.3. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'', \quad u(0) = 0, \ |u(+\infty)| < \infty.$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ y, & x > y. \end{cases}$

Задача 19.4. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -(x^2u')' + 2u, \quad u(0) = 0, \ |u(+\infty)| < \infty.$$

Ответ: $G(x,y) = \frac{1}{3}\begin{cases} x, & x \leqslant y, \\ x^{-2}y^3, & x > y. \end{cases}$

Задача 19.5. *Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля*

$$Lu = -u'' + u', \quad u(-\infty) = 0, \ |u(+\infty)| < \infty.$$

Ответ: $G(x,y) = \begin{cases} e^{x-y}, & x \leqslant y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$

20. Решение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля с использованием функции Грина.

Теорема 20.1. *Пусть $G(x,y)$ – функция Грина оператора Штурма-Лиувилля L и $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция на интервале (a,b). Тогда решение задачи*

$$Lu(x) \equiv -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x), \quad \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases}$$

существует, единственно и может быть найдено по формуле

$$u(x) = \int\limits_a^b G(x,y)f(y)\,dy. \tag{20.1}$$

Пример 20.2. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$Lu = u'' = 2, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{20.2}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Функция Грина оператора L удовлетворяет следующей задаче

$$G''_{xx}(x,y) = \delta(x-y), \quad G(0,y) = G(1,y) = 0.$$

Используя результат примера 18.1, найдем функцию Грина

$$G(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & x \leqslant y, \\ (x-1)y, & x > y. \end{cases}$$

Шаг 2. Используя формулу (20.1), найдем решение задачи (20.2)

$$u(x) = 2\int\limits_0^1 G(x,y)\,dy = 2\int\limits_0^x (x-1)y\,dy + 2\int\limits_x^1 x(y-1)\,dy = (x-1)x^2 - x(x-1)^2 = x^2 - x. \ \square$$

Ответ: $u(x) = x^2 - x$.

Пример 20.3. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$Lu = u'' - u' = e^x, \quad u(0) = u'(1) = 0. \tag{20.3}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Функция Грина оператора L удовлетворяет следующей задаче

$$G''_{xx}(x,y) - G'_x(x,y) = \delta(x-y), \quad G(0,y) = G'_x(1,y) = 0.$$

Функция Грина $G(x,y)$ при $x \neq y$ удовлетворяет однородному уравнению

$$G''_{xx}(x,y) - G'_x(x,y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$G(x,y) = C_1(y) + C_2(y)e^x,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции. Учитывая граничные условия получим, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A(y)(e^x - 1), & x < y, \\ B(y), & x > y, \end{cases}$$

где $A(y)$ и $B(y)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению.

Вычислим теперь как действует оператор L на функцию $G(x,y)$

$$L_xG(x,y) = \left(\left\{\begin{array}{ll} A(y)(e^x-1), & x<y \\ B(y), & x>y \end{array}\right\}\right)''_{xx} - \left(\left\{\begin{array}{ll} A(y)(e^x-1), & x<y \\ B(y), & x>y \end{array}\right\}\right)'_x =$$

$$= \left(\left\{\begin{array}{ll} A(y)e^x, & x<y \\ 0, & x>y \end{array}\right\} + [B(y)-A(y)(e^y-1)]\delta(x-y)\right)'_x -$$

$$- \left\{\begin{array}{ll} A(y)e^x, & x<y \\ 0, & x>y \end{array}\right\} - [B(y)-A(y)(e^y-1)]\delta(x-y) =$$

$$= -A(y)e^y\delta(x-y) + [B(y)-A(y)(e^y-1)]\delta'(x-y) - [B(y)-A(y)(e^y-1)]\delta(x-y) =$$

$$= [-A(y)-B(y)]\delta(x-y) - [B(y)-A(y)(e^y-1)]\delta'_x(x-y).$$

Учитывая, что должно быть выполнено равенство $L_xG(x,y) = \delta(x-y)$, найдем

$$\begin{cases} -A(y)-B(y) = 1, \\ B(y)-A(y)(e^y-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(y) = -e^{-y}, \\ B(y) = e^{-y}-1. \end{cases}$$

Таким образом, функция Грина оператора L имеет вид

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-e^x)e^{-y}, & x \leqslant y, \\ e^{-y}-1, & x>y. \end{cases}$$

Шаг 2. Используя формулу (20.1), найдем решение задачи (20.3)

$$u(x) = \int\limits_0^1 G(x,y)e^y\,dy = \int\limits_0^x (e^{-y}-1)e^y\,dy + \int\limits_x^1 (1-e^x)e^{-y}e^y\,dy =$$

$$= 1+x-e^x+(1-e^x)(1-x) = xe^x-2e^x+2. \ \square$$

Ответ: $u(x) = xe^x-2e^x+2$.

Пример 20.4. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$Lu = -u''+4u = e^{-x}, \quad u(0) = u(+\infty) = 0. \tag{20.4}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1. Функция Грина оператора L удовлетворяет следующей задаче

$$-G''_{xx}(x,y)+4G(x,y) = \delta(x-y), \quad G(0,y) = G(\infty,y) = 0.$$

Функция Грина $G(x,y)$ найдена в примере 19.1

$$G(x,y) = \frac{1}{4}\begin{cases} (e^{2x}-e^{-2x})e^{-2y}, & x \leqslant y, \\ e^{-2x}(e^{2y}-e^{-2y}), & x>y. \end{cases}$$

Шаг 2. Используя формулу (20.1), найдем решение задачи (20.4)

$$u(x) = \int\limits_0^\infty G(x,y)e^{-y}\,dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^x e^{-2x}(e^{2y}-e^{-2y})e^{-y}\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_x^\infty (e^{2x}-e^{-2x})e^{-2y}e^{-y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2x}\int\limits_0^x (e^y-e^{-3y})\,dy + \frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})\int\limits_x^\infty e^{-3y}\,dy = \frac{1}{3}\left(e^{-x}-e^{-2x}\right). \ \square$$

Ответ: $u(x) = \frac{1}{3}\left(e^{-x} - e^{-2x}\right)$.

Домашнее задание:

Задача 20.5. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$u'' = 6x, \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = x^3 - 1$.

Задача 20.6. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$(e^x u')' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = -xe^{-x}$.

Задача 20.7. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$-(x^3 u')' = 4 - 3x^2, \quad u(1) = u'(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{4}{x} + x - 5$.

Задача 20.8. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$(x^2 u')' = 2x, \quad u(1) = u(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = \frac{2}{x} + x - 3$.

Задача 20.9. *Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,*

$$x^2 u'' - 2u = 48x - 24, \quad 2u(1) - u'(1) = u(2) + 2u'(2) = 0.$$

Ответ: $u(x) = 7x^2 - 24x + 12$.

21. 7-ая контрольная работа (задача: 7; 20 минут).

Вариант контрольной работы №7.

Задача 7. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$\left(\frac{1}{1+2x}u'\right)' = 6, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Ответ: $u(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$.

Вариант контрольной работы №7.

Задача 7. Решить неоднородную задачу Штурма-Лиувилля, вычислив предварительно функцию Грина,

$$(xu')' = f(x), \quad u(1) = u'(2) = 0,$$

где f – гладкая функция на отрезке $[1, 2]$.

Ответ:

22. Построение решений ОДУ в виде рядов в окрестности регулярных точек.

Рассмотрим *нелинейное* дифференциальное уравнение вида

$$\overrightarrow{W}'(z) = F(z, \overrightarrow{W}(z)), \quad \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 22.1. *Пусть $F(z, W_1, \dots, W_n)$ – регулярная векторно-значная функция в круге $|z - z_0| < \varepsilon_0$ по переменной z и в кругах $|W_p - W_p^0| < \varepsilon_p$ по переменным W_p при $p = 1, \dots, n$ для некоторых $\varepsilon_k > 0$ при $k = 0, \dots, n$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$) такое, что решение задачи Коши*

$$\overrightarrow{W}'(z) = F(z, \overrightarrow{W}(z)), \quad \overrightarrow{W}(z)\Big|_{z=z_0} = \begin{pmatrix} W_1^0 \\ \vdots \\ W_n^0 \end{pmatrix} \tag{22.1}$$

существует, единственно и является регулярной функцией в круге $|z - z_0| < \varepsilon$.

Пример 22.2. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} W' = W^2, \\ W(0) = w_0 \neq 0. \end{cases} \tag{22.2}$$

Решение. Уравнение (22.2) интегрируется методом разделения переменных. Решение можно записать в виде

$$W(z) = \frac{-1}{z - w_0^{-1}}. \tag{22.3}$$

Обратим внимание на то, что найденное решение имеет полюс в точке $z = w_0^{-1}$, в то время как правая часть в уравнении (22.2) регулярная функция во всей комплексной плоскости. В формулировке теоремы (22.1) это соответствует $\varepsilon_0 = +\infty$ и $\varepsilon < w_0^{-1}$.

Этот пример показывает, что у решений *нелинейных* уравнений вида (22.1) могут появляться особенности даже там, где функция F регулярна. Поэтому постоянная ε в формулировке теоремы 22.1, вообще говоря, не может быть заменена на ε_0. □

Ответ: $W(z) = -(z - w_0^{-1})^{-1}$.

Теорема 22.1 утверждает, что решение задачи (22.1) регулярная функция в некотором круге с центром в точке z_0. Отсюда следует, что ее решение может быть разложено в ряд Тейлора в окрестности точки z_0. Таким образом, теорема 22.1 позволяет искать решение задачи (22.1) в виде ряда Тейлора с центром в точке z_0. При этом, однако, мы заранее ничего не можем сказать об области сходимости полученного ряда.

Пример 22.3. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' = W^2, \\ W(0) = 1 \end{cases} \tag{22.4}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^3)$.

Решение. Ищем решение в виде ряда Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + O(z^3). \tag{22.5}$$

Подставляя ряд (22.5) в уравнение (22.4), получим

$$w_1 + 2w_2 z + O(z^2) = \big(w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + O(z^3)\big)^2 = w_0^2 + 2w_0 w_1 z + O(z^2). \tag{22.6}$$

Приравнивая коэффициенты при z^0, z^1, и т. д. в уравнении (22.6), найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты w_n. Вот первые два из них

$$w_1 = w_0^2, \quad 2w_2 = 2w_0 w_1. \tag{22.7}$$

Из начального условия $W(0) = 1$ следует, что

$$W(0) = w_0 = 1.$$

Подставляя теперь $w_0 = 1$ в рекуррентные соотношения (22.7), найдем

$$w_1 = w_0^2 = 1, \quad w_2 = w_0 w_1 = 1.$$

Заметим, что найденные первые три члена ряда согласуются с известным точным решением, см. пример 22.2,

$$W(z) = \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \ \square \tag{22.8}$$

Ответ: $W(z) = 1 + z + z^2 + O(z^3)$.

Пример 22.4. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' = W^2, \\ W(0) = 1 \end{cases}$$

в виде ряда.

Решение. Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \tag{22.9}$$

Подставляя ряд (22.9) в уравнение (22.4), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} w_n n z^{n-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n\right)^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} w_n n z^{n-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k\right), \\ \sum_{p=0}^{\infty} w_{p+1}(p+1) z^p &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} w_n w_k z^{n+k}. \end{aligned} \tag{22.10}$$

Преобразуем выражение в правой части (22.10). Для этого сделаем замену переменных $k = p-n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} w_n w_k z^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=n}^{\infty} w_n w_{p-n} z^p =$$

и поменяем местами суммы по n и p

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p} w_n w_{p-n} z^p = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \sum_{n=0}^{p} w_n w_{p-n}.$$

В итоге получаем следующее равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} w_n w_k z^{n+k} = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \sum_{n=0}^{p} w_n w_{p-n}. \tag{22.11}$$

Подставляя выражение (22.11) в уравнение (22.10), получим

$$\sum_{p=0}^{\infty} w_{p+1}(p+1)z^p = \sum_{p=0}^{\infty} z^p \sum_{n=0}^{p} w_n w_{p-n}. \tag{22.12}$$

Приравнивая коэффициенты при z^p, $p = 0, 1, \ldots$ в уравнении (22.12), найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты w_p

$$w_{p+1}(p+1) = \sum_{n=0}^{p} w_n w_{p-n}. \tag{22.13}$$

Из начального условия $W(0) = 1$ следует, что

$$W(0) = w_0 = 1.$$

Подставляя теперь $w_0 = 1$ в рекуррентные соотношения (22.13), найдем

$$w_1 = w_0^2 = 1,\ w_2 = w_0 w_1 = 1,\ \ldots,$$
$$w_{p+1} = \frac{1}{p+1}\sum_{n=0}^{p} 1 = 1,\ p = 2, 3, \ldots . \ \square$$

Ответ: $W(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

Пример 22.5. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W'' + (W')^2 - \sin(W) = 3 - z, \\ W(0) = \pi,\ W'(0) = 1 \end{cases} \tag{22.14}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^4)$. *Переписать уравнение* (22.14) *в виде* (22.1).

Решение. Перепишем уравнение (22.14) виде

$$W'' = -(W')^2 + \sin(W) + 3 - z. \tag{22.15}$$

Ищем решение в виде ряда Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + O(z^4). \tag{22.16}$$

Подставляя ряд (22.16) в уравнение (22.15), получим

$$\begin{aligned} 2w_2 + 6w_3 z + O(z^2) &= -\big(w_1 + 2w_2 z + O(z^2)\big)^2 + \sin\big(w_0 + w_1 z + O(z^2)\big) + 3 - z = \\ &= -w_1^2 - 4w_1 w_2 z + \sin(w_0) + \cos(w_0) w_1 z + 3 - z + O(z^2) = \\ &= 3 - w_1^2 + \sin(w_0) + (-4w_1 w_2 + \cos(w_0) w_1 - 1)z + O(z^2). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при z^0, z^1, … найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты w_n. Вот первые два из них

$$2w_2 = 3 - w_1^2 + \sin(w_0), \quad 6w_3 = -4w_1 w_2 + \cos(w_0) w_1 - 1. \tag{22.17}$$

Подставляя ряд (22.16) в начальные условия (22.14), найдем

$$W(0) = w_0 = \pi,$$
$$W'(0) = w_1 = 1.$$

Подставляя теперь $w_0 = 1$ и $w_1 = 1$ в рекуррентные соотношения (22.17), найдем

$$w_2 = \frac{1}{2}(3 - w_1^2 + \sin(w_0)) = 1,$$
$$w_3 = \frac{1}{6}(-4w_1w_2 + \cos(w_0)w_1 - 1) = -1.$$

Перепишем теперь уравнение (22.14) в виде (22.1). Для этого определим вектор-функцию $\overrightarrow{W}$ следующим равенством

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix},$$

где W – решение уравнения (22.14). Отсюда

$$\overrightarrow{W}'(z) = \begin{pmatrix} W_1'(z) \\ W_2'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W'(z) \\ W''(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_2(z) \\ -(W'(z))^2 + \sin(W(z)) + 3 - z \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} W_2(z) \\ -(W_2(z))^2 + \sin(W_1(z)) + 3 - z \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(0) \\ W'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение (22.14) можно переписать в виде

$$\overrightarrow{W}'(z) = F(z, \overrightarrow{W}(z)), \quad \overrightarrow{W}(0) = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(z, \overrightarrow{W}) = \begin{pmatrix} W_2 \\ -(W_2)^2 + \sin(W_1) + 3 - z \end{pmatrix}. \ \Box$$

Ответ: $W(z) = \pi + z + z^2 - z^3 + O(z^4)$.

Рассмотрим теперь *линейное* дифференциальное уравнение вида

$$\overrightarrow{W}'(z) = F(z)\overrightarrow{W} + \overrightarrow{G}(z), \quad \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & \cdots & F_{nn} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 22.6. *Пусть $F(z)$ – регулярная матрично-значная функция в односвязной области D и $\overrightarrow{G}(z)$ – регулярная векторно-значная функция в той же области D. Тогда решение задачи Коши*

$$\overrightarrow{W}'(z) = F(z)\overrightarrow{W}(z) + \overrightarrow{G}(z), \quad \overrightarrow{W}(z)\Big|_{z=z_0} = \begin{pmatrix} W_1^0 \\ \vdots \\ W_n^0 \end{pmatrix} \tag{22.18}$$

существует, единственно и является регулярной функцией в области D.

Пример 22.7. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' - W = 0, \\ W(0) = 1 \end{cases} \tag{22.19}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Решение. Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \tag{22.20}$$

Сразу заметим, что коэффициенты уравнения (22.19) регулярны во всей комплексной плоскости, поэтому из теоремы 22.6 следует, что решение в виде ряда (22.20) существует и ряд, отвечающий этому решению, сходится при всех z.

Подставляя ряд (22.20) в уравнение (22.19), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n,$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} w_{p+1}(p+1) z^p=\sum_{p=0}^{\infty} w_p z^p. \tag{22.21}$$

Приравнивая коэффициенты при z^p, $p=0,1,\ldots$ в уравнении (22.21), найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты w_p

$$w_{p+1}(p+1)=w_p,\ p\geqslant 0.$$

Полагая $n=p+1$, получим

$$w_n=\frac{w_{n-1}}{n},\ n\geqslant 1. \tag{22.22}$$

Из начального условия $W(0)=1$ следует, что

$$W(0)=w_0=1.$$

В общем случае решить рекуррентные соотношения довольно затруднительно, однако в данном примере это сделать довольно просто. Подставляя $w_0=1$ в рекуррентные соотношения (22.22), найдем

$$w_n=\frac{w_{n-1}}{n}=\frac{w_{n-2}}{n(n-1)}=\cdots=\frac{w_0}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}=\frac{w_0}{n!}=\frac{1}{n!}.$$

Отсюда

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=e^z. \ \square$$

Ответ: $W(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, $w_0=1,\ w_n=\frac{w_{n-1}}{n},\ n\geqslant 1$, $|z|<\infty$.

Пример 22.8. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W'-z^2W=1,\\ W(0)=0\end{cases} \tag{22.23}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Решение. Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \tag{22.24}$$

Подставляя ряд (22.24) в уравнение (22.23), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{n+2} = 1,$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} w_{p+1}(p+1)z^p = 1 + \sum_{p=2}^{\infty} w_{p-2} z^p. \tag{22.25}$$

Приравнивая коэффициенты при z^p, $p = 0, 1, \dots$ в уравнении (22.25), найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты w_p. Отметим, что мы должны отдельно рассмотреть три случая $p = 0$, $p = 1$ и $p \geqslant 2$, потому что первая сумма в (22.25) начинается с $p = 0$, а вторая с $p = 2$

$$\begin{aligned}
&z^0 : w_1 = 1,\\
&z^1 : 2w_2 = 0,\ w_2 = 0,\\
&z^p : w_{p+1}(p+1) = w_{p-2},\ p \geqslant 2 \implies w_n = \frac{w_{n-3}}{n},\ n \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Из начального условия $W(0) = 1$ следует, что

$$W(0) = w_0 = 0.$$

Отметим, что в данном примере можно явно вычислить все коэффициенты ряда (22.24)

$$w_{3p} = 0,\ p \geqslant 0, \quad w_{3p+2} = 0,\ p \geqslant 0, \quad w_{3p+1} = \frac{w_1}{1 \cdot 4 \cdots (3p-2)(3p+1)},\ p \geqslant 0,$$

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3p-2)(3p+1)} z^{3p+1}.$$

Коэффициенты уравнения (22.23) регулярны во всей комплексной плоскости, поэтому ряд (22.24) сходится при всех z. $\square$

Ответ: $W(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, $w_0 = 0,\ w_1 = 1,\ w_2 = 0,\ w_n = \frac{w_{n-3}}{n},\ n \geqslant 3,\ |z| < \infty.$

Пример 22.9. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W'' - z^2 W' + W = 1, \\ W(0) = 1,\ W'(0) = 6 \end{cases} \tag{22.26}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Решение. Ищем решение в виде ряда Тейлора

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \tag{22.27}$$

Из начальных условий $W(0) = 1$ и $W'(0) = 6$ находим, что

$$W(0) = w_0 = 1, \quad W'(0) = w_1 = 6.$$

Выпишем выражения для W' и W''

$$W'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n n z^{n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} w_{p+1}(p+1) z^p, \tag{22.28}$$

$$W''(z) = \sum_{p=0}^{\infty} w_{p+1}(p+1)p z^{p-1} = \sum_{p=0}^{\infty} w_{p+2}(p+2)(p+1) z^p. \tag{22.29}$$

Подставляя ряды (22.27) – (22.29) в уравнение (22.26), получим

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)w_{p+2}z^p - \sum_{p=0}^{\infty}(p+1)w_{p+1}z^{p+2} + \sum_{p=0}^{\infty} w_p z^p = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)w_{n+2}z^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)w_{n-1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = 1. \tag{22.30}$$

Приравнивая коэффициенты при z^n, $n \geqslant 0$ в уравнении (22.30), найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты w_n. При этом мы должны отдельно рассмотреть три случая $n = 0$, $n = 1$ и $n \geqslant 2$

z^0 : $2w_2 + w_0 = 1, \implies w_2 = 0,$

z^1 : $6w_3 + w_1 = 0, \implies w_3 = -1,$

z^n : $(n+2)(n+1)w_{n+2} - (n-1)w_{n-1} + w_n = 0,\ n \geqslant 2 \implies w_p = \dfrac{(p-3)w_{p-3} - w_{p-2}}{p(p-1)},\ p \geqslant 4.$

Коэффициенты уравнения (22.26) регулярны во всей комплексной плоскости, поэтому ряд (22.27) сходится при всех z. □

Ответ: $W(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, $w_0 = 1,\ w_1 = 6,\ w_2 = 0,\ w_3 = -1,\ w_p = \frac{(p-3)w_{p-3} - w_{p-2}}{p(p-1)},\ p \geqslant 4,\ |z| < \infty.$

Домашнее задание:

Задача 22.10. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' = W^4 + 2z, \\ W(0) = 1 \end{cases}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^3)$.

Ответ: $W(z) = 1 + z + 3z^2 + O(z^3)$.

Задача 22.11. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' = e^W + z, \\ W(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^4)$.

Ответ: $W(z) = z + z^2 + \frac{1}{2}z^3 + O(z^4)$.

Задача 22.12. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' = \cos(W) - 2, \\ W(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^4)$.

Ответ: $W(z) = -z - \frac{1}{6}z^3 + O(z^4)$.

Задача 22.13. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' = \sqrt{2}\cos(W) + z^2, \\ W(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^4)$.

Ответ: $W(z) = \frac{\pi}{4} + z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + O(z^4)$.

Задача 22.14. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W' + zW = 1 - z, \\ W(0) = 1 \end{cases}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Ответ: $W(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, $w_0 = 1,\ w_1 = 1,\ w_2 = -1,\ w_n = -\frac{w_{n-2}}{n},\ n \geqslant 3$, $|z| < \infty$.

Задача 22.15. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} W'' + W' - zW = z, \\ W(0) = 1,\ W'(0) = -2 \end{cases}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Ответ: $W(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, $w_0 = 1,\ w_1 = -2,\ w_2 = 1,\ w_3 = 0,\ w_n = \frac{w_{n-3} - (n-1)w_{n-1}}{n(n-1)},\ n \geqslant 4$, $|z| < \infty$.

Задача 22.16. *Найти решение задачи Коши*

$$\begin{cases} (1 - z)W'' - W = 0, \\ W(0) = 1,\ W'(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Ответ: $W(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, $w_0 = 1,\ w_1 = 0,\ w_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{p=0}^{n-2} w_p,\ n \geqslant 2$, $|z| < 1$.

23. 8-ая контрольная работа (задача: 8; 20 минут).

Вариант контрольной работы №8.

Задача 8. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} W' = e^{zW}, \\ W(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с точностью до $O(z^4)$.

Ответ: $W(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + O(z^4)$.

Вариант контрольной работы №8.

Задача 8. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} (1+z)W' = 1, \\ W(0) = 1 \end{cases}$$

в виде ряда и указать область его сходимости.

Ответ:

24. Правильные особые точки. Теорема Фукса.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0, \tag{24.1}$$

где p и q – заданные функции, а W – неизвестная функция. Мы будем предполагать, что функции p и q регулярны в проколотой окрестности некоторой точки z_0.

Определение 24.1. *Точка $z_0 \neq \infty$ называется* особой *точкой уравнения* (24.1), *если хотя бы одна из функций p или q имеет в этой точке полюс или существенную особую точку.*

Определение 24.2. *Точка $z_0 \neq \infty$ называется* правильной *особой точкой уравнения* (24.1), *если для p эта точка – полюс не выше первого порядка, а для q – полюс не выше второго порядка, т. е. p и q допускают разложения в окрестности точки z_0 в ряды Лорана вида*

$$p(z) = \frac{p_0}{z - z_0} + \textit{регулярные члены}, \quad q(z) = \frac{q_0}{(z - z_0)^2} + \frac{q_1}{z - z_0} + \textit{регулярные члены}.$$

Определение 24.3. *Особая точка z_0 называется* неправильной, *если она не является правильной особой точкой.*

Определение 24.4. *Пусть ρ_1 и ρ_2 корни* характеристического уравнения

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0$$

такие, что $\operatorname{Re}\rho_1 \geqslant \operatorname{Re}\rho_2$. Числа ρ_1 и ρ_2 называют характеристическими показателями *уравнения* (24.1).

Теорема 24.5 (Фукс)**.** *Пусть ρ_1 и ρ_2 корни характеристического уравнения. Тогда утверждение* (A) *эквивалентно одному из утверждений* (B1) – (B3).

(A) *Точка z_0 – правильная особая точка уравнения* (24.1).

(B1) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, тогда существует два решения уравнения* (24.1) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n+\rho_2}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$.

(B2) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тогда существует два решения уравнения* (24.1) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n+\rho_2} + AW_1(z)\ln(z - z_0) \tag{24.2}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$. При этом постоянная A может оказаться равной нулю.

(B3) *Пусть $\rho_1 = \rho_2$, тогда существует два решения уравнения* (24.1) *вида* (24.2) *таких, что $c_0 \neq 0$, $d_0 = 0$ и $A \neq 0$.*

При этом ряды, указанные в (B1) – (B3), *сходятся в любом круге $|z - z_0| \leqslant R$, не содержащем других особых точек уравнения* (24.1).

Теорема 24.5 позволяет строить решения уравнения (24.1) в окрестности *конечных* правильных особых точек. Для исследования случая $z_0 = \infty$ полезна следующая теорема[1].

[1]Теорема 24.7 сводится к теореме 24.5 с помощью замены переменных $z = 1/t$.

Определение 24.6. *Точка $z_0 = \infty$ называется* правильной *особой точкой уравнения* (24.1), *если p и q допускают разложения в окрестности точки $z_0 = \infty$ в ряды Лорана вида*

$$p(z) = \frac{p_0}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{z^n} \quad q(z) = \frac{q_0}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{q_{n-2}}{z^n}.$$

Теорема 24.7 (Фукс). *Пусть ρ_1 и ρ_2 корни характеристического уравнения*

$$\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0, \quad \operatorname{Re}\rho_1 \leqslant \operatorname{Re}\rho_2.$$

Тогда утверждение (A) *эквивалентно одному из утверждений* (B1) – (B3).

(A) *Точка $z_0 = \infty$ – правильная особая точка уравнения* (24.1).

(B1) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, тогда существует два решения уравнения* (24.1) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n+\rho_2}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$.

(B2) *Пусть $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тогда существует два решения уравнения* (24.1) *вида*

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n+\rho_1}, \quad W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n+\rho_2} + AW_1(z)\ln z \tag{24.3}$$

таких, что $c_0 \neq 0$ и $d_0 \neq 0$. При этом постоянная A может оказаться равной нулю.

(B3) *Пусть $\rho_1 = \rho_2$, тогда существует два решения уравнения* (24.1) *вида* (24.3) *таких, что $c_0 \neq 0$, $d_0 = 0$ и $A \neq 0$.*

При этом ряды, указанные в (B1) – (B3), *сходятся в любом кольце $|z| \geqslant R$, не содержащем других особых точек уравнения* (24.1).

Пример 24.8. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$z^2(1-z)W'' + (1+z)W' + zW = 0. \tag{24.4}$$

Решение. Перепишем уравнение (24.4) в виде

$$W'' + \frac{1+z}{z^2(1-z)}W' + \frac{1}{z(1-z)}W = 0. \tag{24.5}$$

Уравнение (24.5) имеет три особые точки $z = 0$, 1 и ∞.

Разложения в ряды Лорана функций p и q в окрестности точки $z = 0$ имеют вид

$$p(z) = \frac{1+z}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \cdots, \quad q(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \cdots.$$

Таким образом, $z = 0$ – неправильная особая точка.

Разложения в ряды Лорана функций p и q в окрестности точки $z = 1$ имеют вид

$$p(z) = \frac{1+z}{z^2(1-z)} = \frac{-2}{z-1} + \cdots, \quad q(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{-1}{z-1} + \cdots.$$

Таким образом, $z = 1$ – правильная особая точка, причем $p_0 = -2$, $q_0 = 0$. Характеристическое уравнение принимает вид

$$\rho^2 - 3\rho = 0.$$

Отсюда находим, что $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 0$.

Разложения в ряды Лорана функций p и q в окрестности точки $z = \infty$ имеют вид

$$p(z) = \frac{1+z}{z^2(1-z)} = \frac{-1}{z^2} + \cdots, \quad q(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{-1}{z^2} + \cdots.$$

Таким образом, $z = \infty$ – правильная особая точка, причем $p_0 = 0$, $q_0 = -1$. Характеристическое уравнение принимает вид

$$\rho^2 - \rho - 1 = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\rho_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \ \square$$

Ответ: $z = 0$ – неправильная особая точка; $z = 1$ – правильная особая точка, характеристические показатели $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, характеристические показатели $\rho_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\rho_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 24.9. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели для уравнения Бесселя*

$$z^2W'' + zW' + (z^2 - \nu^2)W = 0, \quad \operatorname{Re}\nu \geqslant 0. \tag{24.6}$$

Решение. Перепишем уравнение (24.6) в виде

$$W'' + \frac{1}{z}W' + \frac{z^2 - \nu^2}{z^2}W = 0. \tag{24.7}$$

Уравнение (24.7) имеет две особые точки $z = 0$ и ∞.

Разложения в ряды Лорана функций p и q в окрестности точки $z = 0$ имеют вид

$$p(z) = \frac{1}{z}, \quad q(z) = \frac{z^2 - \nu^2}{z^2} = \frac{-\nu^2}{z^2} + 1.$$

Таким образом, $z = 0$ – правильная особая точка, причем $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$. Характеристическое уравнение принимает вид

$$\rho^2 - \nu^2 = 0.$$

Отсюда находим, что $\rho_1 = \nu$, $\rho_2 = -\nu$.

Разложения в ряды Лорана функций p и q в окрестности точки $z = \infty$ имеют вид

$$p(z) = \frac{1}{z}, \quad q(z) = \frac{z^2 - \nu^2}{z^2} = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}.$$

Таким образом, $z = \infty$ – неправильная особая точка. $\square$

Ответ: $z = \infty$ – неправильная особая точка; $z = 0$ – правильная особая точка, $\rho_1 = \nu$, $\rho_2 = -\nu$.

Домашнее задание:

Задача 24.10. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$z^2(2 - z)W'' + 2zW' - 2W = 0.$$

Ответ: $z = 0$ – правильная особая точка, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -1$; $z = 2$ – правильная особая точка, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$.

Задача 24.11. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели для гипергеометрического уравнения*

$$W'' + \frac{1}{z}W' + \frac{1}{z(1-z)}W = 0.$$

Ответ: $z = 0$ – правильная особая точка, $\rho_1 = \rho_2 = 0$; $z = 1$ – правильная особая точка, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 1$.

Задача 24.12. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели для уравнения Лежандра*

$$(1 - z^2)W'' - 2zW' + \nu(\nu + 1)W = 0.$$

Ответ: $z = -1$ и 1 – правильные особые точки, $\rho_1 = \rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = -\nu$, $\rho_2 = \nu + 1$.

Задача 24.13. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$(z^2 + 1)^2 W'' + 4(z + i)W' - 4W = 0.$$

Ответ: $z = i$ – неправильная особая точка; $z = -i$ – правильная особая точка, $\rho_1 = \rho_2 = 1$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$.

Задача 24.14. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$(z^2 + 1)W'' + 2zW' + zW = 0.$$

Ответ: $z = \pm i$ – правильные особые точки, $\rho_1 = \rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 0$.

Задача 24.15. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$(z^2 - 1)W'' + zW' + W = 0.$$

Ответ: $z = \pm 1$ – правильные особые точки, $\rho_1 = \frac{1}{2}$, $\rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = i$, $\rho_2 = -i$.

Задача 24.16. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$z^2(z - 2)^2 W'' + 4(z - 2)W' + z^2 W = 0.$$

Ответ: $z = 0$ – неправильная особая точка; $z = 2$ – правильная особая точка, $\rho_1 = i$, $\rho_2 = -i$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\rho_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Задача 24.17. *Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения*

$$z(1 - z)^2 W'' + (1 + z^2)W' + (1 - z)W = 0.$$

Ответ: $z = 1$ – неправильная особая точка; $z = 0$ – правильная особая точка, $\rho_1 = \rho_2 = 0$; $z = \infty$ – правильная особая точка, $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 1$.

Задача 24.18. *Пусть уравнение (24.1) имеет два решения вида e^{2z} и $1 + 2z$. Указать особые точки, их тип и характеристические показатели уравнения (24.1).*

Ответ: $z = 0$ – правильная особая точка, $\rho_1 = 2, \rho_2 = 0$; $z = \infty$ – неправильная особая точка.

25. Построение решений ЛДУ в виде рядов в окрестности правильных особых точек.

Пример 25.1. *Найти решения уравнения*

$$2zW'' + W' + W = 0 \tag{25.1}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - \frac{1}{2}\rho = 0,$$

откуда $\rho_1 = 1/2$, $\rho_2 = 0$. Так как $\rho_1 - \rho_2 = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, то из теоремы 24.5 следует, что существует два решения уравнения (25.1) вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n}. \tag{25.2}$$

Выпишем ряды для W' и W''

$$W'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)z^{\rho+n-1}, \quad W''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n-2}. \tag{25.3}$$

Подставляя ряды (25.2) и (25.3) в уравнение (25.1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)z^{\rho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n} = 0. \tag{25.4}$$

Удобно сделать замены переменных в суммах в равенстве (25.4) так, чтобы во всех суммах фигурировала одна и та же степень z. Для этого в последней сумме сделаем замену $n = k-1$, а в первой и второй сумме напишем k вместо n

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^{\rho+k-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(2\rho+2k-1)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^{\rho+k-1} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$z^{\rho-1}: \quad c_0\rho(2\rho-1) = 0, \tag{25.5}$$

$$z^{\rho+k-1}\ (k \geqslant 1): \quad c_k(\rho+k)(2\rho+2k-1) + c_{k-1} = 0. \tag{25.6}$$

Замечание 25.2. *Уравнение* (25.5) *с точностью до умножения на* $2c_0$ *совпадает с характеристическим уравнением. Из* (25.5) *видно, что если выбрать* $\rho \neq \rho_{1,2}$, *то* $c_0 = 0$ *и мы получаем тривиальное решение* $W \equiv 0$. *Поэтому единственная возможность получить нетривиальное решение исходного уравнения* (25.1) *выбрать* $\rho = \rho_{1,2}$.

Выбираем $\rho = \rho_1 = 1/2$ и $c_0 = 1$. Из (25.6) находим рекуррентную формулу для c_k

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{(\rho_1+k)(2\rho_1+2k-1)} = -\frac{c_{k-1}}{(2k+1)k}, \quad k \geqslant 1. \tag{25.7}$$

Обращаем внимание на то, что знаменатель не обращается в ноль ни при каких $k \geqslant 1$. Это гарантирует разрешимость рекуррентной формулы (25.7). Таким образом, решение W_1, соответствующее ρ_1, задается равенством

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{1}{2}+n}, \quad c_0 = 1,\ c_k = -\frac{c_{k-1}}{(2k+1)k}\,,\ k \geqslant 1.$$

Второе решение получается для $\rho = \rho_2 = 0$ и $c_0 = 1$. Из (25.6) находим рекуррентную формулу для c_k

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{(\rho_2 + k)(2\rho_2 + 2k - 1)} = -\frac{c_{k-1}}{k(2k-1)}\,, \quad k \geqslant 1.$$

Соответствующее решение задается равенством

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_0 = 1,\ d_k = -\frac{d_{k-1}}{(2k-1)k}\,,\ k \geqslant 1.$$

Здесь, ради того чтобы не смешивать обозначения, мы заменили c_k на d_k. $\square$

Ответ:

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{1}{2}+n}, \quad c_0 = 1,\ c_n = -\frac{c_{n-1}}{(2n+1)n},\ n \geqslant 1,$$

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_0 = 1,\ d_n = -\frac{d_{n-1}}{(2n-1)n},\ n \geqslant 1.$$

Замечание 25.3. *Общее решение уравнения* (25.1) *можно записать в виде*

$$W(z) = C_1 W_1(z) + C_2 W_2(z),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 25.4. *Найти решения уравнения*

$$3zW'' + 2W' - zW = 0 \tag{25.8}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - \frac{1}{3}\rho = 0,$$

откуда $\rho_1 = 1/3$, $\rho_2 = 0$. Так как $\rho_1 - \rho_2 = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, то из теоремы 24.5 следует, что существует два решения уравнения (25.8) вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n}. \tag{25.9}$$

Выпишем ряды для W' и W''

$$W'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)z^{\rho+n-1}, \quad W''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n-2}. \tag{25.10}$$

Подставляя ряды (25.9) и (25.10) в уравнение (25.8), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(\rho+n)z^{\rho+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k(\rho+k)z^{\rho+k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}z^{\rho+k-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(3\rho+3k-1)z^{\rho+k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}z^{\rho+k-1} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$z^{\rho-1}: \quad c_0\rho(3\rho-1) = 0, \tag{25.11}$$

$$z^{\rho}: \quad c_1(\rho+1)(3\rho+2) = 0, \tag{25.12}$$

$$z^{\rho+k-1}\ (k \geqslant 2): \quad c_k(\rho+k)(3\rho+3k-1) - c_{k-2} = 0. \tag{25.13}$$

Замечание 25.5. *Уравнение* (25.11) *с точностью до умножения на* $3c_0$ *совпадает с характеристическим уравнением.*

Выбираем $\rho = \rho_1 = 1/3$ и $c_0 = 1$. Из (25.12) следует, что $c_1 = 0$. Из (25.13) находим рекуррентную формулу для c_k

$$c_k = \frac{c_{k-2}}{(\rho_1+k)(3\rho_1+3k-1)} = \frac{c_{k-2}}{(3k+1)k}, \quad k \geqslant 2. \tag{25.14}$$

Знаменатель не обращается в ноль при $k \geqslant 1$. Это гарантирует разрешимость рекуррентной формулы (25.14). Решение W_1, соответствующее ρ_1, задается равенством

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{1}{3}+n}, \quad c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_k = \frac{c_{k-2}}{(3k+1)k},\ k \geqslant 2.$$

Второе решение получается для $\rho = \rho_2 = 0$ и $c_0 = 1$. Из (25.12) следует, что $c_1 = 0$. Из (25.13) находим рекуррентную формулу для c_k

$$c_k = \frac{c_{k-2}}{(\rho_2+k)(3\rho_2+3k-1)} = \frac{c_{k-2}}{k(3k-1)}, \quad k \geqslant 2.$$

Соответствующее решение задается равенством

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_k = \frac{d_{k-2}}{k(3k-1)},\ k \geqslant 2.$$

Как обычно, чтобы не смешивать обозначения мы заменили здесь c_k на d_k. □

Ответ:

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{1}{3}+n}, \quad c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_n = \frac{c_{n-2}}{(3n+1)n},\ n \geqslant 2,$$

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_n = \frac{d_{n-2}}{n(3n-1)},\ n \geqslant 2.$$

Пример 25.6. *Найти решения уравнения*

$$2z^2(3+2z)W'' + z(9+2z)W' - 3W = 0 \tag{25.15}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 + \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда $\rho_1 = 1/2$, $\rho_2 = -1$. Так как $\rho_1 - \rho_2 = 3/2 \notin \mathbb{Z}$, то из теоремы 24.5 следует, что существует два решения уравнения (25.15) вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n}. \tag{25.16}$$

Выпишем ряды для W' и W''

$$W'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n) z^{\rho+n-1}, \quad W''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1) z^{\rho+n-2}. \tag{25.17}$$

Подставляя ряды (25.16) и (25.17) в уравнение (25.15), получим

$$(6z^2+4z^3)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n-2} + (9z+2z^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)z^{\rho+n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 6c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n+1} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} 9c_n(\rho+n)z^{\rho+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(\rho+n)z^{\rho+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n z^{\rho+n} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 6c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k} + \sum_{k=1}^{\infty} 4c_{k-1}(\rho+k-1)(\rho+k-2)z^{\rho+k} +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} 9c_k(\rho+k)z^{\rho+k} + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}(\rho+k-1)z^{\rho+k} - \sum_{k=0}^{\infty} 3c_k z^{\rho+k} = 0. \tag{25.18}$$

Удобно ввести обозначения

$$F(n) = 6n(n-1) + 9n - 3 = 3(2n^2+n-1) = 6\left(n - \frac{1}{2}\right)(n+1),$$
$$G(n) = 4(n-1)(n-2) + 2(n-1) = 2(n-1)(2n-3).$$

Равенство (25.18) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k F(\rho+k) z^{\rho+k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} G(\rho+k) z^{\rho+k} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$z^{\rho}: \quad c_0 F(\rho) = 3c_0(2\rho^2+\rho-1) = 0, \tag{25.19}$$
$$z^{\rho+k}\ (k \geqslant 1): \quad c_k F(\rho+k) + c_{k-1} G(\rho+k) = 0. \tag{25.20}$$

Уравнение (25.19) с точностью до умножения на $6c_0$ совпадает с характеристическим уравнением. Выбираем $\rho = \rho_1 = 1/2$ и $c_0 = 1$. Из (25.20) находим рекуррентную формулу для c_k

$$c_k = -c_{k-1}\frac{G(\rho+k)}{F(\rho+k)} = -c_{k-1}\frac{(2k+2\rho_1-2)(2k+2\rho_1-3)}{3(2k+2\rho_1-1)(k+\rho_1+1)}, \quad k \geqslant 1.$$
$$c_k = -c_{k-1}\frac{2(2k-1)(k-1)}{3k(2k+3)}, \quad k \geqslant 1. \tag{25.21}$$

Обращаем внимание на то, что знаменатель в (25.21) не обращается в ноль ни при каких $k \geqslant 1$. Это гарантирует разрешимость рекуррентной формулы (25.21). Вместе с тем, числитель в

(25.21) при $k = 1$ обращается в ноль. Это означает, что $c_1 = 0$, а значит и $c_k = 0$ при $k \geqslant 2$. Таким образом, решение W_1, соответствующее ρ_1, задается рядом, состоящим из одного члена

$$W_1(z) = \sqrt{z}.$$

Второе решение получается для $\rho = \rho_2 = -1$ и $c_0 = 1$. Из (25.20) находим рекуррентную формулу для c_k

$$c_k = -c_{k-1}\frac{(2k+2\rho_2-2)(2k+2\rho_2-3)}{3(2k+2\rho_2-1)(k+\rho_2+1)} = -c_{k-1}\frac{2(k-2)(2k-5)}{3(2k-3)k}\,, \quad k \geqslant 1. \tag{25.22}$$

Видим, что знаменатель в (25.22) не обращается в ноль при $k \geqslant 1$. Вместе с тем, числитель в (25.22) при $k = 2$ обращается в ноль. Это означает, что $c_2 = 0$, а значит и $c_k = 0$ при $k \geqslant 3$. Осталось определить c_1

$$c_1 = -c_0\left.\frac{2(k-2)(2k-5)}{3(2k-3)k}\right|_{k=1} = 2.$$

Соответствующее решение задается конечным рядом

$$W_2(z) = \frac{1}{z} + 2. \ \square$$

Ответ: $W_1(z) = \sqrt{z}$, $W_2(z) = \frac{1}{z} + 2$.

Пример 25.7. *Найти решения уравнения*

$$2(2z^3 - 3z^2 + 1)W'' + (2z^2 + 5z - 7)W' - 3W = 0 \tag{25.23}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = -1$. Вычислить коэффициенты рядов явно.

Решение. Ради упрощения вычислений, удобно свести задачу к построению рядов в окрестности точки ноль. Для этого в уравнении (25.23) сделаем замену $z = \zeta + z_0 = \zeta - 1$

$$2z^3 - 3z^2 + 1|_{z=\zeta-1} = \zeta^2(3+2\zeta), \quad 2z^2 + 5z - 7|_{z=\zeta-1} = \zeta(9+2\zeta), \quad \zeta_0 = z_0 + 1 = 0, \quad W'_z = W'_\zeta,$$

откуда

$$2\zeta^2(3+2\zeta)W''_{\zeta\zeta} + \zeta(9+2\zeta)W'_\zeta - 3W = 0. \tag{25.24}$$

Заметим теперь, что с точностью до замены ζ на z уравнения (25.24) и (25.15) совпадают. Используя решение из примера 25.6, получим

$$W_1 = \sqrt{\zeta}, \quad W_2 = \frac{1}{\zeta} + 2.$$

Возвращаясь к переменной z, найдем

$$W_1(z) = \sqrt{z+1}, \quad W_2(z) = \frac{1}{z+1} + 2. \ \square$$

Ответ: $W_1(z) = \sqrt{z+1}$, $W_2(z) = \frac{1}{z+1} + 2$.

Домашнее задание:

Задача 25.8. *Найти решения уравнения*

$$9z^2W'' + 9zW' - (1 + z + z^2)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$.

Ответ:

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{1}{3}+n}, \quad c_0 = 1,\ c_1 = \frac{1}{15},\ c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{(3n+1)^2 - 1}\,,\ n \geqslant 2,$$

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-\frac{1}{3}+n}, \quad d_0 = 1,\ d_1 = \frac{1}{3},\ d_n = \frac{d_{n-1} + d_{n-2}}{(3n-1)^2 - 1}\,,\ n \geqslant 2.$$

Задача 25.9. *Найти решения уравнения*

$$3z^2(2+z)W'' - 2z(1+2z)W' + 2(1+z)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z + \frac{1}{5}z^2$, $W_2(z) = \sqrt[3]{z}$.

Задача 25.10. *Найти решения уравнения*

$$2z^2(1+z)W'' - z(5+7z)W' + 3(2+3z)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z^2 + \frac{1}{3}z^3$, $W_2(z) = z^{\frac{3}{2}}$.

Задача 25.11. *Найти решения уравнения*

$$2z(1+z^2)W'' + (3-z^2)W' - 2zW = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = 1 + \frac{1}{5}z^2$, $W_2(z) = z^{-\frac{1}{2}}$.

Задача 25.12. *Найти решения уравнения*

$$(24z + 2z^3)W'' + (12 - 3z^2)W' - (6 - 3z)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}}$, $W_2(z) = 2 + z$.

Задача 25.13. *Найти решения уравнения*

$$(-2z^2 + 10z^4)W'' - (z + 15z^3)W' + (1 + 5z + 10z^2)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z + z^2$, $W_2(z) = z^{-\frac{1}{2}} - 5z^{\frac{1}{2}}$.

Задача 25.14. *Сколько линейно независимых решений вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\rho}$ *существует у уравнения*

$$z^{\alpha}W''' + \beta zW' - \beta W = 0$$

при различных параметрах $\alpha \in \mathbb{Z}$*?*

Ответ: При $\beta = 0$ существует 3 ЛНЗ решения указанного вида; при $\alpha \geqslant 4$ и $\beta \neq 0$ не существует ни одного решения указанного вида[2]; при $\alpha = 2$ и $\beta \neq 1$ – 3 ЛНЗ решения; при $\alpha = 2$ и $\beta = 1$ – 1 ЛНЗ решение; при $\alpha = 1, 2$ и $\beta \neq 0$ – 2 ЛНЗ решения; при $\alpha \leqslant 0$ – 3 ЛНЗ решения.

[2]Более точно, можно построить одно формальное решение в виде ряда, который будет расходиться при $|z| > 0$.

26. Построение решений ЛДУ в виде рядов в окрестности правильных особых точек. Случай появления логарифма.

Пример 26.1. *Найти решения уравнения*

$$zW'' + W' - zW = 0 \tag{26.1}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 = 0,$$

откуда $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Из теоремы 24.5 следует, что существует только одно решение уравнения (26.1) вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1. \tag{26.2}$$

Подставляя ряд (26.2) в уравнение (26.1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^{n-1} = 0. \tag{26.3}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$\begin{aligned} z^{-1}: &\quad c_0 \cdot 0 = 0, \quad c_0 = 1, \\ z^0: &\quad c_1 = 0, \\ z^{n-1}\ (n \geqslant 2): &\quad n^2 c_n - c_{n-2} = 0, \quad c_n = \frac{c_{n-2}}{n^2}. \end{aligned} \tag{26.4}$$

Рекуррентное соотношение разрешимо, поскольку знаменатель в (26.4) не обращается в ноль при $n \geqslant 2$. Таким образом, первое решение имеет вид

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_n = \frac{c_{n-2}}{n^2},\ n \geqslant 2.$$

Второе решение уравнения (26.1) необходимо искать в виде (см. теорему 24.5 на стр. 67)

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + AW_1(z)\ln z. \tag{26.5}$$

Подставляя выражение (26.5) в уравнение (26.1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 d_n z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} z^{n-1} = -2AW_1'(z) = -2A\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}. \tag{26.6}$$

Отметим, что выражение в левой части равенства (26.6) можно получить из левой части равенства (26.3), подставляя d_k вместо c_k. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях

z в равенстве (26.6), получим

$$
\begin{aligned}
z^{-1}: &\quad d_0 \cdot 0 = 0, \quad d_0 - \text{любое, пусть } d_0 = 0, && (26.7)\\
z^{0}: &\quad d_1 = -2Ac_1 = 0, \quad A - \text{любое, пусть } A = 1, && (26.8)\\
z^{n-1}\ (n \geqslant 2): &\quad n^2 d_n - d_{n-2} = -2Anc_n, \quad d_n = \frac{d_{n-2} - 2nc_n}{n^2}. &&
\end{aligned}
$$

Прокомментируем полученные равенства. В (26.7) мы получили равенство $0 = 0$, которое справедливо для любых d_0. Это значит, что мы можем выбирать d_0 произвольным образом. При этом, однако, следует иметь в виду, что мы хотим найти *нетривиальное* решение исходного уравнения. В данном случае выбор $d_0 = 0$ не приводит нас к тривиальному решению. На первый взгляд может показаться странным, что у нас появляется подобный произвол в выборе постоянной d_0: это могло бы привести к существованию третьего *линейно независимого* решения для дифференциального уравнения второго порядка, что, как известно, невозможно. Это кажущееся противоречие можно объяснить следующим образом. Допустим, что мы уже построили решение W_2 для $d_0 = 0$. Рассмотрим новое решение $W_3 = W_2 + DW_1$. Несложно видеть, что решение W_3, также как и W_2, имеет вид (26.5), причем $d_0 = D$. Это означает, что произвольный выбор постоянной d_0 соответствует тому обстоятельству, что решение W_2 определяется с точностью до произвольно слагаемого вида DW_1 (отметим, что это не единственный произвол при выборе W_2, но об этом чуть ниже).

Отметим попутно, что если корни характеристического уравнения для уравнения вида (24.1) обладают свойством $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ (т. е. появление логарифма у W_2 исключено), то решения W_1 и W_2 определяются лишь с точностью до умножения на произвольную постоянную. Это соответствует произвольному выбору постоянных c_0 и d_0. При этом никакого другого произвола в выборе W_1 и W_2 нет.

В (26.8) появилось соотношение $d_1 = -2Ac_1$. Из этого соотношения мы должны определить сразу две постоянные d_1 и A. Это означает, что у нас опять появляется произвол в определении решения W_2. Данный произвол соответствует тому, что решение W_2 определяется с точностью до умножения на произвольную постоянную. При этом, если выбирать $A = 0$, то мы получим тривиальное решение исходного уравнения. □

Ответ:

$$
\begin{aligned}
W_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_n = \frac{c_{n-2}}{n^2},\ n \geqslant 2,\\
W_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + W_1(z)\ln z, \quad d_0 = 0,\ d_1 = 0,\ d_n = \frac{d_{n-2} - 2nc_n}{n^2},\ n \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Пример 26.2. *Найти решения уравнения*

$$
z(1+z)W'' + 3(1+z)W' - zW = 0 \tag{26.9}
$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$
\rho^2 + 2\rho = 0,
$$

откуда $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = -2$. Так как $\rho_1 - \rho_2 = 2 \in \mathbb{Z}$, то из теоремы 24.5 следует, что существует решение уравнения (26.9) вида

$$
W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n} \tag{26.10}
$$

при $\rho = \rho_1 = 0$.

Подставляя ряд (26.10) в уравнение (26.9), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho+n)(\rho+n-1)z^{\rho+n} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} 3c_n(\rho+n)z^{\rho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n(\rho+n)z^{\rho+n} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\rho+n+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}(\rho+k-1)(\rho+k-2)z^{\rho+k-1} +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} 3c_k(\rho+k)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3c_{k-1}(\rho+k-1)z^{\rho+k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}z^{\rho+k-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(\rho+k+2)z^{\rho+k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}(\rho+k-1)(\rho+k+1)z^{\rho+k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}z^{\rho+k-1} = 0. \quad (26.11)$$

Полагая $\rho = \rho_1 = 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$\begin{aligned} z^{-1}:&\quad c_0\cdot 0 = 0, \quad c_0 = 1,\\ z^{0}:&\quad 3c_1 - c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{c_0}{3} = \frac{1}{3},\\ z^{k-1}\ (k\geqslant 2):&\quad k(k+2)c_k + (k^2-1)c_{k-1} - c_{k-2} = 0, \quad c_k = \frac{c_{k-2}-(k^2-1)c_{k-1}}{k(k+2)}. \end{aligned} \quad (26.12)$$

Знаменатель в (26.12) не обращается в ноль ни при каких $k \geqslant 2$. Это гарантирует разрешимость рекуррентной формулы (26.12).

Таким образом, решение W_1, соответствующее $\rho_1 = 0$, задается равенством

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1,\ c_1 = \frac{1}{3},\ c_k = \frac{c_{k-2}-(k^2-1)c_{k-1}}{k(k+2)},\ k\geqslant 2.$$

Второе решение, соответствующее $\rho = \rho_2 = -2$, необходимо искать в виде (см. теорему 24.5 на стр. 67)

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n-2} + AW_1(z)\ln z. \quad (26.13)$$

Подставляя выражение (26.13) в уравнение (26.9), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(n-2)nz^{n-3} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}(n-3)(n-1)z^{n-3} - \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2}z^{n-3} =$$
$$= -2A\left((z+1)W_1'(z) + W_1(z) + \frac{1}{z}W_1(z)\right). \quad (26.14)$$

Отметим, что выражение в левой части равенства (26.14) можно получить из левой части равенства (26.11), подставляя ρ_2 вместо ρ и d_k вместо c_k.

Преобразуем правую часть равенства (26.14)

$$(z+1)W_1'(z) + W_1(z) + \frac{1}{z}W_1(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(c_n + c_{n+1}(n+1))z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^n. \quad (26.15)$$

Подставим (26.15) в (26.14) и сделаем подстановку $k = n+3$ в суммах в левой части равенства (26.14)

$$\sum_{n=-3}^{\infty} d_{n+3}(n+1)(n+3)z^n + \sum_{n=-2}^{\infty} d_{n+2}n(n+2)z^n - \sum_{n=-1}^{\infty} d_{n+1}z^n =$$
$$= -2A\left(\sum_{n=-1}^{\infty} c_{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(c_n + c_{n+1}(n+1))z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^n\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$\begin{aligned}
z^{-3}:&\quad d_0 \cdot 0 = 0, \quad d_0 = 1,\\
z^{-2}:&\quad -d_1 + d_0 \cdot 0 = 0, \quad d_1 = 0,\\
z^{-1}:&\quad d_2 \cdot 0 - d_1 - d_0 = -2Ac_0, \quad A = \frac{d_0+d_1}{2c_0} = \frac{1}{2}\,,\ d_2 - \text{любое},\ \text{пусть}\ d_2 = 0,\\
z^{0}:&\quad 3d_3 + d_2\cdot 0 - d_1 = -2A(c_1 + c_0 + c_1), \quad d_3 = \frac{d_1 - 2A(c_0+2c_1)}{3} = -\frac{5}{9}\,,\\
z^n\ (n \geqslant 1):&\quad d_{n+3}(n+1)(n+3) + d_{n+2}n(n+2) - d_{n+1} = -\left(c_n(n+1) + c_{n+1}(n+2)\right),\\
&\quad d_{n+3} = \frac{d_{n+1} - d_{n+2}n(n+2) - c_n(n+1) - c_{n+1}(n+2)}{(n+1)(n+3)}. \ \square
\end{aligned}$$

Ответ:

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1,\ c_1 = \frac{1}{3}\,,\ c_n = \frac{c_{n-2} - (n^2-1)c_{n-1}}{n(n+2)}\,,\ k \geqslant 2,$$

$$W_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n-2} + \frac{1}{2}W_1(z)\ln z, \quad d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = -\frac{5}{9}\,,$$
$$d_{n+3} = \frac{d_{n+1} - d_{n+2}n(n+2) - c_n(n+1) - c_{n+1}(n+2)}{(n+1)(n+3)},\ n \geqslant 1.$$

Пример 26.3. *Найти решения уравнения*

$$z(1+z^2)W'' + (1-z^2)W' = 0 \tag{26.16}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. Вычислить коэффициенты рядов явно.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 = 0,$$

откуда $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Существует только одно решение уравнения (26.16) вида

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{26.17}$$

Подставляя ряд (26.17) в уравнение (26.16), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2)c_n z^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 c_k z^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-2)(k-4)c_{k-2} z^{k-1} = 0. \tag{26.18}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в уравнении (26.18), получим

$$\begin{aligned} z^{-1}: &\quad c_0 \cdot 0 = 0, \quad c_0 = 1, \\ z^0: &\quad c_1 = 0, \\ z^{k-1}\ (k \geqslant 2): &\quad k^2 c_k - (k-2)(k-4)c_{k-2} = 0, \quad c_k = \frac{(k-2)(k-4)c_{k-2}}{k^2}. \end{aligned} \tag{26.19}$$

Заметим, что рекуррентное соотношение (26.19) можно решить явно, а именно $c_k = 0$ при $k \geqslant 2$. Таким образом, первое решение имеет вид

$$W_1(z) = 1.$$

Второе решение уравнения (26.16) необходимо искать в виде

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + A \ln z. \tag{26.20}$$

Подставляя выражение (26.20) в уравнение (26.16), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 d_n z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)(n-4)d_{n-2} z^{n-1} = 2Az. \tag{26.21}$$

Выражение в левой части равенства (26.21) можно получить из левой части равенства (26.18), подставляя d_k вместо c_k. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (26.21), получим

$$\begin{aligned} z^{-1}: &\quad d_0 \cdot 0 = 0, \quad d_0 - \text{любое, пусть } d_0 = 0, \\ z^0: &\quad d_1 = 0, \\ z^1: &\quad 4d_2 = 2A, \quad A - \text{любое, пусть } A = 1, \text{ тогда } d_2 = \frac{1}{2}, \\ z^{n-1}\ (n \geqslant 3): &\quad n^2 d_n - (n-2)(n-4)d_{n-2} = 0, \quad d_n = \frac{(n-2)(n-4)d_{n-2}}{n^2}. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что $d_n = 0$ при $n \geqslant 3$. □

Ответ: $W_1(z) = 1$, $W_2(z) = \frac{1}{2}z^2 + \ln z$.

Пример 26.4. *Найти решения уравнения*

$$z(1-z^2)W'' + 2W' = 0 \tag{26.22}$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. Вычислить коэффициенты рядов явно.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho(\rho+1)=0,$$

откуда $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = -1$. Существует решение уравнения (26.22) вида

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{26.23}$$

Подставляя ряд (26.23) в уравнение (26.22), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)c_k z^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-2)(k-3)c_{k-2} z^{k-1} = 0. \tag{26.24}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в уравнении (26.24), получим

$$\begin{aligned} z^{-1}: &\quad c_0\cdot 0 = 0, \quad c_0 = 1,\\ z^{0}: &\quad 2c_1 = 0, \quad c_1 = 0,\\ z^{k-1}\ (k\geqslant 2): &\quad k(k+1)c_k - (k-2)(k-3)c_{k-2} = 0, \quad c_k = \frac{(k-2)(k-3)c_{k-2}}{k(k+1)}. \end{aligned} \tag{26.25}$$

Рекуррентное соотношение (26.25) решается явно, а именно $c_k = 0$ при $k \geqslant 2$. Таким образом, первое решение имеет вид

$$W_1(z) = 1.$$

Второе решение уравнения (26.22) необходимо искать в виде

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n-1} + A\ln z. \tag{26.26}$$

Подставляя выражение (26.26) в уравнение (26.22), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)nd_n z^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-3)(n-4)d_{n-2}z^{n-2} = -A\left(\frac{1}{z}+z\right). \tag{26.27}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (26.27), получим

$$\begin{aligned} z^{-2}: &\quad d_0\cdot 0 = 0, \quad d_0 = 1,\\ z^{-1}: &\quad d_1\cdot 0 = -A, \quad A = 0, \quad d_1 - \text{любое},\ \text{пусть}\ d_1 = 0,\\ z^{n-2}\ (n\geqslant 2): &\quad (n-1)nd_n - (n-3)(n-4)d_{n-2} = 0, \quad d_n = \frac{(n-3)(n-4)d_{n-2}}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $d_2 = d_0 = 1$ и $d_n = 0$ при $n \geqslant 3$. □

Ответ: $W_1(z) = 1$, $W_2(z) = \frac{1}{z} + z$.

Домашнее задание:

Задача 26.5. *Найти решения уравнения*

$$z(1+z)W'' + W' = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = 1$, $W_2(z) = z + \ln z$.

Задача 26.6. *Найти решения уравнения*

$$z(1+z^2)W'' + (1-z^2)W' = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = 1$, $W_2(z) = z^2 + 2\ln z$.

Задача 26.7. *Найти решения уравнения*

$$z^2W'' - 3zW' + 4W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z^2$, $W_2(z) = z^2 \ln z$.

Задача 26.8. *Найти решения уравнения*

$$z(1-z)W'' + zW' - W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z$, $W_2(z) = 1 + z\ln z$.

Задача 26.9. *Найти решения уравнения*

$$z^2(1+z)W'' + z(3+2z)W' + W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z^{-1}$, $W_2(z) = 1 + z^{-1}\ln z$.

Задача 26.10. *Найти решения уравнения*

$$z(1+z^2)W'' + (1-z^2)W' - (1-z)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = 1 + z$, $W_2(z) = -2z + (1+z)\ln z$.

Задача 26.11. *Найти решения уравнения*

$$z^2(1+z)W'' - z(1+2z)W' + (1+2z)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = z$, $W_2(z) = z^2 + z\ln z$.

Задача 26.12. *Найти решения уравнения*

$$(z+z^3)W'' + (1-z^2)W' - (1-z)W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$. *Вычислить коэффициенты рядов явно.*

Ответ: $W_1(z) = 1 + z$, $W_2(z) = 2 + (1+z)\ln z$.

27. 9-ая контрольная работа (задача: 9; 30 минут).

Вариант контрольной работы №9.

Задача 9. Найти решения уравнения в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$

$$3z(1+2z)W'' + 2(1-z)W' + 2W = 0.$$

Вычислить коэффициенты рядов явно.

Ответ: $W_1(z) = z^{\frac{1}{3}}$, $W_2(z) = 1 - z$.

Вариант контрольной работы №9.

Задача 9. Найти решения уравнения в виде рядов в окрестности точки $z_0 = 0$

$$(z^3 + z^2)W'' + (3z + 2z^2)W' + W = 0.$$

Вычислить коэффициенты рядов явно.

Ответ: $W_1(z) = z^{-1}, W_2(z) = 1 + z^{-1}\ln z$.

28. Метод Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с линейными коэффициентами

$$(a_n + b_n z)W^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} z)W^{(n-1)} + \cdots + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0. \tag{28.1}$$

Здесь a_k и b_k – известные постоянные, W – неизвестная функция. Мы будем предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} |b_k| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{n-1} (|a_k| + |b_k|) \neq 0, \quad |a_n| + |b_n| \neq 0. \tag{28.2}$$

Условие (28.2) гарантирует, что уравнение (28.1) не вырождается в уравнение с постоянными коэффициентами. Дело в том, что без дополнительных оговорок[3] метод Лапласа не применим к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Задача заключается в нахождении n линейно независимых решений уравнения (28.1). Для поиска решений можно применять метод Лапласа. Опишем основную идею этого метода.

Решение строится в несколько шагов.

(1) Ищем решение уравнения в виде интеграла

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt, \tag{28.3}$$

где γ – контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом функция V и контур γ подлежат определению.

(2) Подставляя интеграл (28.3) в уравнение (28.1), получим выражение, которое можно привести к виду

$$\int\limits_{\gamma} \left[A(t)V'(t) + B(t)V(t)\right] e^{zt}\, dt + C(t)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0, \tag{28.4}$$

используя преобразования

$$W^{(k)}(z) = \int\limits_{\gamma} V(t) t^k e^{zt}\, dt,$$

$$zW^{(k)}(z) = z\int\limits_{\gamma} V(t) t^k e^{zt}\, dt = \int\limits_{\gamma} V(t) t^k\, de^{zt} = V(t)t^k e^{zt}\Big|_{\gamma} - \int\limits_{\gamma} (V(t)t^k)' e^{zt}\, dt.$$

Для того чтобы выполнялось равенство (28.4), достаточно потребовать выполнения двух соотношений

$$A(t)V'(t) + B(t)V(t) = 0, \tag{28.5}$$

$$C(t)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0. \tag{28.6}$$

[3] Можно дополнительно поставить начальные условия. В этом случае метод Лапласа преобразуется в операционный метод и будет применим к уравнениям с постоянными коэффициентами. Можно также использовать метод Фурье, т. е. в качестве контура интегрирования γ взять мнимую ось и искать решения уравнения на V в классе *обобщенных* функций.

(3) Уравнение (28.5) служит для определения функции V и интегрируется методом разделения переменных

$$V(t) = \exp\left(-\int^{t} \frac{B(\tau)}{A(\tau)}\,d\tau\right).$$

Еще раз обратим внимание на то, что функция V является решением дифференциального уравнения *первого* порядка, которое *всегда* можно проинтегрировать. Именно это обстоятельство делает *метод Лапласа* эффективным средством при решении уравнений вида (28.1).

Условие (28.6) служит для определения контура γ. Заметим, что условие (28.6) должно выполняться при всех z. Отсюда следует, что контур γ должен быть либо замкнутым, либо начинаться и заканчиваться в точках (возможно бесконечно удаленных) где функция $C(t)V(t)e^{zt}$ обращается в ноль. Если контур уходит на бесконечность, то необходимо также проследить за сходимостью интеграла (28.3).

- Отметим, что *не всегда* возможно выбрать n различных контуров так, чтобы соответствующие интегральные представления (28.3) отвечали n линейно независимым решениям исходного уравнения (28.1).
- ○ Ответ выписывается в виде интеграла (28.3).

Пример 28.1. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$zW' - 2W = 0. \tag{28.7}$$

Вычислить полученный интеграл.

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt. \tag{28.8}$$

Подставляя (28.8) в уравнение (28.7), получим

$$zW' - 2W = z\int_{\gamma} tV(t)e^{zt}\,dt - 2\int_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt = \int_{\gamma} tV(t)\,de^{zt} - 2\int_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt =$$

$$= -\int_{\gamma} (tV(t))'e^{zt}\,dt - 2\int_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt + tV(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = -\int_{\gamma} \left(tV'(t) + 3V(t)\right)e^{zt}\,dt + tV(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$tV'(t) + 3V(t) = 0, \quad tV(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем

$$\frac{dV}{V} = -\frac{3}{t}\,dt \iff \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{3}{t}\,dt \iff \ln V = -3\ln t + C_1 \iff V = Ct^{-3},$$

где C – произвольная постоянная. Нас интересует хотя бы какое-нибудь нетривиальное решение уравнения (28.7), поэтому удобно фиксировать постоянную $C = 1$.

Условие на контур γ принимает вид

$$tV(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = t^{-2}e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

В качестве γ можно взять контур $|t| = 1$, который обходится против часовой стрелки. Заметим, что функция $V(t) = t^{-3}$ регулярна в области $|t| > 0$, поэтому в качестве γ можно взять любой другой замкнутый контур охватывающий начало координат один раз. При этом значение интеграла (28.8) не изменится.

В результате решение уравнение можно записать в виде

$$W(z) = \oint\limits_{|t|=1} \frac{1}{t^3}\, e^{zt}\, dt. \tag{28.9}$$

Последний интеграл легко вычисляется по вычетам

$$\oint\limits_{|t|=1} \frac{1}{t^3}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0} \left(\frac{1}{t^3}\, e^{zt}\right) = \pi i z^2.$$

Отметим, что общее решение уравнения (28.7) имеет вид $W(z) = Cz^2$, где C – произвольная постоянная. $\square$

Ответ: $W(z) = \oint\limits_{|t|=1} \frac{1}{t^3}\, e^{zt}\, dt = \pi i z^2$.

Пример 28.2. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$W' - 2zW = 0. \tag{28.10}$$

Вычислить полученный интеграл.

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt. \tag{28.11}$$

Подставляя (28.11) в уравнение (28.10), получим

$$W' - 2zW = \int\limits_{\gamma} tV(t)e^{zt}\, dt - 2z\int\limits_{\gamma} V(t)e^{zt}\, dt = \int\limits_{\gamma} tV(t)e^{zt}\, dt - 2\int\limits_{\gamma} V(t)\, de^{zt} =$$

$$= \int\limits_{\gamma} tV(t)e^{zt}\, dt + 2\int\limits_{\gamma} e^{zt}V'(t)\, dt - 2V(t)\, e^{zt}\Big|_{\gamma} = \int\limits_{\gamma} (tV(t) + 2V'(t))e^{zt}\, dt - 2V(t)\, e^{zt}\Big|_{\gamma}.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$2V'(t) + tV(t) = 0, \quad V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем $V(t) = e^{-\frac{1}{4}t^2}$.

Условие на контур γ принимает вид

$$V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = e^{-\frac{1}{4}t^2 + zt}\Big|_{\gamma} = 0. \tag{28.12}$$

Функция V регулярна во всей комплексной плоскости. Поэтому для любого замкнутого контура γ интеграл (28.11) обращается в ноль. Таким образом, единственная возможность выбрать контур γ так, чтобы получить нетривиальный интеграл (28.11) и удовлетворить условию (28.12), заключается в том, чтобы увести концы контура γ на бесконечность.

Функция $e^{-\frac{1}{4}t^2}$ убывает при больших t только если t принадлежит области $\mathrm{Re}(t^2) > 0$. Область $\mathrm{Re}(t^2) > 0$ изображена на рисунке 5 желтым цветом. Легко видеть, что функция $e^{-\frac{1}{4}t^2}$ убывает быстрее всего в направлениях $t \to \pm\infty$. Таким образом, в качестве контура γ можно взять

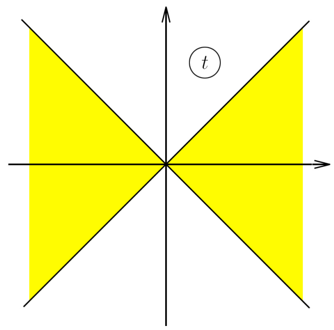

Рис. 5. Область $\mathrm{Re}(t^2) > 0$ выделена желтым цветом.

вещественную ось. Обращаем внимание на то, что при таком выборе контура γ интеграл в (28.11) сходится при всех $z \in \mathbb{C}$.

В результате решение уравнения можно записать в виде

$$W(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}t^2}\, e^{zt}\, dt.$$

Последний интеграл легко сводится к интегралу Пуассона и вычисляется

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}t^2}\, e^{zt}\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{4}\left[t^2 - 4tz + 4z^2\right] + z^2\right)\, dt = e^{z^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{4}\left[t - 2z\right]^2\right)\, dt =$$

$$= e^{z^2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}x^2}\, dx = 2\sqrt{\pi}\, e^{z^2}. \ \square$$

Ответ: $W(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}t^2}\, e^{zt}\, dt = 2\sqrt{\pi}\, e^{z^2}$.

Пример 28.3. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$zW' + (1+z)W = 0. \tag{28.13}$$

Вычислить полученный интеграл.

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt. \tag{28.14}$$

Подставляя (28.14) в уравнение (28.13), получим

$$zW' + (1+z)W = \int\limits_{\gamma} tV(t)\, de^{zt} + \int\limits_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt + \int\limits_{\gamma} V(t)\, de^{zt} =$$

$$= -\int\limits_{\gamma} (tV(t))' e^{zt}\, dt + \int\limits_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt - \int\limits_{\gamma} V'(t) e^{zt}\, dt + (t+1)V(t)\, e^{zt}\Big|_{\gamma} =$$

$$= -\int\limits_{\gamma} (t+1)V'(t) e^{zt}\, dt + (t+1)V(t)\, e^{zt}\Big|_{\gamma}.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$(t+1)V'(t) = 0, \quad (t+1)V(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем $V(t) = 1$.

Условие на контур γ принимает вид

$$(t+1)V(t)e^{zt}\big|_\gamma = (t+1)e^{zt}\big|_\gamma = 0. \tag{28.15}$$

Функция $(t+1)e^{zt}$ обращается в ноль только в точке -1. Условие (28.15) будет выполнено, если начать контур γ в точке -1. Заметим, что закончить контур γ в конечной точке комплексной плоскости нельзя, потому что тогда либо не будет выполнено условие (28.15), либо интеграл (28.14) обратится в нуль (в случае замкнутого контура γ). Поэтому второй конец контура γ необходимо увести на бесконечность.

Определим направления, вдоль которых можно уводить контур γ на бесконечность. Контур γ нужно уводить на бесконечность так, чтобы функция $(t+1)e^{zt}$ убывала по переменной t вдоль этого контура. Сразу видно, что при $z = 0$ функция $(t+1)e^{zt} = (t+1)$ не убывает ни по каким направлениям, поэтому решение W будет иметь особенность в точке $z = 0$[4].

Рассмотрим случай $z \neq 0$. Функция $(t+1)e^{zt}$ убывает по направлениям, для которых, например, выполнено условие

$$\operatorname{Re}(zt) \leqslant -\varepsilon|zt| < 0, \tag{28.16}$$

где ε – произвольная положительная постоянная. Заметим попутно, что условие (28.16) гарантирует сходимость интеграла (28.14).

Основная неприятность в данном случае заключается в том, что направления, в которых функция $(t+1)e^{zt}$ убывает, зависят от значения параметра z, более точно от аргумента z. Удобно ввести обозначения $z = |z|e^{i\varphi}$, $t = |t|e^{i\psi}$. Условие (28.16) принимает вид

$$\operatorname{Re}(zt) = |zt| \operatorname{Re}\left(e^{i(\varphi+\psi)}\right) = |zt|\cos(\varphi+\psi) \leqslant -\varepsilon|zt| < 0 \iff \cos(\varphi+\psi) \leqslant -\varepsilon,$$

$$\varphi + \psi \in \left[\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{3\pi}{2} - \delta\right], \quad \delta = \arcsin\varepsilon > 0. \tag{28.17}$$

Выберем контур γ уходящим на бесконечность вдоль направления $e^{i\psi}$, см. рисунок 6. Область значений z, для которых выполнено условие (28.17), изображена на рисунке 7. При вращении контура γ, например, против часовой стрелки, значение интеграла (28.14) для заданного z не меняется (если, конечно, интеграл (28.14) сходится), однако, как видно из рисунка 7, область в плоскости z, в которой интеграл (28.14) сходится, будет вращаться по часовой стрелке.

Остановимся на этом моменте подробнее. Пусть, например, $\gamma = [-1, +\infty)$, тогда решение уравнения (28.13) можно задать интегралом (28.14) для $z \in D_0 \cup D_-$, см. рисунок 9. Если мы теперь хотим аналитически продолжить решение, например, в красную область D_+, то мы должны поступить следующим образом. Предполагаем, что z лежит в желтой области D_0. Поворачиваем контур γ по часовой стрелке на угол, равный углу раствора сектора D_+, см. рисунок 8. При этом для $z \in D_0$ интеграл будет сходится и не изменяется при повороте контура. Далее видно, что интеграл по новому контуру сходится в области $z \in D_0 \cup D_+$. Это означает, что мы аналитически продолжили решение в область $z \in D_0 \cup D_+$. Аналогичным образом решение можно продолжать и дальше.

Замечание 28.4. *После аналитического продолжения решения вокруг начала координат (в плоскости z) на угол 2π может оказаться либо, что значения решения W после аналитического продолжения остались прежними, либо изменились. В первом случае мы получаем*

[4]Это согласуется с тем, что уравнение (28.13) имеет особую точку при $z = 0$.

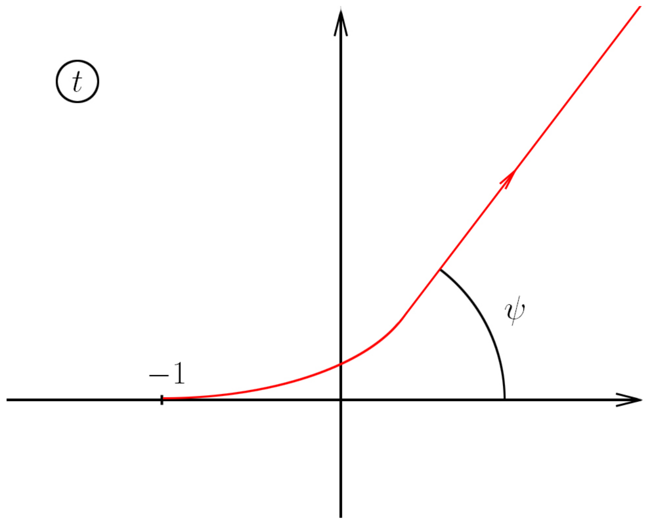

Рис. 6. Контур γ выделен красным цветом.

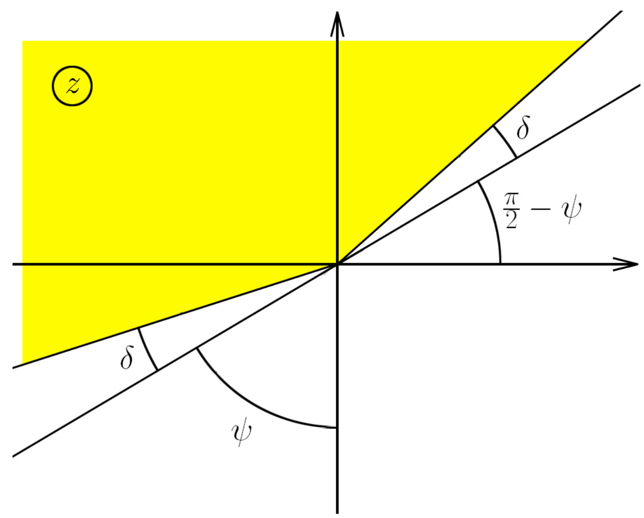

Рис. 7. Область значений z, для которых выполнено условие (28.17), выделена желтым цветом.

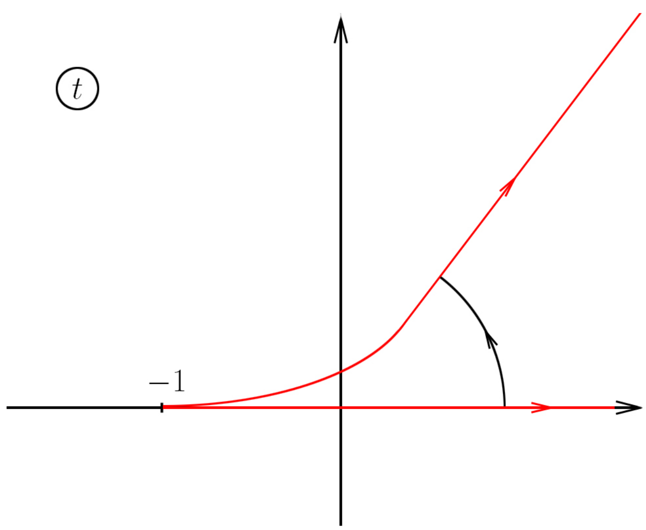

Рис. 8. Контур γ поворачивается на угол, равный углу раствора сектора D_+, см. рисунок 9.

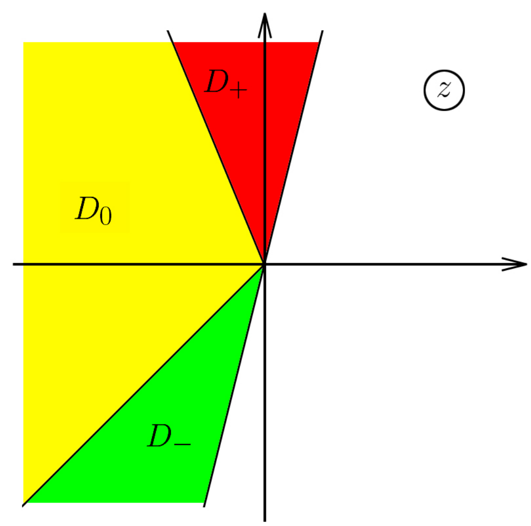

Рис. 9. Интеграл (28.14) сходится в $D_0 \cup D_-$ для исходного контура γ, в $D_0 \cup D_+$ для повернутого контура γ.

решение с изолированной *особой точкой в нуле (отметим, что для некоторых задач особенность может оказаться устранимой), во втором же случае решение будет содержать точку* ветвления *в точке ноль.*

Вычислим теперь интеграл (28.14). Пусть $z < 0$, тогда в качестве контура γ можно выбрать луч $[-1, +\infty)$. В результате решение уравнения можно записать в виде

$$W(z) = \int_{-1}^{+\infty} e^{zt}\, dt.$$

Последний интеграл легко вычисляется

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{zt}\, dt = \frac{1}{z}\, e^{zt}\Big|_{-1}^{+\infty} = -\frac{1}{z} e^{-z}. \ \square$$

Ответ: $W(z) = \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{zt}\, dt$, при $z < 0$; $W(z) = -\frac{1}{z} e^{-z}$.

Пример 28.5. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$2zW' - (1 + 2z)W = 0. \tag{28.18}$$

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt. \tag{28.19}$$

Подставляя (28.19) в уравнение (28.18), получим

$$2zW' - (1+2z)W = 2\int_{\gamma} tV(t)\, de^{zt} - \int_{\gamma} V(t)e^{zt}\, dt - 2\int_{\gamma} V(t)\, de^{zt} =$$

$$= -2\int_{\gamma} (tV(t))' e^{zt}\, dt - \int_{\gamma} V(t)e^{zt}\, dt + 2\int_{\gamma} V'(t)e^{zt}\, dt + 2(t-1)V(t)\, e^{zt}\Big|_{\gamma} =$$

$$= \int_{\gamma} \left[2(1-t)V'(t) - 3V\right] e^{zt}\, dt + 2(t-1)V(t)\, e^{zt}\Big|_{\gamma}.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$2(1-t)V'(t) - 3V = 0, \quad (t-1)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем $V(t) = (t-1)^{-\frac{3}{2}}$. Функция V имеет точку ветвления при $t = 1$. Это означает, что функция V может быть определена как регулярная функция только на плоскости с разрезом, выходящим из точки $t = 1$ и уходящим на бесконечность. Возьмем, например, в качестве такого разреза луч $\sigma = [1, +\infty)$.

Условие на контур γ принимает вид

$$(t-1)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = (t-1)^{-\frac{1}{2}} e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0. \tag{28.20}$$

Функция $(t-1)^{-\frac{1}{2}} e^{zt}$ нигде не обращается в ноль, поэтому оба конца контура необходимо увести на бесконечность. Так же как и в примере 28.3, направление, в котором можно уводить контур γ на бесконечность, зависит от параметра z. Будем считать, что $z > 0$, тогда контур γ можно выбрать как на рисунке 10. Для остальных z решение W уравнения (28.18) получается аналитическим продолжением интеграла (28.19), см. пример 28.3.

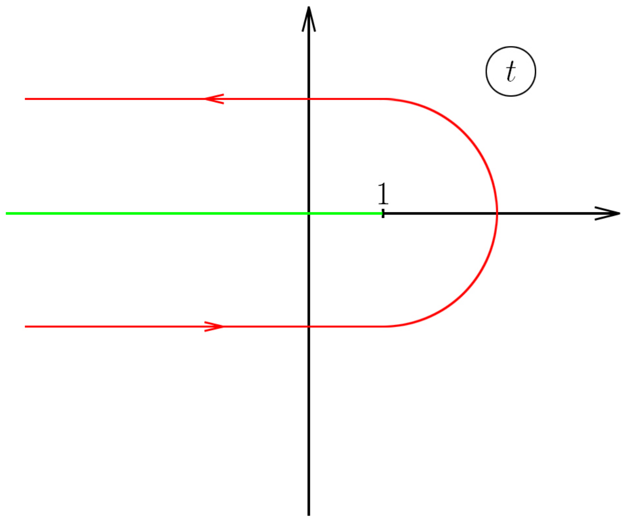

Рис. 10. Контур γ выделен красным цветом, разрез σ – зеленым.

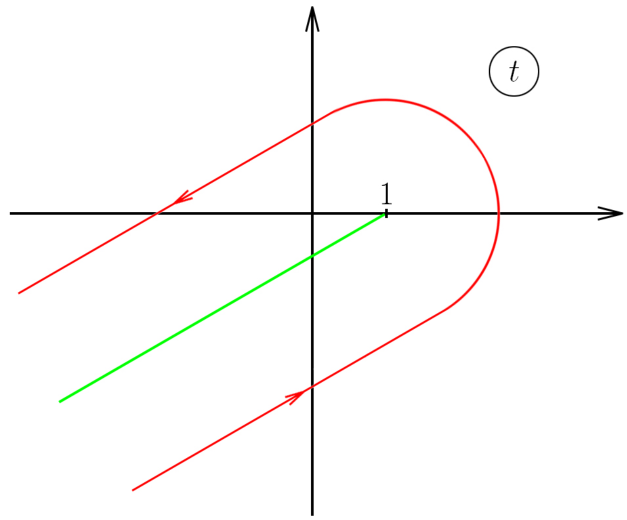

Рис. 11. Контур γ выделен красным цветом, разрез σ – зеленым.

Замечание 28.6. *Здесь есть небольшое отличие от примера* 28.3. *Оно заключается в том, что при повороте контура γ, необходимо также поворачивать разрез σ так, чтобы контур γ и разрез σ не пересекались, см. рисунок* 11. *Отметим еще раз, что поворот разреза σ соответствует аналитическому продолжению функции $V(t) = (t-1)^{-\frac{3}{2}}$, в то время как поворот контура γ осуществляется для аналитического продолжения решения $W(z)$.*

Вычислим теперь интеграл (28.19). Пусть $z > 0$, в качестве γ выбираем контур как на рисунке 10. В результате решение уравнения можно записать в виде

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} (t-1)^{-\frac{3}{2}} e^{zt}\, dt.$$

Последний интеграл легко вычисляется с помощью замены переменных $\zeta = z(t-1)$

$$\int\limits_{\gamma} (t-1)^{-\frac{3}{2}} e^{zt}\, dt = \sqrt{z} e^{z} \int\limits_{\gamma} \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{\zeta}\, d\zeta = C\sqrt{z} e^{z}, \quad C = \int\limits_{\gamma} \zeta^{-\frac{3}{2}} e^{\zeta}\, d\zeta.$$

Здесь постоянная C не зависит от z.

Обращаем внимание на то, что при замене $\zeta = z(t-1)$ контур γ, вообще говоря, растягивается и сдвигается. Однако, этот новый контур можно продеформировать обратно в контур γ. При этом, в силу регулярности подынтегральной функции в области деформации контура, значение интеграла не изменится. □

Ответ: $W(z) = \int\limits_{\gamma} (t-1)^{-\frac{3}{2}} e^{zt}\, dt$, при $z > 0$; $W(z) = C\sqrt{z} e^{z}$.

Пример 28.7. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' + W' = 0. \tag{28.21}$$

Вычислить одно из решений явно.

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t) e^{zt}\, dt. \tag{28.22}$$

Подставляя (28.22) в уравнение (28.21), получим

$$zW'' + W' = z \int\limits_{\gamma} t^2 V(t) e^{zt}\, dt + \int\limits_{\gamma} tV(t) e^{zt}\, dt = \int\limits_{\gamma} t^2 V(t)\, de^{zt} + \int\limits_{\gamma} tV(t) e^{zt}\, dt =$$

$$= -\int\limits_{\gamma} (t^2 V(t))' e^{zt}\, dt + \int\limits_{\gamma} tV(t) e^{zt}\, dt + t^2 V(t) e^{zt}\Big|_{\gamma} = -\int\limits_{\gamma} \left(t^2 V'(t) + tV(t)\right) e^{zt}\, dt + t^2 V(t) e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$tV'(t) + V(t) = 0, \quad t^2 V(t) e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем $V(t) = t^{-1}$.

Условие на контур γ принимает вид

$$tV(t) e^{zt}\Big|_{\gamma} = e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

В качестве γ_1 можно взять контур $|t| = 1$, который обходится против часовой стрелки. В результате одно из решений уравнения (28.21) можно записать в виде

$$W_1(z) = \oint\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i. \tag{28.23}$$

Заметим теперь, что не существует еще одного контура, приводящего к решению линейно независимого с W_1. $\square$

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t|=1} \frac{1}{t}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i$, второе линейно независимое решение не может быть найдено методом Лапласа.

Домашнее задание:

Задача 28.8. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$zW' - W = 0.$$

Вычислить полученный интеграл.

Ответ: $W(z) = \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{t^2} e^{zt}\, dt = 2\pi i z$.

Задача 28.9. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$zW' + (2 + z)W = 0.$$

Вычислить полученный интеграл.

Ответ: $W(z) = \int\limits_{-\infty}^{-1} (t+1) e^{zt}\, dt$, при $z > 0$; $W(z) = z^{-2} e^{-z}$.

Задача 28.10. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$2zW' + (3-4z)W = 0.$$

Вычислить полученный интеграл.

Ответ: $W(z) = \int\limits_{-\infty}^{2} \sqrt{2-t}\, e^{zt}\, dt$, при $z > 0$; $W(z) = Cz^{-\frac{3}{2}} e^{2z}$.

Задача 28.11. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' - (2+z)W' + W = 0.$$

Вычислить полученные интегралы.

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{e^{zt}}{t^2(t-1)^2}\, dt = 2\pi i(z+2)$, $W_2(z) = \oint\limits_{|t-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{zt}}{t^2(t-1)^2}\, dt = 2\pi i(z-2)e^z$.

Задача 28.12. *Найти интегральное представление для решения уравнения*

$$W' - e^{-z}W = 0.$$

Вычислить полученный интеграл.

Ответ: $W(z) = \int\limits_{\gamma} \Gamma(t) e^{zt}\, dt = 2\pi i\, e^{-e^{-z}}$, где $\Gamma(t)$ – Γ-функция и контур γ изображен на рисунке 10.

Задача 28.13. *Найти интегральное представление хотя бы для одного решения уравнения*

$$W'' - e^{-z}W = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{\gamma} \Gamma^2(t) e^{zt}\, dt$, где $\Gamma(t)$ – Γ-функция и контур γ изображен на рисунке 10.

29. Метод Лапласа для решения уравнений вида $W'' + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0$.

В этом разделе мы рассмотрим специальный случай уравнения (28.1)

$$W'' + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0.$$

Задачи на построение решений методом Лапласа для уравнений такого типа отличаются важной особенностью: контур интегрирования всегда можно выбрать так, чтобы сходимость интеграла не зависела от z (сравни с примером 28.5).

Пример 29.1. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$3W'' + zW = 0. \tag{29.1}$$

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_\gamma V(t)e^{zt}\,dt. \tag{29.2}$$

Подставляя (29.2) в уравнение (29.1), получим

$$3W'' + zW = \int\limits_\gamma 3t^2 V(t)e^{zt}\,dt + \int\limits_\gamma V(t)\,de^{zt} = \int\limits_\gamma 3t^2 V(t)e^{zt}\,dt - \int\limits_\gamma V'(t)e^{zt}\,dt + V(t)e^{zt}\big|_\gamma =$$
$$= \int\limits_\gamma \left(3t^2 V(t) - V'(t)\right) e^{zt}\,dt + V(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$V'(t) - 3t^2 V(t) = 0, \quad V(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем

$$\frac{dV}{V} = 3t^2\,dt \iff \int \frac{dV}{V} = 3\int t^2\,dt \iff \ln V = t^3 + C_1 \iff V(t) = Ce^{t^3}.$$

Как всегда, выбираем $C = 1$.

Условие на контур γ принимает вид

$$V(t)e^{zt}\big|_\gamma = e^{t^3+zt}\Big|_\gamma = 0. \tag{29.3}$$

Для любого замкнутого контура γ условие (29.3) всегда выполнено, однако, поскольку функция V регулярна во всей комплексной плоскости, то для всякого замкнутого контура γ интеграл (29.2) обращается в ноль. Таким образом, контур γ необходимо выбрать уходящим на бесконечность, причем обоими концами (поскольку функция e^{t^3+zt} нигде не обращается в ноль).

Функция e^{t^3+zt} быстрее всего убывает по t на бесконечности вблизи направлений, для которых $t^3 < 0$. Таких направлений три, см. рисунок 12,

$$t = -|t|, \quad t = e^{i\frac{\pi}{3}}|t|, \quad t = e^{-i\frac{\pi}{3}}|t|.$$

Можно выбрать три различных контура, уходящих на бесконечность обоими концами вдоль описанных направлений, см. рисунок 13. Отметим, что внутри желтой области ($\mathrm{Re}(t^3) \leqslant 0$), если не приближаться к границе, функция e^{t^3+zt} сверх-экспоненциально убывает. Поэтому внутри желтой области контуры γ_1, γ_2 и γ_3 можно произвольным образом деформировать и это не приведет к изменению значения интеграла (29.2).

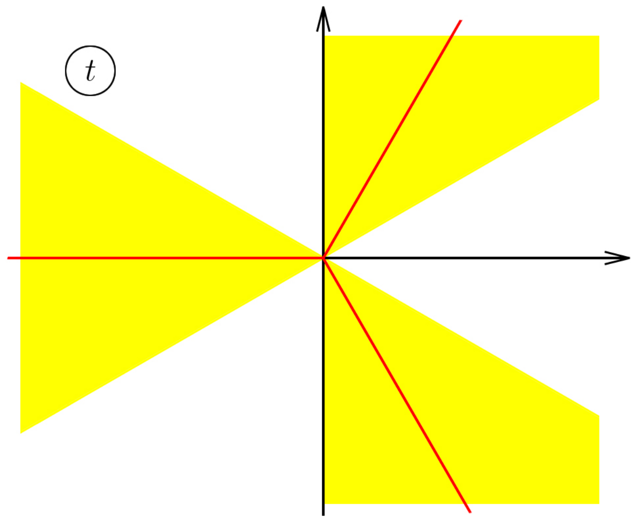

Рис. 12. Красным цветом выделены линии $t^3 \leqslant 0$, желтым цветом – область $\mathrm{Re}(t^3) \leqslant 0$.

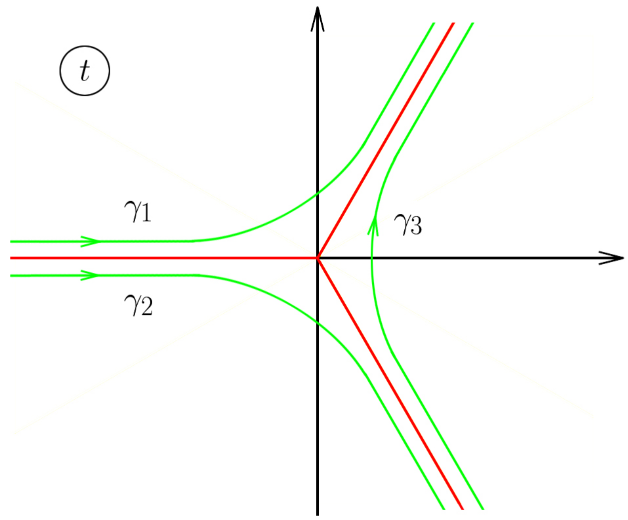

Рис. 13. Зеленым цветом выделены контуры γ_1, γ_2 и γ_3.

Таким образом, мы приходим к трем интегральным представлениям

$$W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} e^{t^3+zt}\,dt, \quad W_2(z) = \int\limits_{\gamma_2} e^{t^3+zt}\,dt, \quad W_3(z) = \int\limits_{\gamma_3} e^{t^3+zt}\,dt.$$

Обратим внимание на то, что мы получили *три* различных решения дифференциального уравнения *второго* порядка. Вместе с этим мы знаем, что линейно независимых решений может быть только два. Несложно увидеть, что

$$W_1(z) - W_2(z) = W_3(z).$$

Отметим также, что общее решение уравнения (29.1) можно записать, например, в виде

$$W(z) = AW_1(z) + BW_3(z),$$

где A и B – произвольные постоянные.

Для уравнения второго порядка в ответ предполагается выписывать любые два линейно независимые решения. В этой задаче мы можем выбрать в качестве ответа любые два решения из трех W_1, W_2 и W_3. $\square$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} e^{t^3+zt}\,dt$, $W_3(z) = \int\limits_{\gamma_3} e^{t^3+zt}\,dt$.

Пример 29.2. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$2W'' + zW' - W = 0. \tag{29.4}$$

Вычислить один из полученных интегралов.

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt. \tag{29.5}$$

Подставляя (29.5) в уравнение (29.4), получим

$$2W'' + zW' - W = \int\limits_\gamma 2t^2 V(t) e^{zt}\, dt + \int\limits_\gamma tV(t)\, de^{zt} - \int\limits_\gamma V(t) e^{zt}\, dt =$$
$$= \int\limits_\gamma (2t^2-1)V(t)e^{zt}\, dt - \int\limits_\gamma (tV(t))' e^{zt}\, dt + tV(t)e^{zt}\big|_\gamma =$$
$$= \int\limits_\gamma \big((2t^2-2)V(t) - tV'(t)\big)\, e^{zt}\, dt + tV(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$(2t^2-2)V(t) - tV'(t) = 0, \quad tV(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем

$$V(t) = \frac{1}{t^2} e^{t^2}.$$

Условие на контур γ принимает вид

$$tV(t)e^{zt}\big|_\gamma = \frac{1}{t} e^{t^2+zt}\bigg|_\gamma = 0.$$

Функция $t^{-1}e^{t^2+zt}$ быстрее всего убывает по t на бесконечности вблизи направлений, для которых $t^2 < 0$. Таких направлений два $t = i|t|$ и $t = -i|t|$. Соответственно, выберем контур γ_1 как на рисунке 14. Обратим внимание на то, что контур γ_1 не должен проходить через точку $t = 0$, поскольку в этой точке функция V имеет полюс. Тот факт, что у функции V в точке $t = 0$

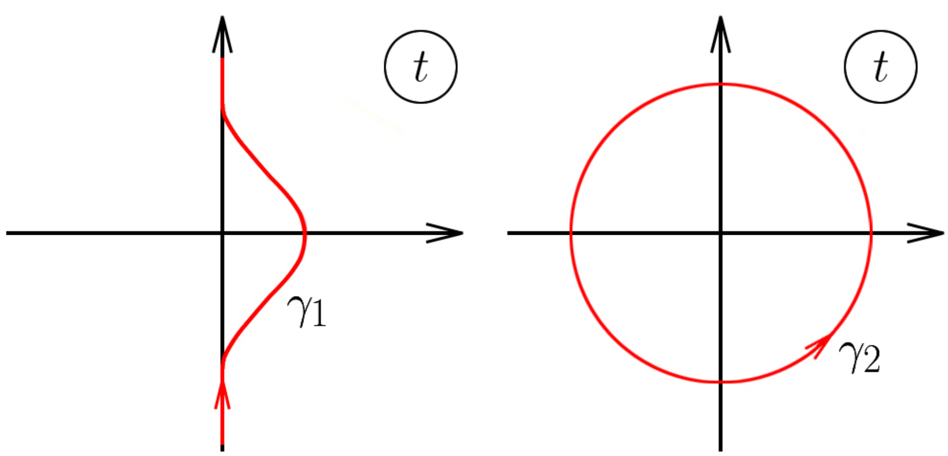

Рис. 14. Контуры γ_1 и γ_2 выделены красным цветом.

полюс, позволяет нам выбрать второй контур γ_2 замкнутым и охватывающим точку $t = 0$, см. рисунок 14.

Таким образом, мы приходим к двум интегральным представлениям

$$W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{t^2} e^{t^2+zt}\, dt, \quad W_2(z) = \int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{t^2} e^{t^2+zt}\, dt.$$

Интеграл по контуру γ_2 легко вычисляется по вычетам

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{t^2} e^{t^2+zt}\,dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0} \left(\frac{1}{t^2} e^{t^2+zt} \right) = 2\pi i \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{t^2+zt} \right)\Big|_{t=0} = 2\pi i\, z. \ \square$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{t^2} e^{t^2+zt}\,dt$, $W_2(z) = \int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{t^2} e^{t^2+zt}\,dt = 2\pi i\, z$.

Домашнее задание:

Задача 29.3. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$W'' - zW' - W = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2+zt}\,dt$, $W_2(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2+zt}\,dt$.

Задача 29.4. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$W'' + 2zW' + W = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{\frac{1}{4}t^2+zt}\,dt$, $W_2(z) = \int\limits_0^{+i\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{\frac{1}{4}t^2+zt}\,dt$, где контур γ_1 выбирается как на рисунке 14, стр. 97.

Задача 29.5. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$3W'' + 2W' + zW = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} e^{t^3+t^2+zt}\,dt$, $W_2(z) = \int\limits_{\gamma_2} e^{t^3+t^2+zt}\,dt$, где контуры γ_1 и γ_2 выбираются как на рисунке 13, стр. 96.

Задача 29.6. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$2W'' - zW' - zW = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{|t+1|=1} \frac{1}{(t+1)^3}\, e^{-t^2+2t+zt}\,dt$, $W_2(z) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{(t+1)^3}\, e^{-t^2+2t+zt}\,dt$, где контур γ_1 выбирается как на рисунке 15, стр. 99.

Задача 29.7. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$W'' - 2zW' + W = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{\gamma_1} t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{4}t^2+zt}\,dt$, $W_2(z) = \int\limits_{\gamma_2} t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{4}t^2+zt}\,dt$, где контуры интегрирования γ_1 и γ_2 изображены на рисунках 15 и 16.

Задача 29.8. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$2W''' + (z-2)W'' - zW' = 0.$$

Вычислить два из трех полученных интегралов.

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)} e^{-t^2+zt}\,dt = -2\pi i$, $W_2(z) = \int\limits_{|t-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)} e^{-t^2+zt}\,dt = 2\pi i e^{z-1}$, $W_3(z) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{t(t-1)} e^{-t^2+zt}\,dt$, где контур интегрирования γ_1 изображен на рисунке 15.

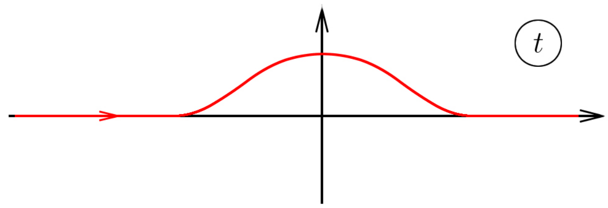

Рис. 15. Контур γ_1 выделен красным цветом.

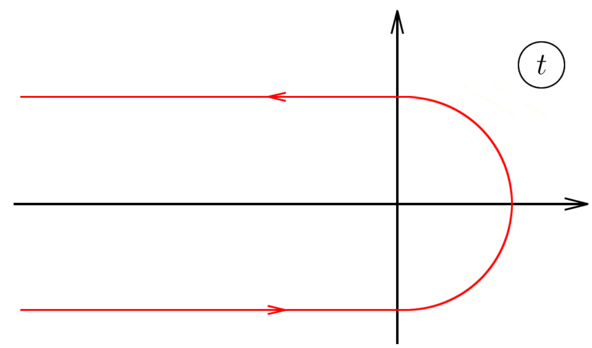

Рис. 16. Контур γ_2 выделен красным цветом.

30. **Метод Лапласа для решения уравнений вида $zW'' + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0$.**

В этом разделе мы рассмотрим специальный случай уравнения (28.1)

$$zW'' + (a_1 + b_1 z)W' + (a_0 + b_0 z)W = 0.$$

Задачи на построение решений методом Лапласа для уравнений такого типа отличаются важной особенностью: если контур интегрирования выбирается уходящим на бесконечность, то сходимость интеграла будет зависеть от параметра z (см. пример 28.5).

Пример 30.1. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' - (1 + z)W' = 0. \tag{30.1}$$

Вычислить полученные интегралы.

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} V(t)e^{zt}\,dt. \tag{30.2}$$

Подставляя (30.2) в уравнение (30.1), получим

$$\begin{aligned} zW'' - (1+z)W' &= \int\limits_{\gamma} t^2 V(t)\,de^{zt} - \int\limits_{\gamma} tV(t)e^{zt}\,dt - \int\limits_{\gamma} tV(t)\,de^{zt} = \\ &= -\int\limits_{\gamma} (t^2V(t))'e^{zt}\,dt - \int\limits_{\gamma} tV(t)e^{zt}\,dt + \int\limits_{\gamma} (tV(t))'e^{zt}\,dt + (t^2 - t)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = \\ &= \int\limits_{\gamma} \left[(t - t^2)V'(t) + (1 - 3t)V(t)\right] e^{zt}\,dt + (t^2 - t)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$(t - t^2)V'(t) + (1 - 3t)V(t) = 0, \quad t(t-1)V(t)e^{zt}\Big|_{\gamma} = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем

$$V(t) = \frac{1}{t(t-1)^2}.$$

Условие на контур γ принимает вид

$$t(t-1)V(t)e^{zt}\big|_\gamma = \left.\frac{1}{(t-1)}\, e^{zt}\right|_\gamma = 0.$$

Можно выбрать два замкнутых контура $\gamma_1 = \left\{t : |t| = \frac{1}{2}\right\}$ и $\gamma_2 = \left\{t : |t-1| = \frac{1}{2}\right\}$.

Таким образом, мы приходим к двум интегральным представлениям

$$W_1(z) = \oint\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\, dt, \quad W_2(z) = \oint\limits_{|t-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\, dt.$$

Оба интеграла легко берутся по вычетам

$$\oint\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=0}\left(\frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\right) = 2\pi i,$$

$$\oint\limits_{|t-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=1}\left(\frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\right) = 2\pi i(z-1)e^z.$$

Отметим, что общее решение уравнения (30.1) можно записать в виде

$$W(z) = A + B(z-1)e^z,$$

где A и B – произвольные постоянные. □

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i$, $W_2(z) = \oint\limits_{|t-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t-1)^2}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i(z-1)e^z$.

Пример 30.2. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' + 2zW' + (z+1)W = 0. \tag{30.3}$$

Решение. Ищем решение в виде

$$W(z) = \int\limits_\gamma V(t)e^{zt}\, dt. \tag{30.4}$$

Подставляя (30.4) в уравнение (30.3), получим

$$zW'' + 2zW' + (z+1)W = \int\limits_\gamma t^2V(t)\, de^{zt} + 2\int\limits_\gamma tV(t)\, de^{zt} + \int\limits_\gamma V(t)\, de^{zt} + \int\limits_\gamma V(t)e^{zt}\, dt =$$

$$= -\int\limits_\gamma (t^2V(t))'e^{zt}\, dt - 2\int\limits_\gamma (tV(t))'e^{zt}\, dt - \int\limits_\gamma V'(t)e^{zt}\, dt + \int\limits_\gamma V(t)e^{zt}\, dt + (t+1)^2V(t)e^{zt}\big|_\gamma =$$

$$= \int\limits_\gamma \left[-(t+1)^2V'(t) - (1+2t)V(t)\right] e^{zt}\, dt + (t+1)^2V(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Отсюда находим уравнения на V и контур γ

$$(t+1)^2V'(t) + (1+2t)V(t) = 0, \quad (t+1)^2V(t)e^{zt}\big|_\gamma = 0.$$

Интегрируя уравнение на V, найдем

$$V(t) = \frac{1}{(t+1)^2}\, e^{-\frac{1}{t+1}}.$$

Условие на контур γ принимает вид

$$(t+1)^2 V(t) e^{zt}\Big|_\gamma = e^{-\frac{1}{t+1}}\, e^{zt}\Big|_\gamma = 0.$$

Можно выбрать один замкнутый контур $\gamma_1 = \{t : |t+1| = 1\}$. В качестве второго контура возьмем $\gamma_2 = (-1, +\infty)$ при $z < 0$, для остальных z решение может быть аналитически продолжено способом, описанном в примере 28.5. Сходимость интеграла (30.4) для контура γ_2 достигается за счет экспоненциального убывания функции $e^{-\frac{1}{t+1}}$ при $t \to -1 + 0$. $\square$

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t+1|=1} \frac{1}{(t+1)^2}\, e^{-\frac{1}{t+1}}\, e^{zt}\, dt$, $W_2(z) = \int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\, e^{-\frac{1}{t+1}}\, e^{zt}\, dt$.

Пример 30.3. *Придумать максимальное число контуров γ, которые бы приводили к линейно независимым функциям W, представимых в виде*

$$W(z) = \int\limits_\gamma t\, e^{zt}\, dt, \qquad (t^2-1) e^{zt}\Big|_\gamma = 0.$$

Решение. Подынтегральная функция регулярна, а значит любой замкнутый контур приведет нас к тривиальной функции W. Следовательно контур должен начинаться и заканчиваться в точках, в которых обращается в ноль выражение $(t^2-1)e^{zt}$. Будем предполагать, что $z > 0$, тогда таких точек три -1, 1 и $-\infty$. Таким образом, можно выбрать только два контура, удовлетворяющих условию задачи. Например, можно взять $\gamma_1 = (-1, 1)$ и $\gamma_2 = (-\infty, -1]$ при $z > 0$. $\square$

Ответ: $\gamma_1 = (-1, 1)$ и $\gamma_2 = (-\infty, -1)$ при $z > 0$.

Пример 30.4. *Найти асимптотическое поведение решений уравнения*

$$zW'' + (3 - iz)W' - iW = 0 \tag{30.5}$$

при $z \to +\infty$.

Решение. Используя метод Лапласа, см. стр. 99, найдем интегральные представления для решений уравнения (30.5)

$$W_1(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} (t - i)\, e^{zt}\, dt, \qquad W_2(z) = \int\limits_{0}^{i} (t - i)\, e^{zt}\, dt.$$

Асимптотическое поведение решения W_1 найдем с помощью метода Лапласа

$$W_1(z) = -\frac{i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \text{ при } z \to +\infty.$$

Асимптотическое поведение решения W_2 найдем с помощью метода стационарной фазы

$$W_2(z) = \int\limits_0^i (t-i)\, e^{zt}\, dt = (t = ix) = \int\limits_0^1 (1-x)\, e^{izx}\, dx = \frac{i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \text{ при } z \to +\infty. \ \square$$

Замечание 30.5. *Из полученных асимптотик может показаться, что решения W_1 и W_2 линейно зависимы. Тем не менее, если найти следующие члены асимптотического ряда для W_1 и W_2, можно убедиться, что эти решения линейно независимы.*

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} (t-i)\, e^{zt}\, dt = -\frac{i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, $W_2(z) = \int\limits_{0}^{i} (t-i)\, e^{zt}\, dt = \frac{i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to +\infty$.

Домашнее задание:

Задача 30.6. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' - W' - (1+z)W = 0.$$

Вычислить полученные интегралы.

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t-1|=1} \frac{e^{zt}}{(t+1)(t-1)^2}\, dt = \frac{\pi i}{2}(2z-1)e^z$, $W_2(z) = \oint\limits_{|t+1|=1} \frac{e^{zt}}{(t+1)(t-1)^2}\, dt = \frac{\pi i}{2}\, e^{-z}$.

Задача 30.7. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$2zW'' - (2z+1)W' + 2W = 0.$$

Вычислить один из полученных интегралов.

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2\sqrt{t-1}}\, e^{zt}\, dt = \pm\pi(2z+1)$; $W_2(z) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{t-1}}\, e^{zt}\, dt$, при $z < 0$.

Задача 30.8. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' + (2z+1)W' - 2W = 0.$$

Вычислить один из полученных интегралов.

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t|=1} \frac{t+2}{t^2}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i(2z+1)$; $W_2(z) = \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{t+2}{t^2}\, e^{zt}\, dt$, при $z > 0$.

Задача 30.9. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$2zW'' + (2-2z)W' - 3W = 0.$$

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{\frac{t}{(t-1)^3}}\, e^{zt}\, dt$, при $z > 0$; $W_2(z) = \int\limits_{\gamma_2} \sqrt{\frac{t}{(t-1)^3}}\, e^{zt}\, dt$, при $z > 0$, где контур γ_2 выбирается как на рисунке 10, стр. 92.

Задача 30.10. *Найти интегральные представления для решений уравнения*

$$zW'' + (1+2z)W' + (1+z)W = 0.$$

Вычислить одно из решений явно.

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{|t+1|=1} \frac{1}{t+1}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i e^{-z}$, второе линейно независимое решение не может быть найдено методом Лапласа.

Задача 30.11. *Придумать максимальное число контуров* γ, *которые бы приводили к линейно независимым функциям* W, *удовлетворяющим условиям*

$$W(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{t-5}\, e^{zt}\, dt, \qquad \frac{t-1}{t-3}\, e^{zt}\bigg|_{\gamma} = 0.$$

Ответ: $\gamma_1 = \{t : |t-5| = 1\}$ и $\gamma_2 = (-\infty, 1)$ при $z > 0$.

Задача 30.12. *Найти асимптотическое поведение решений уравнения*

$$W'' - zW' - W = 0$$

при $z \to +\infty$.

Ответ: $W_1(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2+zt}\, dt = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, $W_2(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2+zt}\, dt = \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{2}z^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$ при $z \to +\infty$.

31. Задача Штурма-Лиувилля на отрезке (самостоятельно).

В этом разделе мы напомним основные свойства задачи Штурма-Лиувилля для уравнения вида $-u'' = \lambda u$.

Определение 31.1. *Задачей Штурма-Лиувилля называется задача об определении всех параметров λ таких, что на промежутке $[a, b]$ существует нетривиальное (ненулевое) решение уравнения*

$$-u''(x) = \lambda u(x), \tag{31.1}$$

удовлетворяющее краевым условиям вида

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{cases} \tag{31.2}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2$.

Определение 31.2. *Значение параметра λ, при котором задача (31.1) – (31.2) имеет нетривиальное решение, называется собственным значением (числом) этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.*

Теорема 31.3. *Задача Штурма-Лиувилля (31.1) – (31.2) обладает следующими свойствами.*

(1) *Существует бесконечный (счетный) набор собственных значений. При этом все собственные значения вещественны.*
(2) *Собственные значения можно пронумеровать так, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \cdots$. При этом собственные значения накапливаются на плюс бесконечности.*
(3) *Каждому собственному значению λ_k соответствует одна собственная функция u_k, определенная с точностью до произвольного постоянного множителя.*
(4) *Линейно независимые собственные функции попарно ортогональны относительно скалярного произведения*[5] *в пространстве $L_2(a, b)$, т. е.*

$$(u_k, u_p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u_k(x)\overline{u_p(x)}\,dx = 0, \text{ при } k \neq p.$$

(5) *Набор, составленный из всех линейно независимых собственных функций, образует ортогональный базис в пространстве $L_2(a, b)$.*

Пример 31.4. *Решить задачу Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \tag{31.3}$$

$$u(0) = u(\pi) = 0. \tag{31.4}$$

Решение. Уравнение (31.3) имеет постоянные коэффициенты и при $\lambda \neq 0$ его решения можно искать в виде $e^{\alpha x}$.

Подставляя $e^{\alpha x}$ в (31.3), получим уравнение на α

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \iff \alpha = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

В итоге общее решение уравнения (31.3) при $\lambda \neq 0$ можно записать в виде

$$u(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}. \tag{31.5}$$

---

[5] В пространстве $L_2(a, b)$ определено скалярное произведение $(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b u(x)\overline{v(x)}\,dx$.

Используя формулы Эйлера[6], удобно переписать выражение (31.5) через sin и cos

$$u(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + B\cos(\sqrt{\lambda}\,x). \tag{31.6}$$

Подставим теперь (31.6) в краевые условия (31.4)

$$\begin{cases} A\sin(\sqrt{\lambda}\,0) + B\cos(\sqrt{\lambda}\,0) = 0, \\ A\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) + B\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0, \\ A\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим уравнение на собственные числа[7]

$$\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \iff \sqrt{\lambda_n}\,\pi = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff \lambda_n = n^2,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что собственные числа отвечающие $n = 1, 2, \ldots$ и $n = -1, -2, \ldots$ совпадают, т. е. $\lambda_1 = \lambda_{-1}, \ldots$. Поэтому мы будем считать, что $n \in \mathbb{N}$ (мы также отбросили $n = 0$, потому что это соответствует $\lambda = 0$).

Для каждого λ_n собственную функцию найдем по формуле (31.6)

$$u_n(x) = A\sin(nx),\ n \in \mathbb{N}.$$

Постоянную A удобно выбрать равной единице[8].

Осталось рассмотреть случай $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (31.3) имеет вид

$$u(x) = A + Bx. \tag{31.7}$$

Подставляя (31.7) в краевые условия (31.4), найдем, что $A = 0$ и $B = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением. $\square$

Ответ: $\lambda_n = n^2$, $u_n(x) = \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 31.5. *Решить задачу Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \tag{31.8}$$

$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{31.9}$$

Решение. Подставляя $e^{\alpha x}$ в (31.8), получим уравнение на α

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \iff \alpha = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Общее решение уравнения (31.8) при $\lambda \neq 0$ можно записать в виде

$$u(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\,x}. \tag{31.10}$$

Удобно переписать выражение (31.10) через sin и cos

$$u(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + B\cos(\sqrt{\lambda}\,x). \tag{31.11}$$

Подставим (31.11) в краевые условия (31.9)

$$\begin{cases} A\sqrt{\lambda} = 0, \\ A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) - B\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим уравнение на собственные числа

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \iff \sqrt{\lambda_n} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff \lambda_n = (\pi n)^2,\ n \in \mathbb{Z}.$$

[6]Формулы Эйлера имеют вид $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ при $\varphi \in \mathbb{C}$.

[7]Постоянная A не может обращаться в ноль, иначе мы получим тривиальное решение задачи (31.3) – (31.4).

[8]Иногда удобно выбирать эту постоянную так, чтобы собственная функция удовлетворяла условию $\|u_n\| = 1$, где $\|u\|^2 = (u, u)$. Однако мы предпочитаем, чтобы собственная функция имела простую форму записи.

По тем же причинам, что и в примере 31.4 нулевое и отрицательные n отбрасываем и считаем, что $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого λ_n собственную функцию найдем по формуле (31.11)

$$u_n(x) = B\cos(\pi n x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Постоянную B выбираем равной единице.

Осталось рассмотреть случай $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (31.8) имеет вид

$$u(x) = A + Bx. \tag{31.12}$$

Подставляя (31.12) в краевые условия (31.9), найдем, что $B = 0$ и $u(x) = A$ – решение задачи Штурма-Лиувилля при $\lambda = 0$. Постоянную A выбираем равной единице. Таким образом, $\lambda = 0$ является собственным значением и собственная функция $u_0(x) = 1$. $\square$

Ответ: $\lambda_n = n^2$, $u_n(x) = \cos(\pi n x)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Пример 31.6. *Решить задачу Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \tag{31.13}$$

$$u(-1) = u'(2) = 0. \tag{31.14}$$

Решение. Как и ранее общее решение уравнения (31.13) при $\lambda \neq 0$ можно записать в виде

$$u(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}\,x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\,x}. \tag{31.15}$$

Удобно переписать выражение (31.15) в виде

$$u(x) = D_1 e^{i\sqrt{\lambda}\,(x+1)} + D_2 e^{-i\sqrt{\lambda}\,(x+1)}. \tag{31.16}$$

И *только теперь* переписать выражение (31.15) через sin и cos

$$u(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda}(x+1)\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda}(x+1)\right). \tag{31.17}$$

Подставим (31.17) в краевые условия (31.14) (*за счет специального выбора записи* (31.17) *решения* $u(x)$ *уравнение на* λ *принимает максимально простой вид*)

$$\begin{cases} B = 0, \\ A\sqrt{\lambda}\cos(3\sqrt{\lambda}) - B\sqrt{\lambda}\sin(3\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ \cos(3\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим уравнение на собственные числа

$$\cos(3\sqrt{\lambda}) = 0 \Longleftrightarrow 3\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{36},\ n \in \mathbb{Z}.$$

По тем же причинам, что и в примере 31.4 отрицательные n отбрасываем и считаем, что $n = 0, 1, \ldots$.

Для каждого λ_n собственную функцию найдем по формуле (31.17)

$$u_n(x) = A\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{6}(x+1)\right),\ n = 0, 1, \ldots.$$

Постоянную A выбираем равной единице.

Осталось рассмотреть случай $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (31.13) имеет вид

$$u(x) = A + Bx. \tag{31.18}$$

Подставляя (31.18) в краевые условия (31.14), найдем, что $A = 0$ и $B = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением. $\square$

Ответ: $\lambda_n = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{36}$, $u_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{6}(x+1)\right)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Пример 31.7. *Разложить функцию $f(x) = 1$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* (31.3) – (31.4).

Решение. Собственные функции задачи (31.3) – (31.4) имеют вид $u_n(x) = \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 31.3 функции u_n образуют базис в пространстве $L_2(0, \pi)$, поэтому существуют такие постоянные f_n, что[9]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x). \tag{31.19}$$

Для того, чтобы найти f_n, домножим скалярно левую и правую части (31.19) на u_p и используем свойство ортогональности собственных функций, см. теорему 31.3

$$(f, u_p) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n, u_p \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n (u_n, u_p) = f_p (u_p, u_p).$$

Отсюда

$$f_p = \frac{(f, u_p)}{(u_p, u_p)}\,,$$
$$(u_p, u_p) = \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2nx)\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$(f, u_p) = \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n}\,. \ \square$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(nx)$.

Домашнее задание:

Задача 31.8. *Решить задачу Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u'(\pi/2) = 0.$$

Ответ: $\lambda_n = (2n-1)^2$, $u_n(x) = \sin\left((2n-1)x\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 31.9. *Решить задачу Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \quad u'(-\pi) = u'(\pi) = 0.$$

Ответ: $\lambda_n = n^2/4$, $u_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}(x+\pi)\right)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Задача 31.10. *Решить задачу Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \quad u'(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$$

Ответ: $\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$, $u_n(x) = \cos\left((n - \frac{1}{2})(x + \pi/2)\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 31.11. *Разложить функцию $f(x) = 1$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля*

$$-u'' = \lambda u, \quad u'(0) = u(\pi/2) = 0.$$

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)} \cos\left((2n+1)x\right)$.

[9] Мы здесь не обсуждаем в каком смысле понимать сходимость ряда (31.19).

32. 10-ая контрольная работа (задача: 10; 20 минут).

Вариант контрольной работы №10.

Задача 10. Найти интегральные представления для решений уравнения

$$zW'' - (z+1)W' + W = 0.$$

Вычислить полученные интегралы.

Ответ:

$$W_1(z) = \oint\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2(t-1)}\, e^{zt}\, dt = -2\pi i\,(z+1),$$

$$W_2(z) = \oint\limits_{|t-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2(t-1)}\, e^{zt}\, dt = 2\pi i\, e^{z}.$$

Вариант контрольной работы №10.

Задача 10. Найти интегральные представления для решений уравнения

$$4W'' + zW' - 2W = 0.$$

Вычислить один из полученных интегралов.

Ответ: $W_1(z) = \oint\limits_{|t|=1} \frac{1}{t^3}\, e^{2t^2+zt}\, dt = \pi i(4+z^2)$, $W_2(z) = \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{t^3}\, e^{2t^2+zt}\, dt$, где контур γ_1 выбирается как на рисунке 14, стр. 97.

33. Оператор Лапласа в прямоугольной области.

Определение 33.1. *Спектральной задачей для оператора Лапласа в прямоугольнике называется задача об определении всех параметров λ таких, что в прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$ существует нетривиальное решение уравнения*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{33.1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u + \beta_3 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u + \beta_4 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{33.2}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1,2,3,4$ и ∂_n – производная по внешней нормали.

Определение 33.2. *Значение параметра λ, при котором задача* (33.1) – (33.2) *имеет нетривиальное решение, называется собственным значением (числом) этой задачи, а соответствующее решение называется собственной функцией.*

Теорема 33.3. *Задача* (33.1) – (33.2) *обладает следующими свойствами.*

(1) *Существует бесконечный (счетный) набор собственных значений. При этом все собственные значения вещественные числа.*
(2) *Собственные значения можно пронумеровать так, что $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$. При этом собственные значения накапливаются на плюс бесконечности.*
(3) *Каждому собственному значению λ_k соответствует одна* или более *линейно независимых собственных функций u_k.*
(4) *Линейно независимые собственные функции попарно ортогональны относительно скалярного произведения в пространстве $L_2((a,b) \times (c,d))$, т. е.*

$$(u_k, u_p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dx \int_c^d dy\ u_k(x,y)\overline{u_p(x,y)} = 0, \text{ при } k \neq p.$$

(5) *Набор, составленный из всех линейно независимых собственных функций, образует базис в пространстве $L_2((a,b) \times (c,d))$.*

Для решения задачи (33.1) – (33.2) применяют метод разделения переменных. Изложим идею этого метода на следующем примере.

Пример 33.4. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \tag{33.3}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{33.4}$$

Решение. Будем искать решение уравнения (33.3) в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{33.5}$$

Подставляя (33.5) в уравнение (33.3), получим

$$-X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y).$$

Отсюда, поделив на $X(x)Y(y)$, найдем

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda. \tag{33.6}$$

Поскольку левая часть в равенстве (33.6) зависит только от переменной x, а правая только от y, то оба отношения равны некоторой постоянной, обозначим ее μ. В результате, уравнения на функции X и Y разделились

$$-X''(x) = \mu X(x), \tag{33.7}$$

$$-Y''(y) = \nu Y(y), \quad \text{где} \quad \nu = \lambda - \mu. \tag{33.8}$$

Подставляя (33.5) в краевые условия (33.4), получим

$$\begin{cases} X(0)Y(y) = 0 & \text{при} \quad y \in [0, \pi], \\ X(\pi)Y(y) = 0 & \text{при} \quad y \in [0, \pi], \\ X(x)Y(0) = 0 & \text{при} \quad x \in [0, \pi], \\ X(x)Y(\pi) = 0 & \text{при} \quad x \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{33.9}$$

Напомним, что мы ищем нетривиальные решения задачи (33.3) – (33.4), поэтому мы должны предполагать, что функции $X(x)$ и $Y(y)$ не являются тождественно равными нулю. Отсюда и из (33.9) следует, что

$$X(0) = X(\pi) = 0, \tag{33.10}$$

$$Y(0) = Y(\pi) = 0. \tag{33.11}$$

Собирая уравнения (33.7) – (33.8) и краевые условия (33.10) – (33.11) вместе, получим две задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \tag{33.12}$$

$$\begin{cases} -Y''(y) = \nu Y(y), \\ Y(0) = Y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{33.13}$$

где параметры ν и μ связаны соотношением $\lambda = \nu + \mu$. Собственные функции и собственные значения задач (33.12) и (33.13) имеют вид, см. пример 31.4 на стр. 104,

$$X_n(x) = \sin(nx), \ \mu_n = n^2, \ n \in \mathbb{N}, \tag{33.14}$$

$$Y_p(y) = \sin(py), \ \nu_p = p^2, \ p \in \mathbb{N}. \tag{33.15}$$

Подставляя (33.14), (33.15) в (33.5), найдем собственные функции и собственные значения задачи (33.3) – (33.4)

$$u_{np}(x, y) = X_n(x)Y_p(y) = \sin(nx)\sin(py), \quad \lambda_{np} = \mu_n + \nu_p = n^2 + p^2, \quad n \in \mathbb{N}, \ p \in \mathbb{N}.$$

До сих пор мы никак не обсуждали почему все собственные функции задачи (33.3) – (33.4) можно найти в виде (33.5). Из теоремы 33.3 следует, что для того, чтобы доказать это, нам достаточно показать, что собственные функции u_{np} образуют базис в пространстве $L_2\left((0, \pi) \times (0, \pi)\right)$.

Докажем, что набор функций u_{np} образуют базис в $L_2\left((0, \pi) \times (0, \pi)\right)$.[10] Для этого, нам достаточно показать, что любая функция f из пространства $L_2\left((0, \pi) \times (0, \pi)\right)$ может быть разложена в ряд Фурье по функциям u_{np}.

[10]Мы обозначим основную идею доказательства, не проводя строгих рассуждений. Мы также не будем останавливаться на том в каком смысле понимать сходимость соответствующих рядов.

Фиксируем переменную y и будем рассматривать $f(x,y)$ как функцию от x. В силу теоремы 31.3 эта функция может быть разложена по собственным функциям X_n задачи Штурма-Лиувилля (33.12), т. е. существуют такие $c_n(y)$, что

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) X_n(x). \tag{33.16}$$

Аналогично функции $c_n(y)$ могут быть разложены по собственным функциям Y_p задачи Штурма-Лиувилля (33.13)

$$c_n(y) = \sum_{p=1}^{\infty} f_{np} Y_p(y). \tag{33.17}$$

Подставляя (33.17) в (33.16), получим

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f_{np} X_n(x) Y_p(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f_{np} u_{np}(x,y).$$

Таким образом, мы разложили произвольную функцию f в ряд Фурье по функциям u_{np}. □

Ответ: $\lambda_{np} = n^2 + p^2$, $u_{np}(x,y) = \sin(nx)\sin(py)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

Пример 33.5. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \tag{33.18}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = -\pi, \ y \in [0, \pi/2], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \quad y \in [0, \pi/2], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi/2, \ x \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{33.19}$$

Решение. Ищем решение уравнения (33.18) в виде

$$u(x,y) = X(x) Y(y). \tag{33.20}$$

Подставляя (33.20) в уравнение (33.18), получим

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = \mu, \tag{33.21}$$

где μ – некоторая постоянная. В результате уравнения на функции X и Y разделились

$$-X''(x) = \mu X(x), \tag{33.22}$$

$$-Y''(y) = \nu Y(y), \tag{33.23}$$

где $\nu = \lambda - \mu$.

Подставляя (33.20) в краевые условия (33.19), получим

$$X(-\pi) = X(\pi) = 0, \tag{33.24}$$

$$Y'(0) = Y(\pi/2) = 0. \tag{33.25}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\partial_n = -\partial_y$ на нижней границе прямоугольника $y = 0$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Собирая уравнения (33.22) – (33.23) и краевые условия (33.24) – (33.25) вместе, получим две задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x), \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0, \end{cases} \tag{33.26}$$

$$\begin{cases} -Y''(y) = \nu Y(y), \\ Y'(0) = Y(\pi/2) = 0, \end{cases} \qquad \lambda = \nu + \mu. \tag{33.27}$$

Собственные функции и собственные значения задач (33.26) и (33.27) имеют вид

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}(x+\pi)\right),\ \mu_n = \frac{n^2}{4},\ n \in \mathbb{N}, \tag{33.28}$$

$$Y_p(y) = \cos((2p+1)y),\ \nu_p = (2p+1)^2,\ p = 0, 1, \ldots. \tag{33.29}$$

Подставляя (33.28) и (33.29) в (33.20), найдем собственные функции и собственные значения задачи (33.18) – (33.19)

$$u_{np}(x,y) = X_n(x)Y_p(y) = \sin\left(\frac{n}{2}(x+\pi)\right)\cos((2p+1)y),$$

$$\lambda_{np} = \mu_n + \nu_p = \frac{n^2}{4} + (2p+1)^2, \quad n \in \mathbb{N},\ p = 0, 1, \ldots. \ \square$$

Ответ: $\lambda_{np} = \frac{n^2}{4} + (2p+1)^2$, $u_{np}(x,y) = \sin\left(\frac{n}{2}(x+\pi)\right)\cos((2p+1)y)$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 0, 1, \ldots$.

Домашнее задание:

Задача 33.6. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad y \in [0, \pi/2], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \quad y \in [0, \pi/2], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi/2, \ x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ответ: $\lambda_{np} = n^2 + 4p^2$, $u_{np}(x,y) = \cos(nx)\sin(2py)$, $n = 0, 1, \ldots$, $p \in \mathbb{N}$.

Задача 33.7. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad y \in [0, \pi/3], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \quad y \in [0, \pi/3], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi/3, \ x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ответ: $\lambda_{np} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3p - \frac{3}{2}\right)^2$, $u_{np}(x,y) = \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)\cos\left(\left(3p - \frac{3}{2}\right)y\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

Задача 33.8. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad y \in [0, 1], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 3\pi, \ y \in [0, 1], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [0, 3\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 1, \quad x \in [0, 3\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $\lambda_{np} = \left(\frac{2n-1}{6}\right)^2 + \pi^2 p^2$, $u_{np}(x,y) = \sin\left(\frac{2n-1}{6}x\right)\sin\left(p\pi y\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

34. Уравнение Пуассона в прямоугольной области.

Определение 34.1. *Краевой задачей для уравнения Пуассона в прямоугольнике называется задача о нахождении функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению*

$$\Delta u = f(x,y), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \text{при} \quad x \in [a,b],\ y \in [c,d], \tag{34.1}$$

и краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u + \beta_3 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u + \beta_4 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{34.2}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1,2,3,4$ и ∂_n – производная по внешней нормали.

Вообще говоря, решение задачи (34.1) – (34.2) не всегда существует и не всегда единственно. Чтобы это понять, удобно вначале рассмотреть план решения задачи (34.1) – (34.2) в предположении, что ее решение существует и единственно.

Решение задачи (34.1) – (34.2) строится в три шага.

(1) Находим собственные значения λ_{np} и собственные функции u_{np} задачи

$$-\Delta u = \lambda u,$$

с краевыми условиями (34.2).

(2) Раскладываем функцию f в ряд Фурье по функциям u_{np}

$$f(x,y) = \sum_{n,p} f_{np} u_{np}(x,y). \tag{34.3}$$

Постоянные f_{np} могут быть найдены по формулам

$$f_{np} = \frac{(f, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})}, \quad (u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy\ u(x,y)\overline{v(x,y)}.$$

(3) Ищем решение задачи (34.1) – (34.2) в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{n,p} c_{np} u_{np}(x,y), \tag{34.4}$$

где постоянные c_{np} подлежат определению. Так как все функции u_{np} удовлетворяют краевым условиям (34.2), то и ряд (34.4) удовлетворяет краевым условиям (34.2). Осталось удовлетворить уравнению (34.1). Подставим ряды (34.3) и (34.4) в уравнение (34.1). В результате получим

$$-\sum_{n,p} c_{np} \lambda_{np} u_{np}(x,y) = \sum_{n,p} f_{np} u_{np}(x,y).$$

Два ряда Фурье совпадают тогда и только тогда, когда совпадают коэффициенты при соответствующих базисных функциях (в данном случае при u_{np}), поэтому

$$-c_{np}\lambda_{np} = f_{np} \iff c_{np} = -\frac{f_{np}}{\lambda_{np}}. \tag{34.5}$$

- Ответ выписывается в виде ряда (34.4).

Вернемся к уравнению (34.5)

$$-c_{np}\lambda_{np} = f_{np}. \tag{34.6}$$

Легко видеть, что решение уравнения (34.6) существует и единственно только при $\lambda_{np} \neq 0$. Если же $\lambda_{np} = 0$ при некоторых n и p, уравнение (34.6) может не иметь решения (при $f_{np} \neq 0$), либо иметь не единственное решение (при $f_{np} = 0$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 34.2.

- *Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора Лапласа $-\Delta$ с краевыми условиями* (34.2)*. Тогда решение задачи* (34.1) – (34.2) *существует и единственно.*
- *Пусть $\lambda = 0$ – собственное значение оператора Лапласа $-\Delta$ с краевыми условиями* (34.2) *и v_1, … v_l – собственные функции, отвечающие $\lambda = 0$. Тогда*
  - *если f ортогональна всем собственным функциям v_1, … v_l (т. е. $(f, v_p) = 0$, $p = 1, \ldots, l$), то решение задачи* (34.1) – (34.2) *существует, но не единственно.*
  - *если f не ортогональна хотя бы одной собственной функции v_1, … v_l, то решение задачи* (34.1) – (34.2) *не существует.*

Пример 34.3. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = 6\sin x \sin y - 26\sin(2x)\sin(3y), \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{34.7}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу на собственные значения и собственные функции

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{34.8}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (34.8) задаются равенствами, см. пример 33.4 на стр. 109,

$$u_{np}(x,y) = \sin(nx)\sin(py), \quad \lambda_{np} = n^2 + p^2, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2: Раскладываем функцию $f(x,y) = 6\sin x \sin y - 26\sin(2x)\sin(3y)$ в ряд Фурье по собственным функциям u_{np}. Это разложение имеет элементарный вид

$$f(x,y) = 6u_{1,1}(x,y) - 26u_{2,3}(x,y). \tag{34.9}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (34.7) в виде конечного ряда Фурье

$$u(x,y) = c_{1,1}u_{1,1}(x,y) + c_{2,3}u_{2,3}(x,y). \tag{34.10}$$

Подставим ряды (34.9) и (34.10) в уравнение (34.7). В результате получим

$$-\lambda_{1,1}c_{1,1}u_{1,1}(x,y) - \lambda_{2,3}c_{2,3}u_{2,3}(x,y) = 6u_{1,1}(x,y) - 26u_{2,3}(x,y).$$

Отсюда находим, что

$$c_{1,1} = -\frac{6}{\lambda_{1,1}} = -\frac{6}{2} = -3, \quad c_{2,3} = \frac{26}{\lambda_{2,3}} = \frac{26}{13} = 2. \ \square$$

Ответ: $u(x,y) = -3\sin x \sin y + 2\sin(2x)\sin(3y)$.

Пример 34.4. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = 1, \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{34.11}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу на собственные значения и собственные функции

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{34.12}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (34.12) задаются равенствами, см. пример 33.5 на стр. 111,

$$u_{np}(x,y) = \sin(nx)\sin(py), \quad \lambda_{np} = n^2 + p^2, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2: Раскладываем функцию $f(x,y) = 1$ в ряд Фурье по собственным функциям u_{np}. Это разложение имеет следующий вид

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f_{np} u_{np}(x,y). \tag{34.13}$$

Найдем постоянные f_{np}

$$(f, u_{np}) = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} dy\ \sin(nx)\sin(py) = \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx \int_0^{\pi} \sin(py)\,dy = \frac{(1-(-1)^n)(1-(-1)^p)}{np},$$

$$(u_{np}, u_{np}) = \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx \int_0^{\pi} \sin^2(py)\,dy = \frac{\pi^2}{4},$$

$$f_{np} = \frac{(f, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})} = \frac{4}{\pi^2 np}(1-(-1)^n)(1-(-1)^p).$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (34.11) в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_{np} u_{np}(x,y). \tag{34.14}$$

Подставим ряды (34.13) и (34.14) в уравнение (34.11). В результате получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{np} c_{np} u_{np}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f_{np} u_{np}(x,y).$$

Отсюда находим, что

$$c_{np} = -\frac{f_{np}}{\lambda_{np}} = -\frac{4}{\pi^2 np(n^2+p^2)}(1-(-1)^n)(1-(-1)^p). \ \square$$

Ответ: $u(x,y) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 np(n^2+p^2)}(1-(-1)^n)(1-(-1)^p)\sin(nx)\sin(py).$

Пример 34.5. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = A + 2\cos^2 x, \quad \begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0, \pi], \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}. \tag{34.15}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу на собственные значения и собственные функции

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{34.16}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (34.16) задаются равенствами

$$u_{np}(x, y) = \cos(nx)\cos(py), \quad \lambda_{np} = n^2 + p^2, \quad n = 0, 1, \ldots,\ p = 0, 1, \ldots.$$

Легко видеть, что $\lambda_{0,0} = 0$ собственное значение. Поэтому задача (34.15) имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(x, y) = A + 2\cos^2 x$ ортогональна собственной функции $u_{0,0} = 1$ (см. теорему 34.2). Условие ортогональности имеет вид

$$(f, u_{0,0}) = \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy (A + 2\cos^2 x) = A\pi^2 + \pi^2 = 0,$$

откуда $A = -1$. Таким образом, задача (34.15) разрешима только при $A = -1$.

Шаг 2: Положим $A = -1$ и разложим функцию $f(x, y) = -1 + 2\cos^2 x$ в ряд Фурье по собственным функциям u_{np}. Это разложение имеет вид

$$f(x, y) = -1 + 2\cos^2 x = \cos(2x) = u_{2,0}(x, y). \tag{34.17}$$

Шаг 3: При $A = -1$ ищем решение задачи (34.15) в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{np} u_{np}(x, y). \tag{34.18}$$

Подставим представления (34.17) и (34.18) в уравнение (34.11). В результате получим

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_{np} c_{np} u_{np}(x, y) = u_{2,0}(x, y).$$

Отсюда находим, что

$$\begin{cases} -\lambda_{2,0} c_{2,0} = 1, \\ -\lambda_{np} c_{np} = 0, \text{ при } n \neq 2 \text{ и } p \neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} c_{2,0} = -\frac{1}{4}, \\ 0 \cdot c_{0,0} = 0, \\ c_{np} = 0, \text{ при } n \neq 0, 2 \text{ и } p \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что равенство $0 \cdot c_{0,0} = 0$ выполнено для любого $c_{0,0}$. Поэтому решение задачи (34.15) будет не единственно.

Решение задачи (34.15) выписываем в виде ряда (34.18). □

Ответ: При $A = -1$ решение имеет вид $u(x, y) = c_{0,0} - \frac{1}{4}\cos(2x)$, где $c_{0,0}$ – произвольная постоянная; при $A \neq -1$ решение не существует.

Домашнее задание:

Задача 34.6. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = 20\sin(2x)\cos y - 10\sin x\cos(3y), \quad \begin{cases} u=0 & \text{при} \quad x=0, \quad y\in[0,\pi/2], \\ u=0 & \text{при} \quad x=\pi, \quad y\in[0,\pi/2], \\ \partial_n u=0 & \text{при} \quad y=0, \quad x\in[0,\pi], \\ u=0 & \text{при} \quad y=\pi/2,\ x\in[0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = -4\sin(2x)\cos y + \sin x\cos(3y)$.

Задача 34.7. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = x(x-\pi)\cos(2y), \quad \begin{cases} u=0 & \text{при} \quad x=0,\ y\in[0,\pi], \\ u=0 & \text{при} \quad x=\pi,\ y\in[0,\pi], \\ \partial_n u=0 & \text{при} \quad y=0,\ x\in[0,\pi], \\ \partial_n u=0 & \text{при} \quad y=\pi,\ x\in[0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3(4+n^2)}\sin(nx)\cos(2y)$.

Задача 34.8. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = xy, \quad \begin{cases} u=0 & \text{при} \quad x=0,\ y\in[0,\pi], \\ u=0 & \text{при} \quad x=\pi,\ y\in[0,\pi], \\ u=0 & \text{при} \quad y=0,\ x\in[0,\pi], \\ u=0 & \text{при} \quad y=\pi,\ x\in[0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+p+1}}{np(n^2+p^2)}\sin(nx)\sin(py)$.

Задача 34.9. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = A\sin^2 x - 8\cos^2 y, \quad \begin{cases} \partial_n u=0 & \text{при} \quad x=0,\ y\in[0,2\pi], \\ \partial_n u=0 & \text{при} \quad x=\pi,\ y\in[0,2\pi], \\ \partial_n u=0 & \text{при} \quad y=0,\ x\in[0,\pi], \\ \partial_n u=0 & \text{при} \quad y=\pi,\ x\in[0,\pi], \end{cases} \quad A\in\mathbb{R}.$$

Ответ: При $A=8$ решение имеет вид $u(x,y) = c_{0,0} + \cos(2x) + \cos(2y)$, где $c_{0,0}$ – произвольная постоянная; при $A\neq 8$ решение не существует.

35. 11-ая контрольная работа (задача: 11; 20 минут).

Вариант контрольной работы №11.

Задача 11. Решить краевую задачу

$$\Delta u = \sin(2x)\cos(3y) \quad \text{при} \quad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi],$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = -\frac{1}{13}\sin(2x)\cos(3y)$.

Вариант контрольной работы №11.

Задача 11. Решить краевую задачу

$$\Delta u = 2\cos^2 x + a\cos^2 y \quad \text{при} \quad x \in [0,\pi],\ y \in [0,2\pi], \tag{35.1}$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad y \in [0,2\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \quad y \in [0,2\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 2\pi,\ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{35.2}$$

где a – вещественный параметр.

Ответ: При $a = -2$, $u(x,y) = \frac{1}{4}(\cos(2y) - \cos(2x)) + c$, где $c \in \mathbb{R}$. При $a \neq 2$ задача (35.1), (35.2) не имеет решения.

36. Уравнение Лапласа в прямоугольной области.

Определение 36.1. *Краевой задачей для уравнения Лапласа в прямоугольнике называется задача о нахождении функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению*

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \textit{при} \quad x \in [a,b],\ y \in [c,d], \tag{36.1}$$

и краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = h_1(y) & \textit{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = h_2(y) & \textit{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u + \beta_3 \partial_n u = g_1(x) & \textit{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u + \beta_4 \partial_n u = g_2(x) & \textit{при} \quad y = d,\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{36.2}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1,2,3,4$ и ∂_n – производная по внешней нормали.

Рассмотрим задачу более общего вида

$$\Delta u = f(x,y), \quad \text{при } x \in [a,b],\ y \in [c,d], \tag{36.3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = h_1(y) & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = h_2(y) & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u + \beta_3 \partial_n u = g_1(x) & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u + \beta_4 \partial_n u = g_2(x) & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{36.4}$$

Как отмечалось ранее, задача вида (36.3) – (36.4) не всегда разрешима. Если известно, что решение задачи (36.3) – (36.4) существует и единственно, для ее решения удобно рассмотреть три вспомогательные задачи вида

$$\Delta u_1 = f(x,y), \qquad \begin{cases} \alpha_1 u_1 + \beta_1 \partial_n u_1 = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u_1 + \beta_2 \partial_n u_1 = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u_1 + \beta_3 \partial_n u_1 = 0 & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u_1 + \beta_4 \partial_n u_1 = 0 & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a,b], \end{cases} \tag{36.5}$$

$$\Delta u_2 = 0, \qquad \begin{cases} \alpha_1 u_2 + \beta_1 \partial_n u_2 = h_1(y) & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u_2 + \beta_2 \partial_n u_2 = h_2(y) & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u_2 + \beta_3 \partial_n u_2 = 0 & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u_2 + \beta_4 \partial_n u_2 = 0 & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a,b], \end{cases} \tag{36.6}$$

$$\Delta u_3 = 0, \qquad \begin{cases} \alpha_1 u_3 + \beta_1 \partial_n u_3 = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c,d], \\ \alpha_2 u_3 + \beta_2 \partial_n u_3 = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c,d], \\ \alpha_3 u_3 + \beta_3 \partial_n u_3 = g_1(x) & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a,b], \\ \alpha_4 u_3 + \beta_4 \partial_n u_3 = g_2(x) & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{36.7}$$

Легко видеть, что функция

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y)$$

является решением исходной задачи (36.3) – (36.4).

Задача (36.5) является краевой задачей для уравнения Пуассона, которая была нами рассмотрена ранее, см. стр. 113. Для решения задач (36.6) и (36.7) применяют метод разделения переменных. Остановимся на нем подробнее на примере решения задачи вида (36.7).

Решение задачи (36.7) строится в три шага.

(1) Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta u = 0, \qquad \begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c, d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c, d]. \end{cases} \tag{36.8}$$

Будем искать всевозможные решения задачи (36.8) вида

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \tag{36.9}$$

Подставляя представление (36.9) в уравнение (36.8), получим

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{36.10}$$

Левая часть в равенстве (36.10) зависит только от переменной x, в то время как правая часть зависит только от переменной y. Такое возможно только если оба отношения равны некоторой постоянной, обозначим ее λ. В результате уравнения на неизвестные функции X и Y разделились

$$-X''(x) = \lambda X(x), \tag{36.11}$$

$$Y''(y) = \lambda Y(y). \tag{36.12}$$

Подставляя (36.9) в краевые условия (36.8), найдем

$$\begin{cases} \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0. \end{cases} \tag{36.13}$$

Здесь мы учли, что $\partial_n = -\partial_x$ на границе $x = a$ и $\partial_n = \partial_x$ на границе $x = b$.

Собирая уравнение (36.11) и краевые условия (36.13) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0. \end{cases} \tag{36.14}$$

Пусть λ_n – собственные значения и X_n – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (36.14).

Уравнение (36.12) принимает вид

$$Y''(y) = \lambda_n Y(y). \tag{36.15}$$

Общее решение уравнения (36.15) имеет вид

$$\begin{matrix} Y_n(y) = A_n \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_n}) + B_n \operatorname{sh}(-\sqrt{\lambda_n}), & \text{при} \quad \lambda_n \neq 0, \\ R_n(r) = A_n + B_n y, & \text{при} \quad \lambda_n = 0. \end{matrix} \tag{36.16}$$

Таким образом, мы нашли все решения задачи (39.3), представимые в виде (39.4). Эти решения можно переписать в виде $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$.

(2) Раскладываем функции g_1 и g_2 в ряд Фурье по собственным функциям X_n задачи Штурма-Лиувилля (36.14)

$$g_1(x) = \sum_n g_n^1 X_n(x), \quad g_2(x) = \sum_n g_n^2 X_n(x). \tag{36.17}$$

(3) Ищем решение задачи (36.7) в виде

$$u(x,y)=\sum_n X_n(x)Y_n(y). \tag{36.18}$$

Ряд (36.18) удовлетворяет уравнению и первому и второму краевому условиям задачи (36.7). Осталось подобрать постоянные A_n и B_n (см. (36.16)) так, чтобы выполнялись третье и четвертое краевые условия задачи (36.7).

Подставляя ряды (36.17) и (36.18) в третье и четвертое краевые условия задачи (36.7), получим

$$\sum_n \left(\alpha_3 Y_n(c)-\beta_3 Y_n'(c)\right) X_n(x)=\sum_n g_n^1 X_n(x),$$
$$\sum_n \left(\alpha_4 Y_n(d)+\beta_4 Y_n'(d)\right) X_n(x)=\sum_n g_n^2 X_n(x).$$

Отсюда

$$\begin{cases}\alpha_3 Y_n(c)-\beta_3 Y_n'(c)=g_n^1,\\ \alpha_4 Y_n(d)+\beta_4 Y_n'(d)=g_n^2.\end{cases} \tag{36.19}$$

Системы уравнений (36.19) служат для определения постоянных A_n и B_n. Отметим, что исходная задача (36.7) разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы все системы уравнений (36.19).

∘ Решение задачи (36.7) выписывается в виде ряда (36.18).

Пример 36.2. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u=0 \quad \textit{при} \quad x\in[0,\pi],\ y\in[0,\pi], \tag{36.20}$$

$$\begin{cases} u=0 & \textit{при} \quad x=0,\ y\in[0,\pi],\\ u=0 & \textit{при} \quad x=\pi,\ y\in[0,\pi],\\ u=\sin(2x) & \textit{при} \quad y=0,\ x\in[0,\pi],\\ u=0 & \textit{при} \quad y=\pi,\ x\in[0,\pi].\end{cases} \tag{36.21}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta u=0,\quad \begin{cases} u=0 & \text{при} \quad x=0,\ y\in[0,\pi],\\ u=0 & \text{при} \quad x=\pi,\ y\in[0,\pi].\end{cases} \tag{36.22}$$

Ищем решения задачи (36.22) вида

$$u(x,y)=X(x)Y(y). \tag{36.23}$$

Подставляя представление (36.23) в уравнение (36.22), получим

$$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda.$$

Отсюда

$$-X''(x)=\lambda X(x), \tag{36.24}$$

$$Y''(y)=\lambda Y(y). \tag{36.25}$$

Подставляя (36.23) в краевые условия (36.22), найдем

$$X(0)=X(\pi)=0. \tag{36.26}$$

Собирая уравнение (36.24) и краевые условия (36.26) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля
$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{36.27}$$
Собственные функции и собственные значения задачи (36.27) имеют вид $X_n(x) = \sin(nx)$, $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Уравнение (36.25) принимает вид
$$Y''(y) = n^2 Y(y). \tag{36.28}$$
Общее решение уравнения (36.28) удобно записать в виде
$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}(ny) + B_n \operatorname{ch}(ny).$$
Таким образом, решения задачи (36.22), представимые в виде (36.23), можно записать в виде
$$u_n(x,y) = (A_n \operatorname{sh}(ny) + B_n \operatorname{ch}(ny)) \sin(nx). \tag{36.29}$$

Шаг 2: Раскладываем функцию $\sin(2x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (36.27). Данное разложение имеет элементарный вид
$$\sin(2x) = X_2(x). \tag{36.30}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (36.20) – (36.21) в виде конечного ряда Фурье $u(x,y) = \sum_n u_n(x,y)$. При этом разложение ведем только по тем собственным функциям, которые участвуют в разложении (36.30), т. е. по X_2,
$$u(x,y) = (A_2 \operatorname{sh}(2y) + B_2 \operatorname{ch}(2y)) \sin(2x). \tag{36.31}$$
Подставляя ряды (36.30) и (36.31) в третье и четвертое уравнения краевого условия (36.21), получим
$$\begin{aligned} B_2 \sin(2x) &= \sin(2x), \\ (A_2 \operatorname{sh}(2\pi) + B_2 \operatorname{ch}(2\pi)) \sin(2x) &= 0. \end{aligned}$$
Отсюда
$$\begin{cases} B_2 = 1, \\ A_2 \operatorname{sh}(2\pi) + B_2 \operatorname{ch}(2\pi) = 0. \end{cases} \tag{36.32}$$
Решая систему (36.32), найдем
$$\begin{cases} A_2 = -\operatorname{cth}(2\pi), \\ B_2 = 1, \end{cases}$$

Решение задачи (36.20), (36.21) имеет вид (36.31). □

Ответ: $u(x,y) = (\operatorname{ch}(2y) - \operatorname{cth}(2\pi)\operatorname{sh}(2y)) \sin(2x)$.

Пример 36.3. *Решить уравнение Лапласа*
$$\Delta u = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x \in [0,1],\ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tag{36.33}$$
$$\begin{cases} u = \cos y & \text{\textit{при}} \quad x = 0,\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = 0 & \text{\textit{при}} \quad x = \frac{\pi}{2},\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = \sin x & \text{\textit{при}} \quad y = 0,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ u = \sin(3x) & \text{\textit{при}} \quad y = \frac{\pi}{2},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \tag{36.34}$$

Решение. Сведем задачу (36.33) – (36.34) к двум более простым. Пусть u_1 и u_2 решения двух следующих задач

$$u_1 - \text{решение задачи:}\quad \Delta u = 0,\ \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \frac{\pi}{2},\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = \sin x & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ u = \sin(3x) & \text{при} \quad y = \frac{\pi}{2},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{cases} \tag{36.35}$$

$$u_2 - \text{решение задачи:}\quad \Delta u = 0,\ \begin{cases} u = \cos y & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \frac{\pi}{2},\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \frac{\pi}{2},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \tag{36.36}$$

Прямой подстановки несложно убедиться, что функция

$$u = u_1 + u_2 \tag{36.37}$$

является решением задачи (36.33) – (36.34).

Решим задачу (36.35). Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta u = 0, \quad \begin{cases} u = 0, & \text{при } x = 0,\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n u = 0, & \text{при } x = \frac{\pi}{2},\ y \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \tag{36.38}$$

Ищем решения задачи (36.38) вида

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \tag{36.39}$$

Подставляя представление (36.39) в уравнение (36.38), получим

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Отсюда

$$-X''(x) = \lambda X(x), \tag{36.40}$$

$$Y''(y) = \lambda Y(y). \tag{36.41}$$

Подставляя (36.39) в краевые условия (36.38), найдем

$$X(0) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{36.42}$$

Собирая уравнение (36.40) и краевые условия (36.42) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{36.43}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (36.43) имеют вид $X_n(x) = \sin((2n+1)x)$, $\lambda_n = (2n+1)^2$, $n = 0, 1, \ldots$.

Уравнение (36.41) принимает вид

$$Y''(y) = (2n+1)^2 Y(y). \tag{36.44}$$

Общее решение уравнения (36.44) удобно записать в виде

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}((2n+1)y) + B_n \operatorname{ch}((2n+1)y).$$

Таким образом, решения задачи (36.38), представимые в виде (36.39), можно записать в виде

$$u_n(x, y) = (A_n \operatorname{sh}((2n+1)y) + B_n \operatorname{ch}((2n+1)y)) \sin((2n+1)x).$$

Шаг 2: Раскладываем функции $\sin x$ и $\sin(3x)$ в ряды Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (36.43). Эти разложения имеют элементарный вид

$$\sin x = X_0(x), \quad \sin(3x) = X_1(x). \tag{36.45}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (36.35) в виде конечного ряда Фурье $u(x,y) = \sum_n u_n(x,y)$. При этом разложение ведем только по тем собственным функциям, которые участвуют в разложениях (36.45), т. е. по X_0 и X_1,

$$u(x,y) = (A_0 \operatorname{sh} y + B_0 \operatorname{ch} y)\sin x + (A_1 \operatorname{sh}(3y) + B_1 \operatorname{ch}(3y))\sin(3x). \tag{36.46}$$

Подставляя ряды (36.45) и (36.46) в третье и четвертое уравнения краевого условия (36.35), и учитывая, что $\partial_n u = -\partial_y u$ на границе $y = 0$, получим

$$A_0 \sin x + 3A_1 \sin(3x) = -\sin x,$$

$$\left(A_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin x + \left(A_1 \operatorname{sh}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + B_1 \operatorname{ch}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\sin(3x) = \sin(3x).$$

Отсюда

$$\begin{cases} A_0 = -1, \\ A_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{36.47}$$

$$\begin{cases} 3A_1 = 0, \\ A_1 \operatorname{sh}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + B_1 \operatorname{ch}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1. \end{cases} \tag{36.48}$$

Решая системы (36.47) и (36.48), найдем

$$\begin{cases} A_0 = -1, \\ B_0 = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 0, \\ B_1 = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая формулу (36.46), найдем решение u_1 задачи (36.35)

$$u_1(x,y) = \left(\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y\right)\sin x + \left(\operatorname{ch}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{-1}\operatorname{ch}(3y)\sin(3x).$$

Решим задачу (36.36). Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta u = 0, \quad \begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \frac{\pi}{2},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \tag{36.49}$$

Ищем решения задачи (36.49) вида

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{36.50}$$

Подставляя представление (36.50) в уравнение (36.49), получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Отсюда

$$-Y''(y) = \lambda Y(y). \tag{36.51}$$

$$X''(x) = \lambda X(x), \tag{36.52}$$

Подставляя (36.50) в краевые условия (36.49), найдем

$$Y'(0) = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{36.53}$$

Собирая уравнение (36.51) и краевые условия (36.53) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -Y''(y) = \lambda Y(y), \\ Y'(0) = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{36.54}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (36.54) имеют вид $Y_n(y) = \cos((2n+1)y)$, $\lambda_n = (2n+1)^2$, $n = 0, 1, \ldots$.

Уравнение (36.52) принимает вид

$$X''(x) = (2n+1)^2 X(x). \tag{36.55}$$

Общее решение уравнения (36.55) удобно записать в виде

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sh}((2n+1)x) + B_n \operatorname{ch}((2n+1)x).$$

Таким образом, решения задачи (36.49), представимые в виде (36.50), можно записать в виде

$$u_n(x,y) = (A_n \operatorname{sh}((2n+1)x) + B_n \operatorname{ch}((2n+1)x)) \cos((2n+1)y).$$

Шаг 2: Раскладываем функцию $\cos y$ в ряд Фурье по собственным функциям $Y_n(y)$ задачи Штурма-Лиувилля (36.54). Данное разложение имеет элементарный вид

$$\cos y = Y_0(y). \tag{36.56}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (36.36) в виде конечного ряда Фурье $u(x,y) = \sum_n u_n(x,y)$. При этом разложение ведем только по тем собственным функциям, которые участвуют в разложении (36.56), т. е. по Y_0,

$$u(x,y) = (A_0 \operatorname{sh} x + B_0 \operatorname{ch} x) \cos y. \tag{36.57}$$

Подставляя ряды (36.56) и (36.57) в третье и четвертое уравнения краевого условия (36.36), получим

$$B_0 \cos y = \cos y,$$
$$\left(A_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cos y = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ A_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{36.58}$$

Решая систему (36.58), найдем

$$\begin{cases} A_0 = -\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ B_0 = 1. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая формулу (36.57), найдем решение u_2 задачи (36.36)

$$u_2(x,y) = \left(\operatorname{ch} x - \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sh} x\right) \cos y.$$

Теперь решение задачи (36.33) – (36.34) можно найти с помощью формулы (36.37). □

Ответ: $u(x,y) = \left(\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y\right) \sin x + \left(\operatorname{ch}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{-1} \operatorname{ch}(3y) \sin(3x) + \left(\operatorname{ch} x - \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sh} x\right) \cos y.$

Пример 36.4. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = 6 \sin x \sin y - 26 \sin(2x) \sin(3y) \quad \textit{при} \quad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi], \tag{36.59}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \textit{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \textit{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = \sin(2x) & \textit{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \textit{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{36.60}$$

Решение. Сведем задачу (36.59) – (36.60) к двум более простым. Пусть u_1 и u_2 решения двух следующих задач

$$u_1 - \text{решение задачи:}\quad \Delta u = 0,\quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = \sin(2x) & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{36.61}$$

$$u_2 - \text{решение задачи:}\quad \begin{array}{l} \Delta u = 6\sin x \sin y - \\ -26\sin(2x)\sin(3y), \end{array} \quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{36.62}$$

С помощью прямой подстановки несложно убедиться, что функция

$$u = u_1 + u_2 \tag{36.63}$$

является решением задачи (36.59) – (36.60).

Осталось вспомнить, что задача (36.61) решена в примере 36.2 на стр. 121

$$u_1(x,y) = (\operatorname{ch}(2y) - \operatorname{cth}(2\pi)\operatorname{sh}(2y))\sin(2x),$$

а задача (36.62) решена в примере 34.3 на стр. 114

$$u_2(x,y) = -3\sin x \sin y + 2\sin(2x)\sin(3y).$$

Подставляя u_1 и u_2 в формулу (36.63), найдем решение исходной задачи (36.59) – (36.60). □

Ответ: $u(x,y) = (\operatorname{ch}(2y) - \operatorname{cth}(2\pi)\operatorname{sh}(2y))\sin(2x) - 3\sin x\sin y + 2\sin(2x)\sin(3y)$.

Домашнее задание:

Задача 36.5. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0,\quad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = \sin x & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = \sin x\,\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh}\pi}$.

Задача 36.6. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0,\quad \begin{cases} u = \sin(2y) & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \frac{\pi}{2},\ y \in [0,\pi], \\ u = \sin x & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\frac{\pi}{2}], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = \sin x\,(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{cth}\pi) + (\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{sh}(2x)\operatorname{th}\pi)\sin(2y)$.

Задача 36.7. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = \sin(3x)\sin y,\quad \begin{cases} u = \sin(2y) & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = -\frac{1}{10}\sin(3x)\sin y + (\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{cth}(2\pi)\operatorname{sh}(2x))\sin(2y)$.

Задача 36.8. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = \sin x \sin y, \qquad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = \sin(2x) & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = -\frac{1}{2}\sin x \sin y + (\operatorname{ch}(2y) - \operatorname{cth}(2\pi)\operatorname{sh}(2y))\sin(2x)$.

Задача 36.9. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = \sin(2x)\sin(3y), \qquad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = \sin x & \text{при} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = -\frac{1}{13}\sin(2x)\sin(3y) + \frac{1}{\operatorname{sh}\pi}\operatorname{sh} y \sin x$.

Задача 36.10. *Решить уравнение Пуассона*

$$\Delta u = \sin x, \qquad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = 2\pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [0,2\pi], \\ u = \sin(2x) & \text{при} \quad y = \pi, \quad x \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y) = \frac{\operatorname{ch}(2y)}{2\operatorname{sh}(2\pi)}\sin(2x) - \sin x$.

37. Уравнение Пуассона в ограниченной области.

Определение 37.1. *Краевой задачей для уравнения Пуассона в ограниченной области D с кусочно гладкой границей ∂D называется задача о нахождении функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению*

$$\Delta u(x,y) = f(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \tag{37.1}$$

и краевому условию

$$\alpha(x,y)u(x,y) + \beta(x,y)\partial_n u(x,y) = g(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D. \tag{37.2}$$

Здесь α, β, f и g – заданные гладкие вещественные функции, удовлетворяющие условию $|\alpha(x,y)| + |\beta(x,y)| \neq 0$ при $(x,y) \in \partial D$, и ∂_n – производная по внешней нормали к ∂D.

Сформулируем несколько важных утверждений.

Теорема 37.2.

- *Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \lambda u(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \alpha(x,y)u(x,y) + \beta(x,y)\partial_n u(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D. \end{cases} \tag{37.3}$$

  Тогда решение задачи (37.1) – (37.2) существует и единственно.
- *Пусть $\lambda = 0$ – собственное значение задачи (37.3). Тогда решение задачи (37.1) – (37.2) либо не существует, либо существует, но не единственно.*

Теорема 37.3. *Решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ u(x,y) = g(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D \end{cases}$$

существует и единственно.

Теорема 37.4. *Решение задачи Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D \end{cases}$$

существует тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{\partial D} g(x,y)\,dl = 0. \tag{37.4}$$

Если решение задачи Неймана существует, то оно определено с точностью до прибавления произвольной постоянной.

Пример 37.5. *Решить задачу Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = A \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 2 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D, \end{cases} \tag{37.5}$$

где D – прямоугольник $\{(x,y) : x \in [0,2], y \in [0,4]\}$ и A – некоторая вещественная постоянная.

Решение. Условие разрешимости задачи (37.5) имеет вид (37.4), где $f = A$ и $g = 2$. Вычислим интегралы, входящие в (37.4),

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 8A, \quad \int\limits_{\partial D} g(x,y)\,dl = 24.$$

Таким образом, задача (37.5) разрешима тогда и только тогда, когда (см. теорему 37.4)

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{\partial D} g(x,y)\,dl = 0 \Longleftrightarrow A = 3.$$

Решим теперь задачу (37.5), полагая $A = 3$. Для решения задачи (37.5) естественно попытаться применить метод, использованный для решения задачи вида (36.3) – (36.4). Для этого нам бы пришлось рассмотреть две вспомогательные задачи вида

$$\begin{cases} \Delta u_1(x,y) = 3 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \dfrac{\partial u_1(x,y)}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \dfrac{\partial u_2(x,y)}{\partial n} = 2 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D. \end{cases} \tag{37.6}$$

Если решения u_1 и u_2 задач (37.6) существуют, то решение задачи (37.5) можно найти в виде $u = u_1 + u_2$. Однако, как легко видеть, для задач (37.6) условие разрешимости (37.4) не выполняется и поэтому решения u_1 и u_2 не существуют. По этой причине мы не можем свести исходную задачу (37.5) к двум задачам вида (37.6).

Чтобы обойти указанную трудность, поступим следующим образом. Найдем произвольную функцию v, удовлетворяющую краевому условию

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial n} = 2 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D.$$

Например, в качестве такой функции v можно взять

$$v(x,y) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2. \tag{37.7}$$

Теперь ищем решение задачи (37.5) в виде

$$u(x,y) = w(x,y) + v(x,y), \tag{37.8}$$

где w – новая неизвестная функция. Подставляя (37.8) в (37.5), получим задачу для w

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 3 - \Delta v(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D. \end{cases} \tag{37.9}$$

Как было показано ранее, задача (37.5) при $A = 3$ разрешима. Следовательно, разрешима и задача (37.9). Для ее решения можно применить метод, изложенный для решения задачи Пуассона вида (34.1) – (34.2).

Подставляя (37.7) в (37.9), получим

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D, \\ \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D. \end{cases} \tag{37.10}$$

Общее решение задачи (37.10) имеет вид $w(x,y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Окончательно, решение задачи (37.5) имеет вид (37.8).

Ответ: При $A \neq 3$ задача (37.5) не разрешима; при $A = 3$ общее решение задачи (37.5) имеет вид $u(x,y) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

Домашнее задание:

Задача 37.6. *Найти соотношение между постоянными A и B, при котором будет разрешима задача Неймана*

$$\Delta u = Axy, \quad \begin{cases} \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad x = 0, \quad y \in [-1, 2], \\ \partial_n u = B & \textit{при} \quad x = 1, \quad y \in [-1, 2], \\ \partial_n u = 1 & \textit{при} \quad y = -1, \, x \in [0, 1], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad y = 2, \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Ответ: $3A - 12B = 4$.

Задача 37.7. *Найти постоянную A, при которой будет разрешима задача Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u \ = A & \textit{при} \quad (x, y) \in D \\ \partial_n u = Bxy & \textit{при} \quad (x, y) \in \partial D, \end{cases}$$

где D – треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 2)$.

Ответ: $A = \frac{\sqrt{5}}{3}B$.

Задача 37.8. *Решить задачу Неймана для уравнения Пуассона*

$$\Delta u = 4\cos^2 x, \quad \begin{cases} \partial_n u = A\cos^2 y & \textit{при} \quad x = 0, \; y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad x = \pi, \; y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad y = 0, \; x \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad y = \pi, \; x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ответ: При $A = 4\pi$ решение имеет вид $u(x, y) = c_{0,0} + (x - \pi)^2 - \frac{1}{2}\cos x + \pi(\operatorname{cth}(2\pi)\operatorname{ch}(2x) - \operatorname{sh}(2x))\cos(2y)$, где $c_{0,0}$ – произвольная постоянная; при $A \neq 4\pi$ решение не существует.

38. 12-ая контрольная работа (задача: 12; 10 минут).

Вариант контрольной работы №12.

Задача 12. Найти соотношение между постоянными A и B, при котором будет разрешима задача Неймана

$$\Delta u = Ax, \quad \begin{cases} \partial_n u = By^2 & \textit{при} \quad x = 0,\ y \in [0,1], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad x = 1,\ y \in [0,1], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad y = 0,\ x \in [0,1], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad y = 1,\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

Ответ: $3A = 2B$.

Вариант контрольной работы №12.

Задача 12. Найти постоянную A, при которой будет разрешима задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u \ = A & \textit{при} \quad (x,y) \in D \\ \partial_n u = B & \textit{при} \quad (x,y) \in \partial D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Ответ: $A = 2B$.

39. Уравнение Лапласа в кольцевой области.

Рассмотрим область D, которая имеет форму пересечения кольца и сектора. Пусть r_1, r_2 – радиусы внутренней и внешней окружностей кольца и φ_1, φ_2 – соответствующие углы сектора. На рисунке 17 изображен пример области D и указаны введенные обозначения. Напомним, что

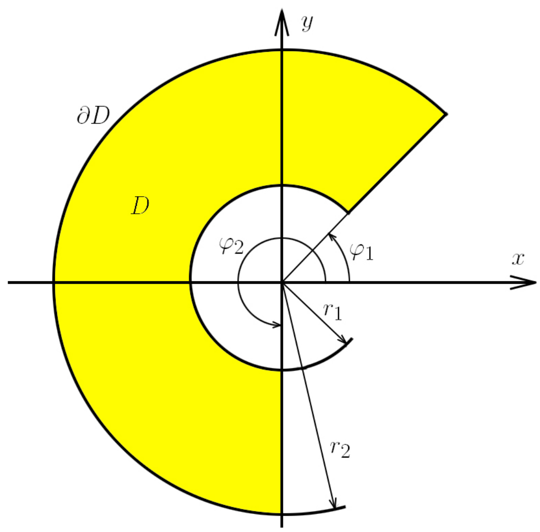

Рис. 17. Область D выделена желтым цветом.

декартовы координаты (x, y) связаны с полярными (r, φ) формулами вида

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Оператор Лапласа в полярных координатах принимает вид

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

Определение 39.1. *Краевой задачей для уравнения Лапласа в кольцевой области называется задача о нахождении функции v, удовлетворяющей уравнению*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad (x, y) \in D, \tag{39.1}$$

и краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 v + \beta_1 \partial_n v = h(\varphi) & \textit{при} \quad r = r_1, \ \ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], \\ \alpha_2 v + \beta_2 \partial_n v = q(\varphi) & \textit{при} \quad r = r_2, \ \ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], \\ \alpha_3 v + \beta_3 r \partial_n v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = \varphi_1, \ r \in [r_1, r_2], \\ \alpha_4 v + \beta_4 r \partial_n v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = \varphi_2, \ r \in [r_1, r_2]. \end{cases} \tag{39.2}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2, 3, 4$ и ∂_n – производная по внешней нормали.

Здесь мы позволили себе дать упрощенное определение. Более точно, в правой части третьего и четвертого уравнений краевого условия (39.2) можно было написать произвольные функции, зависящие от r. Однако, ради упрощения изложения, мы позволим себе не останавливаться на этом случае.

Как отмечалось ранее, задача (39.1) – (39.2) не всегда разрешима. Если известно, что задача (39.1) – (39.2) разрешима, для ее решения применяют метод разделения переменных.

Решение строится в три шага.

(1) Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta v(r,\varphi)=0, \quad \begin{cases} \alpha_3 v+\beta_3 r\partial_n v=0 & \text{при} \quad \varphi=\varphi_1,\ r\in[r_1,r_2], \\ \alpha_4 v+\beta_4 r\partial_n v=0 & \text{при} \quad \varphi=\varphi_2,\ r\in[r_1,r_2]. \end{cases} \tag{39.3}$$

Будем искать всевозможные решения задачи (39.3) вида

$$v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi). \tag{39.4}$$

Подставляя представление (39.4) в уравнение (39.3), получим

$$\frac{1}{r}\left(rR'(r)\right)'\Phi(\varphi)+\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)=0,$$

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \tag{39.5}$$

Левая часть в равенстве (39.5) зависит только от переменной r, в то время как правая часть зависит только от переменной φ. Такое возможно только если оба отношения равны некоторой постоянной, обозначим ее λ. В результате уравнения на неизвестные функции R и Φ разделились

$$-\Phi''(\varphi)=\lambda\Phi(\varphi), \tag{39.6}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)=\lambda R(r). \tag{39.7}$$

Подставляя (39.4) в краевые условия (39.3), найдем

$$\begin{cases} \alpha_3\Phi(\varphi_1)-\beta_3\Phi'(\varphi_1)=0, \\ \alpha_4\Phi(\varphi_2)+\beta_4\Phi'(\varphi_2)=0. \end{cases} \tag{39.8}$$

Здесь мы учли, что $\partial_n=-r^{-1}\partial_\varphi$ на границе $\varphi=\varphi_1$ и $\partial_n=r^{-1}\partial_\varphi$ на границе $\varphi=\varphi_2$.

Собирая уравнение (39.6) и краевые условия (39.8) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi)=\lambda\Phi(\varphi), \\ \alpha_3\Phi(\varphi_1)-\beta_3\Phi'(\varphi_1)=0, \\ \alpha_4\Phi(\varphi_2)+\beta_4\Phi'(\varphi_2)=0. \end{cases} \tag{39.9}$$

Пусть λ_n – собственные значения и Φ_n – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (39.9).

Уравнение (39.7) принимает вид

$$r^2R''(r)+rR'(r)=\lambda_n R(r). \tag{39.10}$$

Общее решение уравнения (39.10) имеет вид[11]

$$\begin{aligned} &R_n(r)=A_n r^{\sqrt{\lambda_n}}+B_n r^{-\sqrt{\lambda_n}}, && \text{при } \lambda_n\neq 0, \\ &R_n(r)=A_n+B_n\ln(r), && \text{при } \lambda_n=0. \end{aligned} \tag{39.11}$$

Таким образом, мы нашли все решения задачи (39.3), представимые в виде (39.4). Эти решения можно переписать в виде $v_n(r,\varphi)=R_n(r)\Phi_n(\varphi)$.

[11](39.10) – уравнение Эйлера.

(2) Раскладываем функции h и q в ряд Фурье по собственным функциям $\Phi_n(\varphi)$ задачи Штурма-Лиувилля (39.9)

$$h(\varphi) = \sum_n h_n \Phi_n(\varphi), \quad q(\varphi) = \sum_n q_n \Phi_n(\varphi). \tag{39.12}$$

(3) Ищем решение задачи (39.1) – (39.2) в виде

$$v(r,\varphi) = \sum_n R_n(r)\Phi_n(\varphi). \tag{39.13}$$

Ряд (39.13) удовлетворяет уравнению (39.1) и третьему и четвертому уравнениям краевого условия (39.2). Осталось подобрать постоянные A_n и B_n (см. (39.11)) так, чтобы выполнялись первое и второе уравнения краевого условия (39.2).

Подставляя ряды (39.12) и (39.13) в первое и второе уравнения краевого условия (39.2), получим

$$\sum_n \left(\alpha_1 R_n(r_1) - \beta_1 R_n'(r_1)\right)\Phi_n(\varphi) = \sum_n h_n \Phi_n(\varphi),$$
$$\sum_n \left(\alpha_2 R_n(r_2) + \beta_2 R_n'(r_2)\right)\Phi_n(\varphi) = \sum_n q_n \Phi_n(\varphi).$$

Отсюда

$$\begin{cases} \alpha_1 R_n(r_1) - \beta_1 R_n'(r_1) = h_n, \\ \alpha_2 R_n(r_2) + \beta_2 R_n'(r_2) = q_n. \end{cases} \tag{39.14}$$

Системы уравнений (39.14) служат для определения постоянных A_n и B_n. Отметим, что исходная задача (39.1) – (39.2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы все системы уравнений (39.14).

∘ Решение задачи (39.1) – (39.2) выписывается в виде ряда (39.13).

Пример 39.2. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \tag{39.15}$$

$$\begin{cases} v = \sin(2\varphi) & \textit{при} \quad r = 1,\ \varphi \in [0,\pi], \\ v = \sin\varphi & \textit{при} \quad r = 2,\ \varphi \in [0,\pi], \\ v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = 0,\ r \in [1,2], \\ v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = \pi,\ r \in [1,2]. \end{cases} \tag{39.16}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta v = 0, \quad \begin{cases} v = 0 & \text{при} \quad \varphi = 0,\ r \in [1,2], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = \pi,\ r \in [1,2]. \end{cases} \tag{39.17}$$

Ищем решения задачи (39.17) вида

$$v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{39.18}$$

Подставляя представление (39.18) в уравнение (39.17), получим

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \tag{39.19}$$

Отсюда

$$-\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \tag{39.20}$$
$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r). \tag{39.21}$$

Подставляя (39.18) в краевые условия (39.17), найдем

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0. \tag{39.22}$$

Собирая уравнение (39.20) и краевые условия (39.22) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \\ \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{39.23}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (39.23) имеют вид $\Phi_n(\varphi) = \sin(n\varphi)$, $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Уравнение (39.21) принимает вид

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = n^2 R(r). \tag{39.24}$$

Общее решение уравнения (39.24) можно записать в виде

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}.$$

Таким образом, решения задачи (39.17), представимые в виде (39.18), можно записать в виде

$$v_n(r, \varphi) = (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin(n\varphi). \tag{39.25}$$

Шаг 2: Раскладываем функции $h(\varphi) = \sin(2\varphi)$ и $q(\varphi) = \sin\varphi$ в ряд Фурье по собственным функциям $\Phi_n(\varphi)$ задачи Штурма-Лиувилля (39.23). Данное разложение имеет элементарный вид

$$h(\varphi) = \sin(2\varphi) = \Phi_2(\varphi), \quad q(\varphi) = \sin\varphi = \Phi_1(\varphi). \tag{39.26}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (39.15) – (39.16) в виде конечного ряда Фурье. При этом разложение ведем только по тем собственным функциям, которые участвуют в разложениях (39.26), т. е. по Φ_1 и Φ_2,

$$v(r, \varphi) = (A_1 r + B_1 r^{-1}) \sin\varphi + (A_2 r^2 + B_2 r^{-2}) \sin(2\varphi). \tag{39.27}$$

Подставляя ряды (39.26) и (39.27) в первое и второе уравнения краевого условия (39.16), получим

$$(A_1 + B_1) \sin\varphi + (A_2 + B_2) \sin(2\varphi) = \sin(2\varphi),$$
$$\left(2A_1 + \frac{1}{2}B_1\right) \sin\varphi + \left(4A_2 + \frac{1}{4}B_2\right) \sin(2\varphi) = \sin\varphi.$$

Отсюда

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0, \\ 2A_1 + \frac{1}{2}B_1 = 1, \end{cases} \tag{39.28}$$

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 1, \\ 4A_2 + \frac{1}{4}B_2 = 0. \end{cases} \tag{39.29}$$

Решая системы (39.28) и (39.29), найдем

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2}{3}, \\ B_1 = -\frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -\frac{1}{15}, \\ B_2 = \frac{16}{15}. \end{cases}$$

Решение задачи (39.15), (39.16) имеет вид (39.27). □

Ответ: $v(r, \varphi) = \left(\frac{2r}{3} - \frac{2}{3r}\right) \sin\varphi + \left(\frac{16}{15r^2} - \frac{r^2}{15}\right) \sin(2\varphi)$.

Пример 39.3. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{39.30}$$

$$\begin{cases} v = 3\sin\varphi + \sin(3\varphi) & \textit{при} \quad r = \frac{1}{2},\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \partial_n v = \sin\varphi & \textit{при} \quad r = 1,\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = 0,\ r \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \partial_n v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},\ r \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{39.31}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta v = 0, \quad \begin{cases} v = 0 & \text{при} \quad \varphi = 0,\ r \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \partial_n v = 0 & \text{при} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},\ r \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{39.32}$$

Ищем решения задачи (39.32) вида

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{39.33}$$

Подставляя представление (39.33) в уравнение (39.32), получим

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \tag{39.34}$$

Отсюда

$$-\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \tag{39.35}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r). \tag{39.36}$$

Подставляя (39.33) в краевые условия (39.32), найдем

$$\Phi(0) = \Phi'(\pi/2) = 0. \tag{39.37}$$

Собирая уравнение (39.35) и краевые условия (39.37) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \\ \Phi(0) = \Phi'(\pi/2) = 0. \end{cases} \tag{39.38}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (39.38) имеют вид $\Phi_n(\varphi) = \sin((2n+1)\varphi)$, $\lambda_n = (2n+1)^2$, $n = 0, 1, \ldots$.

Уравнение (39.36) принимает вид

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = (2n+1)^2 R(r). \tag{39.39}$$

Общее решение уравнения (39.39) можно записать в виде

$$R_n(r) = A_n r^{2n+1} + B_n r^{-2n-1}.$$

Таким образом, решения задачи (39.32), представимые в виде (39.33), можно записать в виде

$$v_n(r, \varphi) = (A_n r^{2n+1} + B_n r^{-2n-1}) \sin((2n+1)\varphi). \tag{39.40}$$

Шаг 2: Раскладываем функции $h(\varphi) = 3\sin\varphi + \sin(3\varphi)$ и $q(\varphi) = \sin\varphi$ в ряд Фурье по собственным функциям $\Phi_n(\varphi)$ задачи Штурма-Лиувилля (39.38). Данное разложение имеет элементарный вид

$$h(\varphi) = \sin(2\varphi) = \Phi_2(\varphi), \quad q(\varphi) = \sin\varphi = \Phi_1(\varphi). \tag{39.41}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (39.30) – (39.31) в виде конечного ряда Фурье. При этом разложение ведем только по тем собственным функциям, которые участвуют в разложениях (39.41), т. е. по Φ_0 и Φ_1,

$$v(r,\varphi) = (A_1 r + B_1 r^{-1})\sin\varphi + (A_2 r^3 + B_2 r^{-3})\sin(3\varphi). \tag{39.42}$$

Подставляя ряды (39.41) и (39.42) в первое и второе уравнения краевого условия (39.31), и учитывая, что $\partial_n = \partial_r$ на границе $r = 1$, получим

$$\left(\frac{1}{2}A_1 + 2B_1\right)\sin\varphi + \left(\frac{1}{8}A_2 + 8B_2\right)\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi + \sin(3\varphi),$$
$$(A_1 - B_1)\sin\varphi + (3A_2 - 3B_2)\sin(3\varphi) = \sin\varphi.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A_1 + 2B_1 = 3, \\ A_1 - B_1 = 1, \end{cases} \tag{39.43}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8}A_2 + 8B_2 = 1, \\ 3A_2 - 3B_2 = 0. \end{cases} \tag{39.44}$$

Решая системы (39.43) и (39.44), найдем

$$\begin{cases} A_1 = 2, \\ B_1 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 = \frac{8}{65}, \\ B_2 = \frac{8}{65}. \end{cases}$$

Решение задачи (39.30), (39.31) имеет вид (39.42). □

Ответ: $v(r,\varphi) = \left(2r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi + \frac{8}{65}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right)\sin(3\varphi)$.

Пример 39.4. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad r \leqslant 2, \tag{39.45}$$

$$v = 2\sin\varphi + 3\cos(4\varphi) \quad \textit{при} \quad r = 2. \tag{39.46}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta v = 0, \quad v(r,\varphi) = v(r,\varphi + 2\pi). \tag{39.47}$$

Условие периодичности по φ необходимо для того, чтобы функция v была непрерывна в круге $r \leqslant 2$.[12] Ищем решения задачи (39.47) вида

$$v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{39.48}$$

Подставляя представление (39.48) в уравнение (39.47), получим

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \tag{39.49}$$

Отсюда

$$-\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \tag{39.50}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r). \tag{39.51}$$

Подставляя (39.48) в краевые условия (39.47), найдем

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \tag{39.52}$$

[12]Например, функция $v(\varphi) = \varphi$ при непрерывном продолжении вокруг начала координат против часовой стрелки получает приращение 2π и, таким образом, не является непрерывной в круге $r \leqslant 2$.

Собирая уравнение (39.50) и краевые условия (39.52) вместе, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \lambda\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \tag{39.53}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (39.53) имеют вид $\Phi_0^+(\varphi) = 1$, $\Phi_n^+(\varphi) = \cos(n\varphi)$, $\Phi_n^-(\varphi) = \sin(n\varphi)$, $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_n = n^2$ при $n \in \mathbb{N}$.

Уравнение (39.51) принимает вид

$$r^2R''(r) + rR'(r) = n^2R(r). \tag{39.54}$$

Общее решение уравнения (39.54) можно записать в виде

$$R_0(r) = A_0 + B_0\ln r, \quad R_n(r) = A_nr^n + B_nr^{-n} \text{ при } n \geqslant 1.$$

Заметим, что функции $\ln r$ и r^{-n} имеют особенность в точке $r = 0$. Поэтому они не являются непрерывными в круге $r \leqslant 2$ и должны быть исключены из рассмотрения. Таким образом, решения задачи (39.47), представимые в виде (39.48), можно записать в виде

$$v_0(r,\varphi) = a_0, \quad v_n(r,\varphi) = r^n\left(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\right) \text{ при } n \geqslant 1. \tag{39.55}$$

Шаг 2: Раскладываем функцию $q(\varphi) = 2\sin\varphi + 3\cos(4\varphi)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\Phi_n^+(\varphi)$, $\Phi_n^-(\varphi)$ задачи Штурма-Лиувилля (39.53). Данное разложение имеет элементарный вид

$$q(\varphi) = 2\sin\varphi + 3\cos(4\varphi) = 2\Phi_1^-(\varphi) + 3\Phi_4^+(\varphi). \tag{39.56}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (39.45) – (39.46) в виде конечного ряда Фурье. При этом разложение ведем только по тем собственным функциям, которые участвуют в разложениях (39.41), т. е. по Φ_1^- и Φ_4^+,

$$v(r,\varphi) = b_1r\sin\varphi + a_4r^4\cos(4\varphi). \tag{39.57}$$

Подставляя ряды (39.56) и (39.57) в краевое условие (39.46), получим

$$2b_1\sin\varphi + 16a_4\cos(4\varphi) = 2\sin\varphi + 3\cos(4\varphi)$$

Отсюда

$$b_1 = 1, \quad a_4 = \frac{3}{16}.$$

Решение задачи (39.45), (39.46) имеет вид (39.57). □

Ответ: $v(r,\varphi) = r\sin\varphi + \frac{3}{16}r^4\cos(4\varphi)$.

Домашнее задание:

Задача 39.5. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

$$\begin{cases} \partial_n v = 0 & \text{при} \quad r = 1, \quad \varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}], \\ v = \sin(2\varphi) & \text{при} \quad r = 2, \quad \varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = 0, \quad r \in [1,2], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2},\ r \in [1,2]. \end{cases}$$

Ответ: $v(r,\varphi) = \frac{4}{17}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\sin(2\varphi)$.

Задача 39.6. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

$$\begin{cases} v = \sin(4\varphi) & \text{при} \quad r = 1, \quad \varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}], \\ \partial_n v = \sin(2\varphi) - \sin(4\varphi) & \text{при} \quad r = 2, \quad \varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = 0, \quad r \in [1, 2], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2},\ r \in [1, 2]. \end{cases}$$

Ответ: $v(r, \varphi) = \frac{4}{17}\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\sin(2\varphi) + \frac{1}{257}\left(\frac{264}{r^4} - 7r^4\right)\sin(4\varphi)$.

Задача 39.7. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1,$$

$$\begin{cases} v = \cos\varphi + 2\sin\varphi - 15\cos(2\varphi) & \textit{при} \quad r = \frac{1}{2}, \\ v = 2\cos\varphi + \sin\varphi & \textit{при} \quad r = 1. \end{cases}$$

Ответ: $v(r, \varphi) = 2r\cos\varphi + \frac{1}{r}\sin\varphi + 4\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\cos(2\varphi)$.

Задача 39.8. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 3,\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant 0,$$

$$\begin{cases} v = \sin(3\varphi) & \textit{при} \quad r = 1, \quad \varphi \in [-\pi, 0], \\ \partial_n v = 0 & \textit{при} \quad r = 3, \quad \varphi \in [-\pi, 0], \\ v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = -\pi,\ r \in [1, 3], \\ v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = 0, \quad r \in [1, 3]. \end{cases}$$

Ответ: $v(r, \varphi) = \frac{1}{730}\left(r^3 + \frac{729}{r^3}\right)\sin(3\varphi)$.

Задача 39.9. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

$$\begin{cases} v = 0 & \textit{при} \quad r = 1,\ \varphi \in [0, \pi], \\ v = \cos(2\varphi) & \textit{при} \quad r = 2,\ \varphi \in [0, \pi], \\ \partial_n v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = 0,\ r \in [1, 2], \\ \partial_n v = 0 & \textit{при} \quad \varphi = \pi,\ r \in [1, 2]. \end{cases}$$

Ответ: $v(r, \varphi) = \frac{4}{15}\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\cos(2\varphi)$.

Задача 39.10. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,$$

$$\begin{cases} v = 1 - 7\sin(2\varphi) & \textit{при} \quad r = 1, \\ v = 2\sin(2\varphi) & \textit{при} \quad r = 2. \end{cases}$$

Ответ: $v(r, \varphi) = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left(r^2 - \frac{8}{r^2}\right)\sin(2\varphi)$.

40. 13-ая контрольная работа (задача: 13; 20 минут).

Вариант контрольной работы №13.

Задача 13. Решить уравнение Лапласа

$$\Delta v = 0 \quad \textit{при} \quad r \leqslant 2,$$
$$\partial_n v = 3\cos\varphi + 8\sin(2\varphi) \quad \textit{при} \quad r = 2.$$

Ответ: $v(r,\varphi) = c + 3r\cos\varphi + 2r^2\sin(2\varphi),\ c \in \mathbb{R}.$

Вариант контрольной работы №13.

Задача 13. Решить уравнение Лапласа

$$\Delta v = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$
$$\begin{cases} v = 3\sin\varphi + \sin(2\varphi) & \text{при} \quad r = 1,\ \ \varphi \in [0,\pi], \\ v = 4\sin(2\varphi) & \text{при} \quad r = 2,\ \ \varphi \in [0,\pi], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = 0,\ r \in [1,2], \\ v = 0 & \text{при} \quad \varphi = \pi,\ r \in [1,2]. \end{cases}$$

Ответ: $v(r,\varphi) = \left(\frac{4}{r} - r\right)\sin\varphi + r^2\sin(2\varphi).$

41. Уравнение Лапласа в сферически симметричных областях в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим сферически симметричную область $D \subset \mathbb{R}^3$. Примером такой области может служить шар, внешность сферы или шаровой слой. Напомним, что декартовы координаты (x, y, z) связаны со сферическими (r, θ, φ) формулами вида

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

где

$$r \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Оператор Лапласа в сферических координатах принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Мы позволим себе здесь подробно рассмотреть только задачи в шаровом слое. Решения же задач в шаре или внешности сферы проводятся с очевидными изменениями и будут приведены только в примерах.

Определение 41.1. *Краевой задачей для уравнения Лапласа в шаровом слое называется задача о нахождении функции u, удовлетворяющей уравнению*

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad \{r_1 < r < r_2\} \tag{41.1}$$

и краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = h(\theta, \varphi) & \text{при} \quad r = r_1, \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = q(\theta, \varphi) & \text{при} \quad r = r_2, \end{cases} \tag{41.2}$$

Здесь α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2$ и ∂_n – производная по внешней нормали.

Как и в двумерном случае, задача (41.1) – (41.2) не всегда разрешима. Мы позволим себе обсудить условия разрешимости позже. Если же известно, что задача (41.1) – (41.2) разрешима, для ее решения применяют метод разделения переменных.

Решение строится в три шага.

(1) Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad r_1 < r < r_2. \tag{41.3}$$

Будем искать всевозможные решения задачи (41.3) вида

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi). \tag{41.4}$$

Подставляя представление (41.4) в уравнение (41.3), получим

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R'(r))' Y(\theta, \varphi) + \frac{1}{r^2} R(r) \Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta, \varphi) = 0,$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$

Отсюда

$$\frac{r^2 R''(r) + 2r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}. \tag{41.5}$$

Левая часть в равенстве (41.5) зависит только от переменной r, в то время как правая зависит только от угловых переменных θ и φ. Такое возможно только если оба отношения равны некоторой постоянной, обозначим ее λ. В результате уравнения на неизвестные функции R и Y разделились

$$-\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) = \lambda Y(\theta,\varphi), \tag{41.6}$$

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) = \lambda R(r). \tag{41.7}$$

Заметим теперь, что мы ищем *дважды непрерывно дифференцируемые* решения задачи (41.3). Это означает, что решение $u(r,\theta,\varphi)$ должно быть 2π-периодическим по аргументу φ и оставаться ограниченным при $\theta = 0$ и π. Из сказанного следует, что уравнение (41.6) необходимо снабдить естественными краевыми условиями вида

$$\begin{cases} Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi), \\ |Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty. \end{cases} \tag{41.8}$$

Собирая уравнение (41.6) и краевые условия (41.8) вместе, получим следующую задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) = \lambda Y(\theta,\varphi), \\ Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi), \\ |Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty. \end{cases} \tag{41.9}$$

Решение задачи (41.9) также можно найти методом разделения переменных. Однако, мы здесь позволим себе не останавливаться на нем. Известно, что задача (41.9) имеет дискретный набор собственных значений

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{41.10}$$

и ее собственными функциями являются сферические функции Y_n. Подчеркнем, что они образуют базис в пространстве функций, определенных на сфере (более точно, в $L_2((0,\pi)\times(0,2\pi))$ с подходящим весом).

Сферические функции Y_n отвечающие собственному числу $\lambda_n = n(n+1)$ могут быть записаны в виде

$$Y_n(\theta,\varphi) = a_0P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta),$$

где $P_n(t)$ – полиномы Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}$$

и $P_n^{(k)}(t)$ – присоединенные полиномы Лежандра

$$P_n^{(k)}(t) = (1-t^2)^{k/2}\frac{d^kP_n(t)}{dt^k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Выпишем, ради удобства, несколько первых полиномов в явном виде

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta, \quad P_2^{(1)}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta, \quad P_3^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta\frac{15\cos^2\theta - 3}{2},$$

$$P_2^{(2)}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta, \quad P_3^{(2)}(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta.$$

Вернемся к уравнению (41.7), которое, с учетом (41.10), принимает вид

$$r^2R''(r) + rR'(r) = n(n+1)R(r). \tag{41.11}$$

Общее решение уравнения (41.11) имеет вид[13]

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1} \quad \text{при} \quad n = 0, 1, \dots. \tag{41.12}$$

Таким образом, мы нашли все решения задачи (41.3), представимые в виде (41.4). Эти решения можно переписать в виде

$$u_n(r,\theta,\varphi) = r^n Y_n(\theta,\varphi) + r^{-n-1}\tilde{Y}_n(\theta,\varphi), \quad n = 0, 1, \dots. \tag{41.13}$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты, участвующие в определении сферических функций $\tilde{Y}_n$ и Y_n, вообще говоря различны

$$\begin{aligned} Y_n(\theta,\varphi) &= a_0^n P_n(\cos\theta) + \textstyle\sum_{k=1}^n (a_k^n \cos k\varphi + b_k^n \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos\theta), \\ \tilde{Y}_n(\theta,\varphi) &= \tilde{a}_0^n P_n(\cos\theta) + \textstyle\sum_{k=1}^n (\tilde{a}_k^n \cos k\varphi + \tilde{b}_k^n \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{41.14}$$

(2) Раскладываем функции h и q в ряд по собственным функциям $Y_n(\theta,\varphi)$ задачи (41.9)

$$h(\theta,\varphi) = \sum_{n\geqslant 0} Y_n^{(h)}(\theta,\varphi), \quad q(\theta,\varphi) = \sum_{n\geqslant 0} Y_n^{(q)}(\theta,\varphi). \tag{41.15}$$

(3) Ищем решение задачи (41.1) – (41.2) в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(r,\theta,\varphi), \tag{41.16}$$

где u_n представляются в виде (41.13), (41.14). Ряд (41.16) удовлетворяет уравнению (41.1). Осталось подобрать постоянные, участвующие в определении Y_n и $\tilde{Y}_n$ (см. (41.14)), так, чтобы выполнялось краевое условие (41.2).

Подставляя ряды (41.15) и (41.16) в первое и второе уравнения краевого условия (41.2), получим систему уравнений вида

$$\sum_{n\geqslant 0} (\alpha_1 u_n(r_1,\theta,\varphi) - \beta_1 \partial_r u_n(r_1,\theta,\varphi)) = \sum_{n\geqslant 0} Y_n^{(h)}(\theta,\varphi),$$
$$\sum_{n\geqslant 0} (\alpha_2 u_n(r_2,\theta,\varphi) + \beta_2 \partial_r u_n(r_2,\theta,\varphi)) = \sum_{n\geqslant 0} Y_n^{(q)}(\theta,\varphi).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты перед функциями вида

$$\cos(k\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta), \quad \sin(k\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta),$$

получим систему уравнений для определения коэффициентов a_k^n, $\tilde{a}_k^n$, b_k^n и $\tilde{b}_k^n$. Отметим, что полученные системы уравнений разрешимы тогда и только тогда, когда разрешима исходная задача (41.1) – (41.2).

- ○ Решение задачи (41.1) – (41.2) выписывается в виде ряда (41.16).
- • Иногда удобнее начинать со второго шага решения. В этом случае, если ряды для $h(\theta,\varphi)$ и $q(\theta,\varphi)$ представляются конечным числом членов, решение также можно искать в виде конечного ряда.

Пример 41.2. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad 1 < r < 2, \quad \begin{cases} u = 3\cos\theta & \text{при} \quad r = 1, \\ u = 5 - \cos\theta & \text{при} \quad r = 2. \end{cases} \tag{41.17}$$

[13] (41.11) – уравнение Эйлера.

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Раскладываем функции $h(\theta,\varphi) = 3\cos\theta$ и $q(\theta,\varphi) = 5-\cos\theta$ в ряды по $Y_n(\theta,\varphi)$. Данное разложение имеет элементарный вид

$$\begin{aligned} h(\theta,\varphi) &= 3\cos\theta = 3P_1(\cos\theta), \\ q(\theta,\varphi) &= 5-2\cos\theta = 5P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta). \end{aligned} \tag{41.18}$$

Шаг 2: Из (41.18) следует, что в разложении (41.16), (41.13) следует оставить только члены, содержащие $P_0(\cos\theta)$ и $P_1(\cos\theta)$. Таким образом, решение задачи (41.17) будем искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = (a + br^{-1})P_0(\cos\theta) + (cr + dr^{-2})P_1(\cos\theta). \tag{41.19}$$

Еще раз обратим внимание на то, что в разложении (41.18) участвуют полиномы Лежандра с номерами 0 и 1, которые соответствуют сферическим функциям Y_0 и Y_1.

Шаг 3: Подставляя разложение (41.19) в граничные условия, и учитывая (41.18), получим

$$\begin{cases} u|_{r=1} = (a+b)P_0(\cos\theta) + (c+d)P_1(\cos\theta) = 3P_1(\cos\theta), \\ u|_{r=2} = (a+2^{-1}b)P_0(\cos\theta) + (2c+4^{-1}d)P_1(\cos\theta) = 5P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta). \end{cases}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты перед $P_0(\cos\theta)$ и $P_1(\cos\theta)$, получим

$$P_0(\cos\theta):\begin{cases} a+b=0, \\ a+2^{-1}b=5, \end{cases} \qquad P_1(\cos\theta):\begin{cases} c+d=3, \\ 2c+4^{-1}d=-1. \end{cases} \tag{41.20}$$

Решая системы (41.20), найдем

$$\begin{cases} a=10, \\ b=-10, \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-1, \\ d=4, \end{cases}$$

откуда

$$u(r,\theta,\varphi) = 10(1-r^{-1})P_0(\cos\theta) + (4r^{-2}-r)P_1(\cos\theta) = 10\left(1-\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{4}{r^2}-r\right)\cos\theta. \ \square$$

Ответ: $u = 10\left(1-\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{4}{r^2}-r\right)\cos\theta$.

Пример 41.3. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad 1<r<3, \qquad \begin{cases} u = -2\cos\varphi\sin\theta & \textit{при} \quad r=1, \\ u = 26\cos\theta & \textit{при} \quad r=3. \end{cases} \tag{41.21}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Раскладываем функции $h(\theta,\varphi) = -2\cos\varphi\sin\theta$ и $q(\theta,\varphi) = 8\cos\theta$ в ряды по $Y_n(\theta,\varphi)$

$$\begin{aligned} h(\theta,\varphi) &= -2\cos\varphi\sin\theta = -2P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi, \\ q(\theta,\varphi) &= 26\cos\theta = 26P_1(\cos\theta). \end{aligned} \tag{41.22}$$

Шаг 2: Из (41.18) следует, что решение задачи (41.17) можно искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = (ar + br^{-2})P_1(\cos\theta) + (cr + dr^{-2})P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi. \tag{41.23}$$

Обратим внимание на то, что оба полинома Лежандра, участвующие в разложении (41.23), соответствуют сферической функции Y_1. При этом, при формировании разложения (41.23) каждый из этих полиномов был домножен на свою функцию $R_1(r)$ (для первого члена в качестве произвольных коэффициентов были взяты a и b, для второго – c и d).

Шаг 3: Подставляя разложение (41.23) в граничные условия, и учитывая (41.22), получим

$$\begin{cases} u|_{r=1} = (a+b)P_1(\cos\theta) + (c+d)P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi = -2P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi, \\ u|_{r=3} = (3a+9^{-1}b)P_1(\cos\theta) + (3c+9^{-1}d)P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi = 26P_1(\cos\theta). \end{cases}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты перед $P_1(\cos\theta)$ и $P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi$, получим

$$P_1(\cos\theta):\begin{cases} a+b=0, \\ 3a+9^{-1}b=26, \end{cases} \qquad P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi:\begin{cases} c+d=-2, \\ 3c+9^{-1}d=0. \end{cases} \tag{41.24}$$

Решая системы (41.24), найдем

$$\begin{cases} a=9, \\ b=-9, \end{cases} \qquad \begin{cases} c=\frac{1}{13}, \\ d=-\frac{27}{13}, \end{cases}$$

откуда

$$u(r,\theta,\varphi) = 9\left(r-\frac{1}{r^2}\right)P_1(\cos\theta) + \frac{1}{13}\left(r-\frac{27}{r^2}\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi. \ \square$$

Ответ: $u = 9\left(r-\frac{1}{r^2}\right)P_1(\cos\theta) + \frac{1}{13}\left(r-\frac{27}{r^2}\right)P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi.$

Пример 41.4. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad r<1, \quad u = 3\cos^2\theta \quad \textit{при} \quad r=1. \tag{41.25}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Раскладываем функцию $q(\theta,\varphi) = 3\cos^2\theta$ в ряд по $Y_n(\theta,\varphi)$

$$q(\theta,\varphi) = 3\cos^2\theta = 2P_2(\cos\theta) + P_0(\cos\theta). \tag{41.26}$$

Шаг 2: Из (41.26) следует, что решение задачи (41.25) можно искать в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = (a+br^{-1})P_0(\cos\theta) + (cr^2+dr^{-3})P_2(\cos\theta). \tag{41.27}$$

Заметим теперь, что мы ищем решение в шаре $r<1$, которое должно оставаться ограниченным при $r=0$. Разложение (41.27) будет удовлетворять этому требованию, если положить $b=0$ и $d=0$. Окончательно, ищем решение в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = aP_0(\cos\theta) + cr^2P_2(\cos\theta). \tag{41.28}$$

Шаг 3: Подставляя разложение (41.28) в граничное условие, и учитывая (41.26), получим

$$u|_{r=1} = aP_0(\cos\theta) + cP_2(\cos\theta) = 2P_2(\cos\theta) + P_0(\cos\theta).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты перед $P_0(\cos\theta)$ и $P_2(\cos\theta)$, получим

$$P_1(\cos\theta): a=1, \quad P_2(\cos\theta): c=2,$$

$$u(r,\theta,\varphi) = P_0(\cos\theta) + 2r^2P_2(\cos\theta). \ \square$$

Ответ: $u = \cos\theta + r^2(3\cos^2\theta - 1).$

Пример 41.5. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad r<2, \quad \partial_n u = A + 3\sin 2\theta\cos\varphi \quad \textit{при} \quad r=2, \tag{41.29}$$

где A – некоторая постоянная.

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Раскладываем функцию $q(\theta, \varphi) = A + 3\sin 2\theta \cos\varphi$ в ряд по $Y_n(\theta, \varphi)$

$$q(\theta, \varphi) = A + 3\sin 2\theta \cos\varphi = AP_0(\cos\theta) + 2P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi. \tag{41.30}$$

Шаг 2: Из (41.30) следует, что решение задачи (41.29) можно искать в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = (a + br^{-1})P_0(\cos\theta) + (cr^2 + dr^{-3})P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi. \tag{41.31}$$

Для того, чтобы решение оставалось ограниченным при $r = 0$, необходимо положить $b = 0$ и $d = 0$. Окончательно, ищем решение в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = aP_0(\cos\theta) + cr^2 P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi. \tag{41.32}$$

Шаг 3: Подставляя разложение (41.32) в граничное условие, и учитывая (41.30), получим

$$\partial_n u|_{r=2} = \partial_r u|_{r=2} = 4cP_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi = AP_0(\cos\theta) + 2P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты перед $P_0(\cos\theta)$ и $P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi$, получим

$$P_0(\cos\theta) : A = 0, \quad P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi : c = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, задача (41.29) разрешима только при $A = 0$. При этом решение оказывается не единственно: постоянная a может быть выбрана произвольным образом

$$u(r, \theta, \varphi) = aP_0(\cos\theta) + \frac{1}{2}r^2 P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi. \ \square$$

Ответ: $A = 0$, $u = a + \frac{3}{4}r^2 \sin 2\theta \cos\varphi$, $a \in \mathbb{R}$.

Домашнее задание:

Задача 41.6. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad \frac{1}{3} < r < 1, \quad \begin{cases} u = 0 & \text{\textit{при}} \quad r = \frac{1}{3}, \\ u = 2\cos\theta & \text{\textit{при}} \quad r = 1. \end{cases}$$

Ответ: $u = \left(3 - \frac{1}{r}\right)\cos\theta$.

Задача 41.7. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad r < \frac{1}{2}, \quad u = 3\cos 2\theta + \cos\theta \quad \text{\textit{при}} \quad r = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $u = -1 + 2r\cos\theta + 8r^2(3\cos^2\theta - 1)$.

Задача 41.8. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad 1 < r < 2, \quad \begin{cases} u = \sin 2\theta \sin\varphi & \text{\textit{при}} \quad r = 1, \\ \partial_n u = \sin^2\theta \sin 2\varphi & \text{\textit{при}} \quad r = 2. \end{cases}$$

Ответ: $u = \frac{16}{67}\left(r^2 - \frac{1}{r^3}\right)\sin^2\theta \sin 2\varphi + \frac{1}{67}\left(3r^2 + \frac{64}{r^3}\right)\sin 2\theta \sin\varphi$.

Задача 41.9. *Решить уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r < 3, \quad u - \partial_n u = 4\sin\theta\cos\varphi \quad \text{при} \quad r = 3.$$

Ответ: $u = 2r\sin\theta\cos\varphi + r^3 Y_3(\theta, \varphi)$, где $Y_3(\theta, \varphi)$ – сферическая функция с произвольными коэффициентами.

Задача 41.10. *Найти убывающее на бесконечности решение уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r > 3, \quad 2u + 3\partial_n u = 1 + 4\cos\theta \quad \text{при} \quad r = 3.$$

Ответ: $u = \frac{1}{r} + \frac{9}{r^2}\cos\theta$.

42. 14-ая контрольная работа (задача: 14; 20 минут).

Вариант контрольной работы №14.

Задача 14. Решить уравнение Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{при} \quad r \leqslant 2, \\ u = 5\cos^3\theta & \text{при} \quad r = 2. \end{cases}$$

Полиномы Лежандра: $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Ответ:

$$5\cos^3\theta = 2P_3(\cos\theta) + 3P_1(\cos\theta), \quad u = \frac{3}{2} r P_1(\cos\theta) + \frac{1}{4} r^3 P_3(\cos\theta).$$

Вариант контрольной работы №14.

Задача 14. Решить уравнение Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{при} \quad r \leqslant 2, \\ u = 4 - \cos(2\theta) & \text{при} \quad r = 2. \end{cases}$$

Полиномы Лежандра: $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Ответ:

$$4 - \cos(2\theta) = \frac{13}{3} P_0 - \frac{4}{3} P_2(\cos\theta), \quad u = \frac{13}{3} P_0(\cos\theta) - \frac{1}{3} r^2 P_2(\cos\theta).$$

Вариант контрольной работы №14.

Задача 14. Решить уравнение Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{при} \quad r \geqslant 1, \\ u = \sin^2\theta & \text{при} \quad r = 1, \end{cases} \quad |u| < \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Полиномы Лежандра: $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Ответ:

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3}(P_0 - P_2(\cos\theta)), \quad u = \left(\frac{2}{3} - a + \frac{a}{r}\right) P_0(\cos\theta) - \frac{2}{3r^3} P_2(\cos\theta).$$

43. Оператор Лапласа в цилиндрической области.

Напомним, что декартовы координаты (x, y, z) связаны со цилиндрическими (h, ρ, φ) формулами вида

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases}$$

где

$$\rho \in [0, +\infty), \quad h \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}.$$

Пример 43.1. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 4,\ z \in (0, 1)\} \tag{43.1}$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad z = 0, & x^2 + y^2 < 4, \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad z = 1, & x^2 + y^2 < 4, \\ u = 0 & \text{при} \quad z \in (0, 1), & x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \tag{43.2}$$

Решение. Будем искать решение уравнения (43.1) в виде

$$u(\rho, \varphi, h) = R(\rho)\Phi(\varphi)H(h). \tag{43.3}$$

Подставляя (43.3) в уравнение (43.1), получим

$$-\frac{1}{\rho}\Phi(\varphi)\left(\rho R'(\rho)\right)' H(h) - \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi)H(h) - R(\rho)\Phi(\varphi)H''(h) = \lambda R(\rho)\Phi(\varphi)H(h).$$

Отсюда, умножая на $\frac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)H(h)}$, найдем

$$-\frac{\rho\left(\rho R'(\rho)\right)'}{R(\rho)} - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} - \frac{H''(h)}{H(h)}\rho^2 = \lambda\rho^2.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{\rho\left(\rho R'(\rho)\right)'}{R(\rho)} + \lambda\rho^2 + \frac{H''(h)}{H(h)}\rho^2. \tag{43.4}$$

Поскольку выражение левая часть в равенстве (43.4) зависит только от переменной φ, а правая только от переменных ρ и h, то оба отношения равны некоторой постоянной, которую удобно обозначить через μ. В результате, получим

$$-\Phi''(\varphi) = \mu\Phi(\varphi), \tag{43.5}$$

$$\frac{\rho\left(\rho R'(\rho)\right)'}{R(\rho)} + \frac{H''(h)}{H(h)}\rho^2 + \lambda\rho^2 = \mu. \tag{43.6}$$

Перепишем уравнение (43.6) в виде

$$\frac{\left(\rho R'(\rho)\right)'}{\rho R(\rho)} + \frac{\lambda\rho^2 - \mu}{\rho^2} = -\frac{H''(h)}{H(h)}. \tag{43.7}$$

Выражение в левой части равенства (43.7) зависит только от переменной ρ, а в правой – только от h. Следовательно, оба выражения равны некоторой постоянной, которую мы обозначим ν. В результате, получим

$$-H''(h) = \nu H(h), \tag{43.8}$$

$$\frac{(\rho R'(\rho))'}{\rho} + \frac{\lambda\rho^2 - \mu}{\rho^2} R(\rho) = \nu R(\rho). \tag{43.9}$$

Учитывая граничные условия, найдем задачу Штурма-Лиувилля для функции Φ

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \mu\Phi(\varphi), \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases} \tag{43.10}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (43.10) имеют вид,

$$\Phi_m(x) = e^{im\varphi}, \ \mu_m = m^2, \ m \in \mathbb{Z}. \tag{43.11}$$

Задача Штурма-Лиувилля для функции H имеет вид

$$\begin{cases} -H''(h) = \nu H(h), \\ H'(0) = H'(1) = 0. \end{cases} \tag{43.12}$$

Собственные функции и собственные значения задачи (43.12) имеют вид

$$H_n(h) = \cos(\pi n h), \ \nu_n = (\pi n)^2, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{43.13}$$

Подставляя (43.11) и (43.11) в (43.9), получим сингулярную задачу Штурма-Лиувилля для функции R

$$\begin{cases} \rho\,(\rho R'(\rho))' + (\alpha\rho^2 - m^2)R(\rho) = 0, \\ |R(0)| < \infty, \ R(2) = 0, \end{cases} \tag{43.14}$$

где $\alpha = \lambda - (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{Z}$. Общее решение уравнения (43.14), удовлетворяющее условию $|R(0)| < \infty$ имеет вид

$$R(\rho) = J_{|m|}\left(\sqrt{\alpha}\,\rho\right).$$

Отсюда следует, что собственные функции и собственные значения задачи (43.14) имеют вид

$$R_{mk}(\rho) = J_{|m|}\left(\frac{\mu_k^{(|m|)}}{2}\rho\right), \ \alpha_k = \left(\frac{\mu_k^{(|m|)}}{2}\right)^2, \ k \in \mathbb{N}, \tag{43.15}$$

где $\mu_k^{(|m|)}$ – положительные решения уравнения $J_{|m|}(\mu) = 0$.

Собирая формулы (43.3), (43.11), (43.13) и (43.15) вместе, получим, что собственные функции и собственные значения задачи (43.1), (43.2) имеют вид

$$u_{nmk} = J_{|m|}\left(\frac{\mu_k^{(|m|)}}{2}\rho\right)\cos(\pi n z)e^{im\varphi}, \ \lambda_{nmk} = \left(\frac{\mu_k^{(|m|)}}{2}\right)^2 + (\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ m \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}. \ \square$$

Ответ:

$$u_{nmk} = J_{|m|}\left(\frac{\mu_k^{(|m|)}}{2}\rho\right)\cos(\pi n z)e^{im\varphi}, \lambda_{nmk} = \left(\frac{\mu_k^{(|m|)}}{2}\right)^2 + (\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ m \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N},$$

где $\mu = \mu_k^{(|m|)}$ – положительные решения уравнения $J_{|m|}(\mu) = 0$ и $J_{|m|}$ – функция Бесселя.

Домашнее задание:

Задача 43.2. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \{(x,y,z) \mid x^2+y^2<1,\ z\in(0,\pi)\}$$

$$\begin{cases} u=0 & \text{при} \quad z=0, \quad x^2+y^2<1, \\ u=0 & \text{при} \quad z=\pi, \quad x^2+y^2<1, \\ \partial u=0 & \text{при} \quad z\in(0,\pi), \quad x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Ответ:

Задача 43.3. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \{(x,y,z) \mid x^2+y^2<1,\ y>0,\ z\in(0,\pi)\}$$

$$\begin{cases} u=0 & \text{при} \quad z=0, \quad x^2+y^2<1,\ y>0, \\ u=0 & \text{при} \quad z=\pi, \quad x^2+y^2<1,\ y>0, \\ u=0 & \text{при} \quad z\in(0,\pi), \quad x^2+y^2=1,\ y>0, \\ u=0 & \text{при} \quad z\in(0,\pi), \quad x\in(-1,1),\ y=0. \end{cases}$$

Ответ:

Задача 43.4. *Найти собственные значения и собственные функции задачи*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \{(x,y,z) \mid x^2+y^2<1,\ y>0,\ z\in(0,\pi)\}$$

$$\begin{cases} u=0 & \text{при} \quad z=0, \quad x^2+y^2<1,\ y>0, \\ \partial u=0 & \text{при} \quad z=\pi, \quad x^2+y^2<1,\ y>0, \\ u=0 & \text{при} \quad z\in(0,\pi), \quad x^2+y^2=1,\ y>0, \\ \partial u=0 & \text{при} \quad z\in(0,\pi), \quad x\in(-1,1),\ y=0. \end{cases}$$

Ответ:

44. 15-ая контрольная работа (задача: 15; 20 минут).

Вариант контрольной работы №15.

Задача 15. Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в цилиндре

$$-\Delta u = \lambda u, \quad (x,y,z) \in \{(x,y,z) \mid \rho < 1,\ z \in (0,1)\},$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad z = 0,\ \rho \in [0,1], \\ u = 0 & \text{при} \quad z = 1,\ \rho \in [0,1], \\ u = 0 & \text{при} \quad \rho = 1,\ z \in [0,1]. \end{cases}$$

Разложить гладкую функцию f в ряд Фурье по найденным собственным функциям.

Ответ:

$$u_{nmk} = J_{|m|}\left(\mu_k^{(|m|)}\rho\right)\sin(\pi n z)e^{im\varphi},$$

$$\lambda_{nmk} = \left(\mu_k^{(|m|)}\right)^2 + (\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N},$$

где $\mu = \mu_k^{(|m|)}$ – положительные решения уравнения $J_{|m|}(\mu) = 0$ и $J_{|m|}$ – функция Бесселя.

$$f(x,y,z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} f_{nmk}u_{nmk}(x,y,z),$$

где

$$f_{nmk} = \frac{(f, u_{nmk})}{\|u_{nmk}\|^2}, \quad (f,g) = \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi\ f\,\overline{g}.$$

Вариант контрольной работы №15.

Задача 15. Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в цилиндре

$$-\Delta u = \lambda u, \quad (x,y,z) \in \{(x,y,z) \mid \rho < 2,\ z \in (0,1)\},$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad z = 0,\ \rho \in [0,2], \\ u = 0 & \text{при} \quad z = 1,\ \rho \in [0,2], \\ u + \partial_n u = 0 & \text{при} \quad \rho = 2,\ z \in [0,1]. \end{cases}$$

Разложить гладкую функцию f в ряд Фурье по найденным собственным функциям.

Ответ:

$$u_{nmk} = J_{|m|}\left(\mu_k^{(|m|)}\rho\right)\cos(\alpha_n z)e^{im\varphi}, \quad \alpha_n = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

$$\lambda_{nmk} = \left(\mu_k^{(|m|)}\right)^2 + \alpha_n^2, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N},$$

где $\mu = \mu_k^{(|m|)}$ – положительные решения уравнения $\mu J'_{|m|}(2\mu) + J_{|m|}(2\mu) = 0$ и $J_{|m|}$ – функция Бесселя.

$$f(x,y,z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} f_{nmk}u_{nmk}(x,y,z),$$

где

$$f_{nmk} = \frac{(f, u_{nmk})}{\|u_{nmk}\|^2}, \quad (f,g) = \int_0^2 \rho\, d\rho \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi\ f\,\overline{g}.$$

45. Оператор Лапласа в шаре в $\mathbb{R}^3$.

Напомним, что декартовы координаты (x, y, z) связаны со цилиндрическими (r, φ, θ) формулами вида

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

где

$$r \in [0, +\infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad .$$

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Домашнее задание:

Задача 45.1. *Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в трехмерном шаре*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & r < 1, \\ \partial_n u = 0, & r = 1. \end{cases}$$

Ответ:

Задача 45.2. *Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в трехмерном шаре*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & r < 3, \\ u + \partial_n u = 0, & r = 3. \end{cases}$$

Ответ:

Задача 45.3. *Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в трехмерном шаре*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & r < 4, \\ u - 2\partial_n u = 0, & r = 4. \end{cases}$$

Ответ:

46. 16-ая контрольная работа (задача: 16; 20 минут).

Вариант контрольной работы №16.

Задача 16. Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в трехмерном шаре

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & r < 2, \\ u = 0, & r = 2. \end{cases}$$

Разложить гладкую функцию f в ряд Фурье по найденным собственным функциям.

Ответ:

$$u_{lmk} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}\left(\mu_k^{(l+1/2)} r\right) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$\lambda_{lmk} = \left(\mu_k^{(l+1/2)}\right)^2, \quad l \in \mathbb{Z}_+,\ m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l,\ k \in \mathbb{N},$$

где $\mu = \mu_k^{(l+1/2)}$ – положительные решения уравнения $J_{l+1/2}(2\mu) = 0$ и $J_{l+1/2}$ – функция Бесселя.

$$f(x, y, z) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{k=1}^{+\infty} f_{lmk} u_{lmk}(x, y, z),$$

где

$$f_{lmk} = \frac{(f, u_{lmk})}{\|u_{lmk}\|^2}, \quad (f, g) = \int\limits_0^2 r^2\, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\ f\, \overline{g}.$$

Вариант контрольной работы №16.

Задача 16.

47. Уравнение теплопроводности на отрезке.

Определение 47.1. *Задачей Коши для уравнения теплопроводности на отрезке с однородными краевыми условиями называется задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{47.1}$$

краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 u_x\big|_{x=a} = 0, \\ \alpha_2 u + \beta_2 u_x\big|_{x=b} = 0, \end{cases} \tag{47.2}$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{47.3}$$

Здесь f и φ – заданные функции, α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2$ и a – положительная постоянная.

При некоторых условиях на гладкость функций f и φ, которые мы позволим себе здесь не обсуждать, решение задачи Коши (47.1) – (47.3) существует и единственно.

Решение задачи (47.1) – (47.3) строится в три шага.

(1) Находим собственные значения λ_n и собственные функции u_n задачи Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad \begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 u_x\big|_{x=a} = 0, \\ \alpha_2 u + \beta_2 u_x\big|_{x=b} = 0. \end{cases} \tag{47.4}$$

(2) Раскладываем функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (47.4)

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) u_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_n \varphi_n u_n(x). \tag{47.5}$$

где функция f_n и постоянные φ_n могут быть найдены по формулам, см. пример 31.7, на стр. 107

$$f_n(t) = \frac{(f, u_n)}{(u_n, u_n)}, \quad \varphi_n = \frac{(\varphi, u_n)}{(u_n, u_n)}, \quad (u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\, dx.$$

(3) Ищем решение задачи (47.1) – (47.3) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) u_n(x), \tag{47.6}$$

где функции T_n подлежат определению. Так как все функции u_n удовлетворяют краевым условиям (47.2), то и ряд (47.6) удовлетворяет условиям (47.2). Осталось удовлетворить уравнению (47.1) и начальному условию (47.3). Подставим ряды (47.5) и (47.6) в уравнение (47.1) и начальное условие (47.3). В результате получим

$$\sum_n T_n'(t) u_n(x) = -a^2 \sum_n \lambda_n T_n(t) u_n(x) + \sum_n f_n(t) u_n(x),$$
$$\sum_n T_n(0) u_n(x) = \sum_n \varphi_n u_n(x).$$

Отсюда находим, что функции T_n обязаны удовлетворять следующей задаче Коши[14]

$$\begin{cases} T_n'(t) = -a^2\lambda_n T_n(t) + f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \tag{47.7}$$

Решение задачи Коши (47.7) существует и единственно.

∘ Ответ выписывается в виде ряда (47.6).

Пример 47.2. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 1. \end{cases} \tag{47.8}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Собственные функции и собственные числа задаются равенствами, см. пример 31.4 на стр. 104,

$$u_n(x) = \sin(nx), \ \lambda_n = n^2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2: Раскладываем функцию $\varphi(x) = 1$ в ряд Фурье по собственным функциям u_n. Это разложение имеет вид, см. пример 31.7 на стр. 107,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x), \quad \varphi_n = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}\,. \tag{47.9}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (47.8) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) u_n(x). \tag{47.10}$$

Подставим ряды (47.9) и (47.10) в уравнение (47.8). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) u_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 T_n(t) u_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n(x).$$

Отсюда находим уравнения на T_n

$$T_n'(t) = -n^2 T_n(t), \tag{47.11}$$

$$T_n(0) = \varphi_n. \tag{47.12}$$

Общее решение уравнения (47.11) имеет вид[15] $A_n e^{-n^2 t}$, где A_n произвольная постоянная. Постоянная A_n находится из начального условия (47.12)

$$T_n(0) = A_n\, e^{-n^2 t}\Big|_{t=0} = A_n = \varphi_n.$$

Окончательно,

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-n^2 t} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}\, e^{-n^2 t}. \tag{47.13}$$

---

[14] При получении уравнений на T, мы пользуемся тем фактом, что два ряда Фурье совпадают только если совпадают коэффициенты при соответствующих базисных функциях (в данном случае при u_n).

[15] Общее решение уравнения (47.11) можно искать в виде $e^{\alpha t}$.

Подставляя (47.13) в разложение (47.10), получим решение задачи (47.8). □

Ответ: $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\, e^{-n^2 t}\sin(nx)$.

Пример 47.3. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2t\sin(x), \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0, \\ u|_{t=0} = 3\sin 3x. \end{cases} \tag{47.14}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0.$$

Собственные функции и собственные числа задаются равенствами, см. задачу 31.8 на стр. 107,

$$u_n(x) = \sin\left((2n+1)x\right),\ \lambda_n = (2n+1)^2,\ n = 0, 1, \ldots .$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = 2t^2\sin(x)$ и $\varphi(x) = 3\sin(3x)$ в ряд Фурье по собственным функциям u_n. Эти разложения имеют элементарный вид

$$f(x,t) = 2tu_0(x), \quad \varphi(x) = 3u_1(x). \tag{47.15}$$

Шаг 3: Ищем решение задачи (47.14) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)u_n(x). \tag{47.16}$$

Подставим ряды (47.15) и (47.16) в уравнение (47.14). В результате получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)u_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n T_n(t)u_n(x) + 2tu_0(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)u_n(x) = 3u_1(x).$$

Отсюда находим уравнения на T_n

$$\begin{cases} T_0'(t) + T_0(t) = 2t, \\ T_0(0) = 0, \end{cases} \tag{47.17}$$

$$\begin{cases} T_1'(t) + 9\,T_1(t) = 0, \\ T_1(0) = 3, \end{cases} \tag{47.18}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0, \end{cases} \quad \text{при } n = 2, 3, \ldots . \tag{47.19}$$

Найдем решение задачи (47.17). Частное решение уравнения (47.17) можно найти в виде полинома первого порядка. Подставляя выражение $at+b$ в уравнение (47.17), получим

$$a + at + b = 2t \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ a = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -2. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $T_0'(t) + T_0(t) = 0$ имеет вид $T_0(t) = A_0e^{-t}$. В итоге общее решение уравнения (47.17) имеет вид

$$T_0(t) = A_0e^{-t} + 2t - 2.$$

Постоянная A_0 находится из начального условия $T_0(0) = 0$, откуда

$$T_0(0) = A_0 - 2 = 0 \Longleftrightarrow A_0 = 2.$$

Отсюда

$$T_0(t) = 2(e^{-t} - 1 + t).$$

Найдем решение задачи (47.18). Общее решение уравнения (47.18) имеет вид

$$T_1(t) = A_1 e^{-9t}.$$

Постоянная A_1 находится из начального условия $T_1(0) = 3$, откуда

$$T_1(0) = A_1 = 3.$$

Отсюда

$$T_1(t) = 3e^{-9t}.$$

Найдем решение задачи (47.19). Общее решение уравнения (47.19) имеет вид

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda t}.$$

Постоянная A_n находится из начального условия $T_n(0) = 0$, откуда

$$T_n(0) = A_n = 0.$$

Отсюда

$$T_n(t) = 0.$$

Наконец, решение задачи (47.14) выписывается в виде ряда (47.16). □

Ответ: $u(x,t) = 2(e^{-t} - 1 + t)\sin x + 3e^{-9t}\sin(3x)$.

Замечание 47.4. *Отметим, что решение и было получено в виде* конечного *ряда благодаря тому, что разложения функций f и φ в ряды Фурье также содержали лишь конечное число членов. Более того, разложение для решения и велось только по тем собственным функциям u_n, которые участвовали в разложениях для f и φ.*

Пример 47.5. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\sin t \cos x, \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0, \\ u|_{t=0} = \cos x - \cos(5x). \end{cases} \tag{47.20}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0.$$

Собственные функции и собственные числа задаются равенствами, см. задачу 31.11 на стр. 107,

$$u_n(x) = \cos\left((2n+1)x\right), \ \lambda_n = (2n+1)^2, \ n = 0, 1, \dots .$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = 2\sin t \cos x$ и $\varphi(x) = \cos x - \cos(5x)$ в ряд Фурье по собственным функциям u_n. Эти разложения имеют вид

$$f(x,t) = 2\sin(t)u_0(x), \quad \varphi(x) = u_0(x) - u_2(x). \tag{47.21}$$

Шаг 3: Так как в разложениях (47.21) участвуют только функции u_0 и u_2, то решение задачи (47.20) можно искать в виде, см. замечание 47.4,

$$u(x,t) = T_0(t)u_0(x) + T_2(t)u_2(x) = T_0(t)\cos x + T_2(t)\cos(5x). \tag{47.22}$$

Подставим ряды (47.21) и (47.22) в уравнение (47.20). В результате получим

$$T_0'(t)\cos x + T_2'(t)\cos(5x) = -T_0(t)\cos x - 25T_2(t)\cos(5x) + 2\sin t\cos x,$$

$$T_0(0)\cos x + T_2(0)\cos(5x) = \cos x - \cos(5x).$$

Отсюда находим уравнения на T_0 и T_2

$$\begin{cases} T_0'(t) + T_0(t) = 2\sin t, \\ T_0(0) = 1, \end{cases} \tag{47.23}$$

$$\begin{cases} T_2'(t) + 25\,T_2(t) = 0, \\ T_2(0) = -1. \end{cases} \tag{47.24}$$

Найдем решение задачи (47.23). Частное решение уравнения (47.23) можно найти в виде $a\sin t + b\cos t$. Подставляя это выражение в уравнение (47.23), получим

$$a\cos t - b\sin t + a\sin t + b\cos t = 2\sin t \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b=0, \\ a-b=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=-1. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $T_0'(t) + T_0(t) = 0$ имеет вид $T_0(t) = A_0e^{-t}$. В итоге общее решение уравнения (47.23) имеет вид

$$T_0(t) = A_0e^{-t} + \sin t - \cos t.$$

Постоянная A_0 находится из начального условия $T_0(0) = 1$

$$T_0(0) = A_0 - 1 = 1 \Longleftrightarrow A_0 = 2.$$

Отсюда

$$T_0(t) = 2e^{-t} + \sin t - \cos t.$$

Найдем решение задачи (47.24). Общее решение уравнения (47.24) имеет вид

$$T_2(t) = A_2e^{-25t}.$$

Постоянная A_2 находится из начального условия $T_2(0) = -1$

$$T_2(0) = A_2 = -1.$$

Отсюда

$$T_2(t) = -e^{-25t}.$$

Наконец, решение задачи (47.14) выписывается в виде ряда (47.22). □

Ответ: $u(x,t) = (2e^{-t} + \sin t - \cos t)\cos x - e^{-25t}\cos(5x)$.

Домашнее задание:

Задача 47.6. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u|_{x=0} = u|_{x=2\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 2\sin(3x). \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin(3x)$.

Задача 47.7. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - \sin x, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin x + 2\sin(2x). \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{4}\left(5e^{-4t} - 1\right)\sin x + 2e^{-16t}\sin(2x)$.

Задача 47.8. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \\ u_x\big|_{x=-\pi} = u_x\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos 2x. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = te^{-t}\cos x + e^{-4t}\cos(2x)$.

Задача 47.9. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + t, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = e^{-t}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^5}\left(e^{-n^2 t} - 1 + n^2 t\right)\sin(nx)$.

48. Уравнение колебания ограниченной струны.

Определение 48.1. *Задачей Коши для уравнения колебания струны на отрезке с однородными краевыми условиями называется задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей при $t>0$ уравнению*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{48.1}$$

краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=a} = 0, \\ \alpha_2 u + \beta_2 u_x|_{x=b} = 0, \end{cases} \tag{48.2}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{48.3}$$

Здесь f, φ и ψ – заданные функции, α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2$ и a – положительная постоянная.

При некоторых условиях на гладкость функций f, φ и ψ, которые мы позволим себе здесь не обсуждать, решение задачи Коши (47.1) – (47.3) существует и единственно. Задача (48.1) – (48.3) решается вполне аналогично задаче (47.1) – (47.3) для уравнения теплопроводности. Напомним основные идеи.

Решение задачи (48.1) – (48.3) строится в три шага.

(1) Находим собственные значения λ_n и собственные функции u_n задачи Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad \begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=a} = 0, \\ \alpha_2 u + \beta_2 u_x|_{x=b} = 0. \end{cases} \tag{48.4}$$

(2) Раскладываем функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (48.4)

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) u_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_n \varphi_n u_n(x), \quad \psi(x) = \sum_n \psi_n u_n(x). \tag{48.5}$$

где функция f_n и постоянные φ_n и ψ_n могут быть найдены по формулам, см. пример 31.7 на стр. 107

$$f_n(t) = \frac{(f, u_n)}{(u_n, u_n)}, \quad \varphi_n = \frac{(\varphi, u_n)}{(u_n, u_n)}, \quad \psi_n = \frac{(\psi, u_n)}{(u_n, u_n)}, \quad (u, v) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

(3) Ищем решение задачи (48.1) – (48.3) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) u_n(x), \tag{48.6}$$

где функции T_n подлежат определению. Подставим ряды (48.5) и (48.6) в уравнение (48.1) и начальное условие (48.3). В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_n T_n'(t) u_n(x) &= -a^2 \sum_n \lambda_n T_n(t) u_n(x) + \sum_n f_n(t) u_n(x), \\ \sum_n T_n(0) u_n(x) &= \sum_n \varphi_n u_n(x), \\ \sum_n T_n'(0) u_n(x) &= \sum_n \psi_n u_n(x). \end{aligned}$$

Отсюда находим, что функции T_n обязаны удовлетворять следующей задаче Коши

$$\begin{cases} T_n'(t) = -a^2\lambda_n T_n(t) + f_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n. \end{cases} \tag{48.7}$$

Решение задачи (48.7) существует и единственно.

∘ Ответ выписывается в виде ряда (48.6).

Пример 48.2. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3\sin 2t \sin x, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin x - \sin(2x), \\ u_t|_{t=0} = 2\sin(2x). \end{cases} \tag{48.8}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Собственные функции и собственные числа задаются равенствами, см. задачу 31.4 на стр. 104,

$$u_n(x) = \sin(nx), \ \lambda_n = n^2, \ n = 1, 2, \dots.$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = 3\sin 2t \sin x$, $\varphi(x) = \sin x - \sin(2x)$ и $\psi(x) = 2\sin(2x)$ в ряд Фурье по собственным функциям u_n. Эти разложения имеют вид

$$f(x,t) = 3\sin(2t)u_1(x), \quad \varphi(x) = u_1(x) - u_2(x), \quad \psi(x) = 2u_2(x). \tag{48.9}$$

Шаг 3: Так как в разложениях (48.9) участвуют только функции u_1 и u_2, то решение задачи (48.8) можно искать в виде

$$u(x,t) = T_1(t)u_1(x) + T_2(t)u_2(x) = T_1(t)\sin x + T_2(t)\sin(2x). \tag{48.10}$$

Подставим ряды (48.9) и (48.10) в уравнение (48.8). В результате получим

$$T_1''(t)\sin x + T_2''(t)\sin(2x) = -T_1(t)\sin x - 4T_2(t)\sin(2x) + 3\sin(2t)\sin x,$$
$$T_1(0)\sin x + T_2(0)\sin(2x) = \sin x - \sin(2x),$$
$$T_1'(0)\sin x + T_2'(0)\sin(2x) = 2\sin(2x).$$

Отсюда находим уравнения на T_1 и T_2

$$\begin{cases} T_1''(t) + T_1(t) = 3\sin(2t), \\ T_1(0) = 1, \\ T_1'(0) = 0, \end{cases} \tag{48.11}$$

$$\begin{cases} T_2''(t) + 4\,T_2(t) = 0, \\ T_2(0) = -1, \\ T_2'(0) = 2. \end{cases} \tag{48.12}$$

Найдем решение задачи (48.11). Частное решение уравнения (48.11) можно найти в виде $a\sin(2t) + b\cos(2t)$. Подставляя это выражение в уравнение (48.11), получим

$$-4a\sin(2t) - 4b\cos(2t) + a\sin(2t) + b\cos(2t) = 3\sin(2t) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $T_1''(t) + T_1(t) = 0$ имеет вид $T_1(t) = A_1\sin t + B_1\cos t$. В итоге общее решение уравнения (48.11) имеет вид

$$T_1(t) = A_1\sin t + B_1\cos t - \sin(2t).$$

Постоянные A_1 и B_1 находится из начальных условий $T_1(0) = 1$ и $T_1'(0) = 0$

$$\begin{cases} T_1(0) = B_1 = 1, \\ T_1'(0) = A_1 - 2 = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_1 = 1, \\ A_1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда, решение задачи (48.11) имеет вид

$$T_1(t) = 2\sin t + \cos t - \sin(2t).$$

Найдем решение задачи (48.12). Общее решение уравнения (48.12) имеет вид

$$T_2(t) = A_2 \sin(2t) + B_2 \cos(2t).$$

Постоянные A_2 и B_2 находится из начальных условий $T_2(0) = -1$ и $T_2'(0) = 2$

$$\begin{cases} T_2(0) = B_2 = -1, \\ T_2'(0) = 2A_2 = 2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_2 = -1, \\ A_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$T_2(t) = \sin(2t) - \cos(2t).$$

Окончательно, решение задачи (48.8) выписывается в виде ряда (48.10). $\square$

Ответ: $u(x,t) = [2\sin t + \cos t - \sin(2t)]\sin x + [\sin(2t) - \cos(2t)]\sin(2x)$.

Пример 48.3. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t^2 - e^{-t}\cos x, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u_t|_{t=0} = \cos x. \end{cases} \tag{48.13}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$-u_{xx} = \lambda u, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0.$$

Собственные функции и собственные числа задаются равенствами, см. задачу 31.5 на стр. 105,

$$u_n(x) = \cos(nx),\ \lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = t^2 - e^{-t}\cos x$, $\varphi(x) = 1$ и $\psi(x) = \cos x$ в ряд Фурье по собственным функциям u_n. Эти разложения имеют вид

$$f(x,t) = t^2 u_0(x) - e^{-t}u_1(x), \quad \varphi(x) = u_0(x), \quad \psi(x) = u_1(x). \tag{48.14}$$

Шаг 3: Так как в разложениях (48.14) участвуют только функции u_0 и u_1, то решение задачи (48.13) можно искать в виде

$$u(x,t) = T_0(t)u_0(x) + T_1(t)u_1(x) = T_0(t) + T_1(t)\cos x. \tag{48.15}$$

Подставим ряды (48.14) и (48.15) в уравнение (48.13). В результате получим

$$T_0''(t) + T_1''(t)\cos x = -T_1(t)\cos x + t^2 - e^{-t}\cos x,$$

$$T_0(0) + T_1(0)\cos x = 1,$$

$$T_0'(0) + T_1'(0)\cos x = \cos x.$$

Отсюда находим уравнения на T_0 и T_1

$$\begin{cases} T_0''(t) = t^2, \\ T_0(0) = 1, \\ T_0'(0) = 0, \end{cases} \tag{48.16}$$

$$\begin{cases} T_1''(t) + T_1(t) = -e^{-t}, \\ T_1(0) = 0, \\ T_1'(0) = 1. \end{cases} \tag{48.17}$$

Найдем решение задачи (48.16). Частное решение уравнения (48.16) можно найти в виде at^4. Подставляя это выражение в уравнение (48.16), получим

$$12at^2 = t^2 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{12}t^2.$$

Общее решение однородного уравнения $T_0''(t) = 0$ имеет вид $T_1(t) = A_0 + B_0 t$. В итоге общее решение уравнения (48.16) имеет вид

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t + \frac{1}{12}t^2.$$

Постоянные A_0 и B_0 находится из начальных условий $T_0(0) = 1$ и $T_0'(0) = 0$

$$\begin{cases} T_0(0) = A_0 = 1, \\ T_0'(0) = B_0 = 0. \end{cases}$$

Отсюда найдем, что решение задачи (48.16) имеет вид

$$T_0(t) = 1 + \frac{1}{12}t^2.$$

Найдем решение задачи (48.17). Частное решение уравнения (48.17) можно найти в виде be^{-t}. Подставляя это выражение в уравнение (48.17), получим

$$2be^{-t} = -e^{-t} \Longleftrightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

Общее решение однородного уравнения $T_1''(t) + T_1(t) = 0$ имеет вид $T_1(t) = A_1 \sin t + B_1 \cos t$. В итоге общее решение уравнения (48.17) имеет вид

$$T_1(t) = A_1 \sin t + B_1 \cos t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Постоянные A_1 и B_1 находится из начальных условий $T_1(0) = 0$ и $T_1'(0) = 1$

$$\begin{cases} T_1(0) = B_1 - \frac{1}{2} = 0, \\ T_1'(0) = A_1 + \frac{1}{2} = 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{1}{2}, \\ A_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$T_1(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Окончательно, решение задачи (48.13) выписывается в виде ряда (48.15). □

Ответ: $u(x,t) = 1 + \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{2}\left(\sin t + \cos t - e^{-t}\right)\cos x$.

Домашнее задание:

Задача 48.4. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + \sin(3x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=2\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 6\sin x. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = 3\sin(2t)\sin x + \frac{1}{36}(1-\cos(6t))\sin(3x)$.

Задача 48.5. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin t \sin x, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin x, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2}(\sin t + 2\cos t - t\cos t)\sin x$.

Задача 48.6. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 2e^{-t}\sin x, \\ u|_{x=0} = u|_{x=4\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin(2x), \\ u_t|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = (t+t^2)e^{-t}\sin x + \left(\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right) e^{-t}\sin(2x)$.

Задача 48.7. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 3\sin(2x). \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{3}{2}\sin(2t)\sin(2x) + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}(nt - \sin(nt))\sin(nx)$.

49. Зависимость от времени в краевых условиях (факультатив).

Определение 49.1. *Задачей Коши для уравнения теплопроводности на отрезке с* неоднородными *краевыми условиями называется задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей при $t>0$ уравнению*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{49.1}$$

краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=a} = g(t), \\ \alpha_2 u + \beta_2 u_x|_{x=b} = h(t), \end{cases} \tag{49.2}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{49.3}$$

Здесь f, g, h и φ – заданные функции, α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k=1,2$ и a – положительная постоянная.

Решение задачи (49.1) – (49.3) строится в два шага.

(1) Находим какую-нибудь функцию w, удовлетворяющую краевым условиям (49.2). Отметим, что таких функций существует довольно много. Функцию w можно искать различными способами, например, ее можно искать в одном из указанных ниже видов

$$\begin{aligned} w(x,t) &= C_1(t)\sin(d_1(x-a)) + C_2(t)\cos(d_1(x-a)) + \\ &\qquad + C_3(t)\sin(d_2(x-b)) + C_4(t)\cos(d_2(x-b)), \\ w(x,t) &= C_1(t) + C_2(t)x + C_3(t)x^2. \end{aligned}$$

(2) Ищем решение задачи (49.1) – (49.3) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{49.4}$$

где v – новая неизвестная функция. Подставляя выражение (49.4) в (49.1) – (49.3), получим задачу на функцию v

$$v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) + a^2 w_{xx}(x,t) - w_t(x,t), \tag{49.5}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 v + \beta_1 v_x|_{x=a} = 0, \\ \alpha_2 v + \beta_2 v_x|_{x=b} = 0, \end{cases} \tag{49.6}$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0). \tag{49.7}$$

Задача Коши (49.5) – (49.7) имеет однородные краевые условия (49.6), поэтому ее можно решать изложенными ранее методами, см. задачу (47.1) – (47.3) на стр. 155.

∘ Ответ выписывается в виде суммы (49.4).

Пример 49.2. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = -1, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.8}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1: Найдем функцию w, удовлетворяющую краевым условиям $w|_{x=0} = w|_{x=\pi} = -1$. В качестве такой функции удобно взять

$$w(x,t) = -1.$$

Шаг 2: Ищем решение задачи (49.8) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = v(x,t) - 1. \tag{49.9}$$

Подставляя выражение (49.9) в (49.8), получим задачу на функцию v

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \\ v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = 1. \end{cases} \tag{49.10}$$

Решение задачи (49.10) найдено в примере 47.2 на стр. 156, откуда

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Решение задачи (49.8) выписываем в виде (49.9). □

Ответ: $u(x,t) = -1 + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin(nx)$.

Пример 49.3. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u_x|_{x=0} = 0, \;\; u|_{x=\pi} = t^2, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.11}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1: Найдем функцию w, удовлетворяющую краевым условиям $w_x|_{x=0} = 0$, $w|_{x=\pi} = t^2$. Ее можно искать, например, в виде $w(x,t) = A(t) + xB(t)$, откуда

$$w(x,t) = t^2.$$

Шаг 2: Ищем решение задачи (49.11) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = v(x,t) + t^2. \tag{49.12}$$

Подставляя выражение (49.12) в (49.11), получим задачу на функцию v

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 2t, \\ v_x|_{x=0} = 0, \;\; v|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.13}$$

Собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -v_{xx} = \lambda v, \\ v_x|_{x=0} = 0, \;\; v|_{x=\pi} = 0, \end{cases} \tag{49.14}$$

имеют вид

$$v_n(x) = \cos\left(\frac{2n+1}{2} x\right), \;\; \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2, \;\; n = 0, 1, \dots .$$

Разложение функции $-2t$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (49.14) имеет вид

$$-2t = t \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)} . \tag{49.15}$$

Решение задачи (49.13) ищем в виде разложения

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(x). \tag{49.16}$$

Подставляя разложения (49.15) и (49.16) в уравнение (49.13), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)v_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n T_n(t)v_n(x) + t\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)v_n(x) = 0.$$

Отсюда находим задачу Коши на функцию T_n

$$\begin{cases} T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = a_n t, \\ T_n(0) = 0. \end{cases} \tag{49.17}$$

Частное решение уравнения (49.17) можно найти в виде линейного полинома. Подставляя представление $T_n(t) = A_n + B_n t$ в уравнение (49.17), получим

$$B_n + \lambda_n A_n + \lambda_n B_n t = a_n t \Longleftrightarrow \begin{cases} B_n + \lambda_n A_n = 0, \\ \lambda_n B_n = a_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_n = -\frac{a_n}{\lambda_n^2}, \\ B_n = \frac{a_n}{\lambda_n}. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = 0$ имеет вид $T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}$. В итоге общее решение уравнения (49.17) можно записать в виде

$$T_n(t) = \frac{a_n}{\lambda_n^2}(-1 + \lambda_n t) + C_n e^{-\lambda_n t}. \tag{49.18}$$

Из начального условия $T_n(0) = 0$ находим $C_n = a_n/\lambda_n^2$. Подставляя выражение (49.18) в формулу (49.16), найдем решение задачи (49.13)

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2}\left(e^{-\lambda_n t} - 1 + \lambda_n t\right) v_n(x).$$

Решение задачи (49.11) выписываем в виде (49.12). □

Ответ: $u(x,t) = t^2 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^7(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)^5}\left(e^{-\lambda_n t} - 1 + \lambda_n t\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$.

Определение 49.4. *Задачей Коши для уравнения колебания струны на отрезке с* неоднородными *краевыми условиями называется задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{49.19}$$

краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=a} = g(t), \\ \alpha_2 u + \beta_2 u_x|_{x=b} = h(t), \end{cases} \tag{49.20}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{49.21}$$

Здесь f, g, h, φ и ψ – заданные функции, α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2$ и a – положительная постоянная.

Решение задачи (49.19) – (49.21) строится в два шага.

(1) Находим какую-нибудь функцию w, удовлетворяющую краевым условиям (49.20).

(2) Ищем решение задачи (49.19) – (49.21) в виде
$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{49.22}$$
где v – новая неизвестная функция. Подставляя выражение (49.22) в (49.19) – (49.21), получим задачу на функцию v
$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) + a^2 w_{xx}(x,t) - w_{tt}(x,t), \tag{49.23}$$
$$\begin{cases} \alpha_1 v + \beta_1 v_x\big|_{x=a} = 0, \\ \alpha_2 v + \beta_2 v_x\big|_{x=b} = 0, \end{cases} \tag{49.24}$$
$$\begin{cases} v|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0), \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) - w_t(x,0). \end{cases} \tag{49.25}$$
Задача Коши (49.23) – (49.25) имеет однородные краевые условия (49.24), поэтому ее можно решать изложенными ранее методами, см. задачу (48.1) – (48.3) на стр. 161.

○ Ответ выписывается в виде суммы (49.22).

Пример 49.5. *Решить задачу Коши*
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u_x|_{x=0} = 1, \ u|_{x=\pi} = \pi, \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.26}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1: Найдем функцию w, удовлетворяющую краевым условиям $w_x|_{x=0} = 1$, $w|_{x=\pi} = \pi$. Ее можно искать, например, в виде $w(x,t) = A + Bx$, откуда
$$w(x,t) = x.$$

Шаг 2: Ищем решение задачи (49.26) в виде
$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = v(x,t) + x. \tag{49.27}$$
Подставляя выражение (49.27) в (49.26), получим задачу на функцию v
$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \\ v_x|_{x=0} = 0, \ v|_{x=\pi} = 0, \\ v|_{t=0} = -x, \ v_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.28}$$

Собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля
$$\begin{cases} -v_{xx} = \lambda v, \\ v_x|_{x=0} = 0, \ v|_{x=\pi} = 0, \end{cases} \tag{49.29}$$
имеют вид
$$v_n(x) = \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \ \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2, \ n = 0, 1, \ldots.$$

Разложение функции $-x$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (49.29) имеет вид
$$-x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{2n+1} + \frac{8}{\pi(2n+1)^2}\,. \tag{49.30}$$

Решение задачи (49.28) ищем в виде разложения
$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(x). \tag{49.31}$$

Подставляя разложения (49.30) и (49.31) в уравнение (49.28), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)v_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n T_n(t)v_n(x) + t\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)v_n(x) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)v_n(x) = 0.$$

Отсюда находим задачу Коши на функцию T_n

$$\begin{cases} T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = a_n, \\ T_n'(0) = 0. \end{cases} \tag{49.32}$$

Общее решение уравнения (49.32) имеет вид

$$T_n(t) = C_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) + D_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right). \tag{49.33}$$

Из начальных условий задачи (49.28) находим, что $C_n = 0$, $D_n = a_n$. Подставляя выражение (49.33) в формулу (49.31), найдем решение задачи (49.28)

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Решение задачи (49.26) выписываем в виде (49.27). □

Ответ: $u(x,t) = x + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^{n+1}}{2n+1} + \frac{8}{\pi(2n+1)^2}\right]\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$.

Пример 49.6. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u_x|_{x=0} = 0, \ u_x|_{x=\pi/2} = \sin t, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.34}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1: Найдем функцию w, удовлетворяющую краевым условиям $w_x|_{x=0} = 0$, $w|_{x=\pi/2} = \sin t$. Ее можно искать, например, в виде $w(x,t) = A(t)\cos(\alpha x) + B(t)\sin(\alpha x)$, откуда

$$\begin{cases} B(t)\alpha = 0, \\ -A(t)\alpha\sin(\alpha\pi/2) + B(t)\alpha\cos(\alpha\pi/2) = \sin t. \end{cases}$$

Выбирая $\alpha = 1$, $A(t) = -\sin t$ и $B(t) = 0$, получим

$$w(x,t) = -\cos x \sin t.$$

Шаг 2: Ищем решение задачи (49.34) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = v(x,t) - \cos x \sin t. \tag{49.35}$$

Подставляя выражение (49.35) в (49.34), получим задачу на функцию v

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \\ v_x|_{x=0} = 0, \ v_x|_{x=\pi/2} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \ v_t|_{t=0} = \cos x. \end{cases} \tag{49.36}$$

Собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -v_{xx} = \lambda v, \\ v_x|_{x=0} = 0, \ v_x|_{x=\pi/2} = 0, \end{cases} \tag{49.37}$$

имеют вид

$$v_n(x) = \cos(2nx), \ \lambda_n = 4n^2, \ n = 0, 1, \ldots.$$

Разложение функции $\cos x$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (49.37) имеет вид

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}, \ n = 1, 2, \ldots, \ a_0 = \frac{2}{\pi}. \tag{49.38}$$

Решение задачи (49.36) ищем в виде разложения

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(x). \tag{49.39}$$

Подставляя разложения (49.38) и (49.39) в уравнение (49.36), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) v_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n T_n(t) v_n(x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) v_n(x) = 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x).$$

Отсюда находим задачу Коши на функцию T_n

$$\begin{cases} T_n''(t) + 4n^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = a_n. \end{cases} \tag{49.40}$$

Общее решение уравнения (49.40) имеет вид

$$T_n(t) = C_n \sin(2nt) + D_n \cos(2nt), \ n = 1, 2, \ldots, \tag{49.41}$$
$$T_0(t) = C_0 t + D_0. \tag{49.42}$$

Из начальных условий находим (49.36), что $C_n = a_n/(2n)$, $D_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $C_0 = a_0$, $D_0 = 0$. Подставляя выражения (49.41) и (49.42) в формулу (49.39), найдем решение задачи (49.36)

$$v(x,t) = a_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n} \sin(2nt) \cos(2nx).$$

Решение задачи (49.34) выписываем в виде (49.35). □

Ответ: $u(x,t) = -\sin t \cos x + \frac{2t}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n(1-4n^2)} \sin(2nt)\cos(2nx)$.

Рассмотрим еще один пример задачи, в которой план решения остается прежним.

Пример 49.7. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - \cos x + \sin x \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 1, \\ u|_{t=0} = \sin x, \\ u_t|_{t=0} = 2\cos x. \end{cases} \tag{49.43}$$

Решение. Решение проводим в два шага.

Шаг 1: Найдем функцию w, удовлетворяющую краевым условиям $w_x|_{x=0} = w|_{x=\pi/2} = 1$. Ее можно искать, например, в виде $w(x,t) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$, откуда

$$\begin{cases} B\alpha = 1, \\ A\cos(\alpha\pi/2) + B\sin(\alpha\pi/2) = 1. \end{cases}$$

Выбирая $\alpha = 1$, $A = 0$ и $B = 1$, получим

$$w(x,t) = \sin x.$$

Шаг 2: Ищем решение задачи (49.43) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = v(x,t) + \sin x. \tag{49.44}$$

Подставляя выражение (49.44) в (49.43), получим задачу на функцию v

$$\begin{cases} v_{tt} - 2v_t = v_{xx} - \cos x, \\ v_x|_{x=0} = 0,\ v|_{x=\pi/2} = 0, \\ v|_{t=0} = 0,\ v_t|_{t=0} = 2\cos x. \end{cases} \tag{49.45}$$

Собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -v_{xx} = \lambda v, \\ v_x|_{x=0} = 0,\ v|_{x=\pi/2} = 0, \end{cases} \tag{49.46}$$

имеют вид

$$v_n(x) = \cos((2n+1)x),\ \lambda_n = (2n+1)^2,\ n = 0, 1, \dots.$$

Разложение функции $\cos x$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (49.46) имеет элементарный вид

$$\cos x = v_0(x). \tag{49.47}$$

Решение задачи (49.45) ищем в виде

$$v(x,t) = T_0(t)v_0(x). \tag{49.48}$$

Подставляя разложения (49.47) и (49.48) в уравнение (49.45), получим

$$\begin{aligned} &T_0''(t)v_0(x) - 2T_0'(t)v_0(x) = -\lambda_0 T_0(t)v_0(x) - v_0(x), \\ &T_0(0)v_0(x) = 0, \\ &T_0'(0)v_0(x) = 2v_0(x). \end{aligned}$$

Отсюда находим задачу Коши на функцию T_0

$$\begin{cases} T_0''(t) - 2T_0'(t) + T_0(t) = -1, \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 2. \end{cases} \tag{49.49}$$

Частное решение уравнения (49.49) можно найти в виде постоянной функции. Подставляя представление $T_0(t) = C$ в уравнение (49.49), получим $C = -1$. Общее решение однородного уравнения $T_0''(t) - 2T_0'(t) + T_0(t) = 0$ имеет вид $T_0(t) = Ae^t + Bte^t$. В итоге общее решение уравнения (49.49) можно записать в виде

$$T_0(t) = Ae^t + Bte^t - 1. \tag{49.50}$$

Из начальных условий задачи (49.36) находим

$$\begin{cases} A - 1 = 0, \\ A + B = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Подставляя выражение (49.50) в формулу (49.48), найдем решение задачи (49.45)

$$v(x,t) = (e^t + te^t - 1)v_0(x).$$

Решение задачи (49.43) выписываем в виде (49.44). □

Ответ: $u(x,t) = \sin x + (e^t + te^t - 1)\cos x$.

Домашнее задание:

Задача 49.8. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos(x) + 5e^t\sin(2x), \\ u_x|_{x=0} = 2e^t, \ \ u|_{x=\pi/2} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin(2x). \end{cases} \tag{49.51}$$

Ответ: $u(x,t) = e^t\sin(2x) + te^{-t}\cos x$.

Задача 49.9. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + e^{-2t}\sin(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = t, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.52}$$

Ответ: $u(x,t) = t + (e^{-t} - e^{-2t})\sin x$.

Задача 49.10. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\cos t\cos(x), \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 3, \\ u|_{t=0} = 3x. \end{cases} \tag{49.53}$$

Ответ: $u(x,t) = 3x + (\sin t + \cos t - e^{-t})\cos x$.

Задача 49.11. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - t\sin(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 2, \\ u|_{t=0} = 2. \end{cases} \tag{49.54}$$

Ответ: $u(x,t) = 2 + (1 - t - e^{-t})\sin x$.

Задача 49.12. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{x=0} = 0, \ \ u|_{x=\pi} = \pi t, \\ u|_{t=0} = \sin(2x), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{49.55}$$

Ответ: $u(x,t) = xt + \cos(2t)\sin(2x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\sin(nt)\sin(nx)$.

Задача 49.13. *Решить задачу Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t = 4u_{xx} + 4\sin x, \\ u|_{x=0} = 0, \ \ u_x|_{x=\pi/2} = 1, \\ u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = \sin(3x). \end{cases} \tag{49.56}$$

Ответ: $u(x,t) = x + (1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})\sin x + \frac{1}{\sqrt{32}}\, e^{-t}\sin(\sqrt{32}\,t)\sin(3x)$.

50. Уравнение теплопроводности в прямоугольной области.

Определение 50.1. *Задачей Коши для уравнения теплопроводности в прямоугольной области с однородными краевыми условиями называется задача о нахождении функции $u(x, y, t)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению*

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{50.1}$$

краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c, d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c, d], \\ \alpha_3 u + \beta_3 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a, b], \\ \alpha_4 u + \beta_4 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a, b]. \end{cases} \tag{50.2}$$

и начальным условиям

$$\big\{\, u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{50.3}$$

Здесь f, φ и ψ – заданные функции, α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2, 3, 4$, a – положительная постоянная и ∂_n – производная по внешней нормали.

При некоторых условиях на гладкость функций f, φ и ψ, которые мы позволим себе здесь не обсуждать, решение задачи Коши (50.1) – (50.3) существует и единственно. Задача (50.1) – (50.3) решается вполне аналогично задаче Коши для уравнения теплопроводности (47.1) – (47.3) или задаче Коши для уравнения колебания струны (48.1) – (48.3). Напомним основные идеи.

Решение строится в три шага.

(1) Находим собственные значения λ_{np} и собственные функции u_{np} задачи

$$-\Delta u = \lambda u,$$

с краевыми условиями (50.2).

(2) Раскладываем функции f и φ в ряды Фурье по собственным функциям u_{np}

$$f(x, y, t) = \sum_{n,p} f_{np}(t) u_{np}(x, y), \tag{50.4}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n,p} \varphi_{np} u_{np}(x, y). \tag{50.5}$$

где функции f_{np} и постоянные φ_{np} могут быть найдены по формулам

$$f_{np}(t) = \frac{(f, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})}, \quad \varphi_{np} = \frac{(\varphi, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})},$$

$$(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy\ u(x, y)\overline{v(x, y)}.$$

(3) Ищем решение задачи (50.1) – (50.3) в виде ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n,p} T_{np}(t) u_{np}(x, y), \tag{50.6}$$

где функции T_{np} подлежат определению. Подставим ряды (50.4) – (50.6) в уравнение (50.1) и начальное условие (50.3). В результате получим

$$\sum_{n,p} T'_{np}(t)u_{np}(x,y) = -a^2 \sum_{n,p} \lambda_{np} T_{np}(t) u_{np}(x,y) + \sum_{n,p} f_{np}(t)u_{np}(x,y),$$
$$\sum_{n,p} T_{np}(0)u_{np}(x,y) = \sum_{n,p} \varphi_{np} u_{np}(x,y).$$

Отсюда находим, что функции T_{np} обязаны удовлетворять следующей задаче Коши

$$\begin{cases} T'_{np}(t) + a^2\lambda_{np}T_{np}(t) = f_{np}(t), \\ T_{np}(0) = \varphi_{np}. \end{cases} \tag{50.7}$$

Решение задачи (50.7) существует и единственно.

∘ Ответ выписывается в виде ряда (50.6).

Пример 50.2. *Решить задачу Коши*

$$u_t = \Delta u + t\sin x \sin y, \tag{50.8}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{\textit{при}} \quad x = 0,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{\textit{при}} \quad x = \pi,\ y \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{\textit{при}} \quad y = 0,\ x \in [0,\pi], \\ u = 0 & \text{\textit{при}} \quad y = \pi,\ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{50.9}$$

$$\left\{ u|_{t=0} = \sin(4x)\sin(3y). \right. \tag{50.10}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу на собственные значения и собственные функции

$$-\Delta u = \lambda u$$

с краевыми условиями (50.9). Собственные функции и собственные значения задаются равенствами, см. пример 33.4 на стр. 109,

$$u_{np}(x,y) = \sin(nx)\sin(py), \quad \lambda_{np} = n^2 + p^2, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = t\sin x \sin y$ и $\psi(x) = \sin x \sin y$ в ряды Фурье по собственным функциям u_{np}. Эти разложения имеют вид

$$f(x,y,t) = 2tu_{1,1}(x,y), \quad \varphi(x,y) = u_{4,3}(x,y). \tag{50.11}$$

Шаг 3: Решение задачи (50.8) – (50.10) ищем в виде

$$u(x,y,t) = T_{1,1}(t)u_{1,1}(x,y) + T_{4,3}(t)u_{4,3}(x,y). \tag{50.12}$$

Подставим ряды (50.11) и (50.12) в уравнения (50.8) – (50.10). В результате получим

$$T'_{1,1}(t)u_{1,1}(x,y) + T'_{4,3}(t)u_{4,3}(x,y) = -\lambda_{1,1}T_{1,1}(t)u_{1,1}(x,y) - \lambda_{4,3}T_{4,3}(t)u_{4,3}(x,y) + 2tu_{1,1}(x,y),$$

$$T_{1,1}(0)u_{1,1}(x,y) + T_{4,3}(0)u_{4,3}(x,y) = u_{4,3}(x,y),$$

Отсюда находим уравнения на $T_{1,1}$ и $T_{4,3}$

$$\begin{cases} T'_{1,1}(t) + 2T_{1,1}(t) = 2t, \\ T_{1,1}(0) = 0, \end{cases} \tag{50.13}$$

$$\begin{cases} T'_{4,3}(t) + 25\,T_{4,3}(t) = 0, \\ T_{4,3}(0) = 1. \end{cases} \tag{50.14}$$

Найдем решение задачи (50.13). Общее решение уравнения (50.13) имеет вид

$$T_{1,1}(t) = Ae^{-2t} + t - \frac{1}{2}.$$

Из начального условия $T_{1,1}(0) = 0$ найдем постоянную A

$$A = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим решение задачи (50.13)

$$T_{1,1}(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + t - \frac{1}{2}.$$

Найдем решение задачи (50.14). Общее решение уравнения (50.14) имеет вид

$$T_{4,3}(t) = Be^{-25t}.$$

Из начального условия $T_{4,3}(0) = 1$ найдем постоянную B

$$B = 1.$$

Отсюда находим решение задачи (50.14)

$$T_{4,3}(t) = e^{-25t}.$$

Наконец, решение задачи (50.8) – (50.10) имеет вид (50.12). □

Ответ: $u(x, y, t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} + t - \frac{1}{2}\right)\sin x \sin y + e^{-25t}\sin(4x)\sin(3y)$.

Домашнее задание:

Задача 50.3. *Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности*

$$u_t = \Delta u, \qquad \begin{cases} u = 0 & \textit{при} \quad x = 0,\ y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \textit{при} \quad x = \pi,\ y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \textit{при} \quad y = 0,\ x \in [0, \pi], \\ u = 0 & \textit{при} \quad y = \pi,\ x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad u|_{t=0} = 1.$$

Ответ: $u(x, y, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 np}(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^p)e^{-(n^2+p^2)t}\sin(nx)\sin(py)$.

51. Уравнение колебания прямоугольной мембраны.

Определение 51.1. *Задачей Коши для уравнения колебания прямоугольной мембраны с однородными краевыми условиями называется задача о нахождении функции $u(x, y, t)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{51.1}$$

краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = a,\ y \in [c, d], \\ \alpha_2 u + \beta_2 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = b,\ y \in [c, d], \\ \alpha_3 u + \beta_3 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = c,\ x \in [a, b], \\ \alpha_4 u + \beta_4 \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = d,\ x \in [a, b]. \end{cases} \tag{51.2}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{51.3}$$

Здесь f, φ и ψ – заданные функции, α_k и β_k – заданные вещественные параметры, удовлетворяющие условию $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ при $k = 1, 2, 3, 4$, a – положительная постоянная и ∂_n – производная по внешней нормали.

При некоторых условиях на гладкость функций f, φ и ψ, которые мы позволим себе здесь не обсуждать, решение задачи Коши (51.1) – (51.3) существует и единственно. Задача (51.1) – (51.3) решается вполне аналогично задаче Коши для уравнения теплопроводности (47.1) – (47.3) или задаче Коши для уравнения колебания струны (48.1) – (48.3). Напомним основные идеи.

Решение строится в три шага.

(1) Находим собственные значения λ_{np} и собственные функции u_{np} задачи

$$-\Delta u = \lambda u,$$

с краевыми условиями (51.2).

(2) Раскладываем функции f, φ и ψ в ряды Фурье по собственным функциям u_{np}

$$f(x, y, t) = \sum_{n,p} f_{np}(t) u_{np}(x, y), \tag{51.4}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n,p} \varphi_{np} u_{np}(x, y), \quad \psi(x, y) = \sum_{n,p} \psi_{np} u_{np}(x, y). \tag{51.5}$$

где функции f_{np} и постоянные φ_{np} и ψ_{np} могут быть найдены по формулам

$$f_{np}(t) = \frac{(f, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})}, \quad \varphi_{np} = \frac{(\varphi, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})}, \quad \psi_{np} = \frac{(\psi, u_{np})}{(u_{np}, u_{np})},$$

$$(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dx \int_c^d dy \ u(x, y)\overline{v(x, y)}.$$

(3) Ищем решение задачи (51.1) – (51.3) в виде ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n,p} T_{np}(t) u_{np}(x, y), \tag{51.6}$$

где функции T_{np} подлежат определению. Подставим ряды (51.4) – (51.6) в уравнение (51.1) и начальное условие (51.3). В результате получим

$$\sum_{n,p} T''_{np}(t)u_{np}(x,y) = -a^2\sum_{n,p}\lambda_{np}T_{np}(t)u_{np}(x,y) + \sum_{n,p} f_{np}(t)u_{np}(x,y),$$
$$\sum_{n,p} T_{np}(0)u_{np}(x,y) = \sum_{n,p}\varphi_{np}u_{np}(x,y),$$
$$\sum_{n,p} T'_{np}(0)u_{np}(x,y) = \sum_{n,p}\psi_{np}u_{np}(x,y).$$

Отсюда находим, что функции T_{np} обязаны удовлетворять следующей задаче Коши

$$\begin{cases} T''_{np}(t) + a^2\lambda_{np}T_{np}(t) = f_{np}(t), \\ T_{np}(0) = \varphi_{np}, \\ T'_{np}(0) = \psi_{np}. \end{cases} \tag{51.7}$$

Решение задачи (51.7) существует и единственно.

∘ Ответ выписывается в виде ряда (51.6).

Пример 51.2. *Решить задачу Коши*

$$u_{tt} = \Delta u + 2t\sin x\sin y, \tag{51.8}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0,\ y\in[0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi,\ y\in[0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0,\ x\in[0,\pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi,\ x\in[0,\pi], \end{cases} \tag{51.9}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \sin(4x)\sin(3y), \\ u_t|_{t=0} = \sin x\sin y. \end{cases} \tag{51.10}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу на собственные значения и собственные функции

$$-\Delta u = \lambda u$$

с краевыми условиями (51.9). Собственные функции и собственные значения задаются равенствами, см. пример 33.4 на стр. 109,

$$u_{np}(x,y) = \sin(nx)\sin(py), \quad \lambda_{np} = n^2+p^2, \quad n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}.$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = t\sin x\sin y$, $\varphi(x) = \sin(4x)\sin(3y)$ и $\psi(x) = \sin x\sin y$ в ряды Фурье по собственным функциям u_{np}. Эти разложения имеют вид

$$f(x,y,t) = 2tu_{1,1}(x,y), \quad \varphi(x,y) = u_{4,3}(x,y), \quad \psi(x) = u_{1,1}(x,y). \tag{51.11}$$

Шаг 3: Решение задачи (51.8) – (51.10) ищем в виде

$$u(x,y,t) = T_{1,1}(t)u_{1,1}(x,y) + T_{4,3}(t)u_{4,3}(x,y). \tag{51.12}$$

Подставим ряды (51.11) и (51.12) в уравнения (51.8) – (51.10). В результате получим

$$T''_{1,1}(t)u_{1,1}(x,y) + T''_{4,3}(t)u_{4,3}(x,y) = -\lambda_{1,1}T_{1,1}(t)u_{1,1}(x,y) - \lambda_{4,3}T_{4,3}(t)u_{4,3}(x,y) + 2tu_{1,1}(x,y),$$

$$T_{1,1}(0)u_{1,1}(x,y) + T_{4,3}(0)u_{4,3}(x,y) = u_{4,3}(x,y),$$
$$T'_{1,1}(0)u_{1,1}(x,y) + T'_{4,3}(0)u_{4,3}(x,y) = u_{1,1}(x,y).$$

Отсюда находим уравнения на $T_{1,1}$ и $T_{4,3}$

$$\begin{cases} T''_{1,1}(t) + 2T_{1,1}(t) = 2t, \\ T_{1,1}(0) = 0, \\ T'_{1,1}(0) = 1, \end{cases} \tag{51.13}$$

$$\begin{cases} T''_{4,3}(t) + 25\,T_{4,3}(t) = 0, \\ T_{4,3}(0) = 1, \\ T'_{4,3}(0) = 0. \end{cases} \tag{51.14}$$

Найдем решение задачи (51.13). Общее решение уравнения (51.13) имеет вид

$$T_{1,1}(t) = A\sin(\sqrt{2}t) + B\cos(\sqrt{2}t) + t.$$

Постоянные A и B находится из начальных условий $T_{1,1}(0) = 0$ и $T'_{1,1}(0) = 1$

$$\begin{cases} T_{1,1}(0) = B = 0, \\ T'_{1,1}(0) = A\sqrt{2} + 1 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим решение задачи (51.13)

$$T_{1,1}(t) = t.$$

Найдем решение задачи (51.14). Общее решение уравнения (51.14) имеет вид

$$T_{4,3}(t) = C\sin(5t) + D\cos(5t).$$

Постоянные C и D находится из начальных условий $T_{4,3}(0) = 1$ и $T'_{4,3}(0) = 0$

$$\begin{cases} T_{4,3}(0) = D = 1, \\ T'_2(0) = 5C = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} D = 1, \\ C = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим решение задачи (51.14)

$$T_{4,3}(t) = \cos(5t).$$

Наконец, решение задачи (51.8) – (51.10) имеет вид (51.12). $\square$

Ответ: $u(x, y, t) = t\sin x \sin y + \cos(5t)\sin(4x)\sin(3y)$.

Пример 51.3. *Решить задачу Коши*

$$u_{tt} = \Delta u + 4\sin t \sin x \sin(2y), \tag{51.15}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \textit{при} \quad x = 0, \quad\ y \in [0, \pi/2], \\ \partial_n u = 0 & \textit{при} \quad x = \pi/2,\ y \in [0, \pi/2], \\ u = 0 & \textit{при} \quad y = 0, \quad\ x \in [0, \pi/2], \\ u = 0 & \textit{при} \quad y = \pi/2,\ x \in [0, \pi/2], \end{cases} \tag{51.16}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 5\sin(3x)\sin(4y), \\ u_t|_{t=0} = \sin x \sin(2y). \end{cases} \tag{51.17}$$

Решение. Решение проводим в три шага.

Шаг 1: Решаем задачу на собственные значения и собственные функции

$$-\Delta u = \lambda u$$

с краевыми условиями (51.16). Собственные функции и собственные числа задаются равенствами

$$u_{np}(x, y) = \sin((2n+1)x)\sin(2py), \quad \lambda_{np} = (2n+1)^2 + 4p^2, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2: Раскладываем функции $f(x,t) = 4\sin t \sin x \sin(2y)$, $\varphi(x) = 5\sin(3x)\sin(4y)$ и $\psi(x) = \sin x \sin(2y)$ в ряд Фурье по собственным функциям u_{np}. Эти разложения имеют вид

$$f(x,y,t) = 4\sin t\, u_{0,1}(x,y), \quad \varphi(x,y) = 5u_{1,2}(x,y), \quad \psi(x) = u_{0,1}(x,y). \tag{51.18}$$

Шаг 3: Решение задачи (51.15) – (51.17) ищем в виде

$$u(x,y,t) = T_{0,1}(t)u_{0,1}(x,y) + T_{1,2}(t)u_{1,2}(x,y). \tag{51.19}$$

Подставим ряды (51.18) и (51.19) в уравнения (51.15) – (51.17). В результате получим

$$T''_{0,1}(t)u_{0,1}(x,y) + T''_{1,2}(t)u_{1,2}(x,y) = -\lambda_{0,1}T_{0,1}(t)u_{0,1}(x,y) - \lambda_{1,2}T_{1,2}(t)u_{1,2}(x,y) + 4\sin t\, u_{0,1}(x,y),$$

$$T_{0,1}(0)u_{0,1}(x,y) + T_{1,2}(0)u_{1,2}(x,y) = 5u_{1,2}(x,y),$$

$$T'_{0,1}(0)u_{0,1}(x,y) + T'_{1,2}(0)u_{1,2}(x,y) = u_{0,1}(x,y).$$

Отсюда находим уравнения на $T_{0,1}$ и $T_{1,2}$

$$\begin{cases} T''_{0,1}(t) + 5T_{0,1}(t) = 4\sin t, \\ T_{0,1}(0) = 0, \\ T'_{0,1}(0) = 1, \end{cases} \tag{51.20}$$

$$\begin{cases} T''_{1,2}(t) + 25\,T_{1,2}(t) = 0, \\ T_{1,2}(0) = 5, \\ T'_{1,2}(0) = 0. \end{cases} \tag{51.21}$$

Найдем решение задачи (51.20). Общее решение уравнения (51.20) имеет вид

$$T_{0,1}(t) = A\sin(\sqrt{5}t) + B\cos(\sqrt{5}t) + \sin t.$$

Постоянные A и B находится из начальных условий $T_{1,1}(0) = 0$ и $T'_{1,1}(0) = 1$

$$\begin{cases} T_{0,1}(0) = B = 0, \\ T'_{0,1}(0) = A\sqrt{5} + 1 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим решение задачи (51.20)

$$T_{0,1}(t) = \sin t.$$

Найдем решение задачи (51.21). Общее решение уравнения (51.21) имеет вид

$$T_{1,2}(t) = C\sin(5t) + D\cos(5t).$$

Постоянные C и D находится из начальных условий $T_{1,2}(0) = 5$ и $T'_{1,2}(0) = 0$

$$\begin{cases} T_{1,2}(0) = D = 5, \\ T'_2(0) = 5C = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} D = 5, \\ C = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим решение задачи (51.21)

$$T_{1,2}(t) = 5\cos(5t).$$

Наконец, решение задачи (51.15) – (51.17) имеет вид (51.12). □

Ответ: $u(x,y,t) = \sin t \sin x \sin(2y) + 5\cos(5t)\sin(3x)\sin(4y)$.

Домашнее задание:

Задача 51.4. *Решить задачу Коши*

$$u_{tt} = \Delta u + 2t^2 \cos x \sin y,$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi/2, \ y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi/2], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi, \quad x \in [0, \pi/2], \end{cases} \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = 2\cos(3x)\sin(2y), \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u(x, y, t) = (\cos(\sqrt{2}\,t) + t^2 - 1)\cos x \sin y + 2\cos(\sqrt{13}t)\cos(3x)\sin(2y)$.

Задача 51.5. *Решить задачу Коши*

$$u_{tt} = \Delta u + 52e^{-t}\cos(4x)\sin(3y),$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \ y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \ x \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi, \ x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = 2\cos(4x)\sin(3y), \\ u_t|_{t=0} = 3\sin(3y). \end{cases}$$

Ответ: $u(x, y, t) = \sin(3t)\sin(3y) + \left(\frac{2}{5}\sin(5t) + 2e^{-t}\right)\cos(4x)\sin(3y)$.

Задача 51.6. *Решить задачу Коши*

$$u_{tt} = \Delta u + 8t^2 \sin(2y),$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \ y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \ x \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad y = \pi, \ x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = \sin(2y), \\ u_t|_{t=0} = \cos(2x)\sin(2y). \end{cases}$$

Ответ: $u(x, y, t) = (2t^2 - 1 + 2\cos(2t))\sin(2y) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}\,t)\cos(2x)\sin(2y)$.

Задача 51.7. *Решить задачу Коши*

$$u_{tt} = \Delta u + t^2 \sin(x),$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \ y \in [0, \pi], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \ y \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \ x \in [0, \pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = \pi, \ x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = \sin(x), \\ u_t|_{t=0} = \sin(2x)\cos y. \end{cases}$$

Ответ: $u(x, y, t) = (t^2 - 2 + 3\cos t)\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t)\sin(2x)\cos y$.

52. 17-ая контрольная работа (задача: 17; 20 минут).

Вариант контрольной работы №17.

Задача 17. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u + t\sin x, \qquad \begin{cases} u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \ \ y \in [0,1], \\ u = 0 & \text{при} \quad x = 2\pi, \ y \in [0,1], \\ \partial u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \ \ x \in [0,2\pi], \\ \partial u = 0 & \text{при} \quad y = 1, \ \ x \in [0,2\pi], \end{cases} \qquad u|_{t=0} = 2\sin(2x).$$

Ответ: $u(x,y,t) = (t - 1 + e^{-t})\sin x + 2e^{-4t}\sin x.$

Вариант контрольной работы №17.

Задача 17. Решить задачу Коши для уравнения колебания мембраны

$$u_{tt} = \Delta u + \sin t\cos x\cos y,$$

$$\begin{cases} \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = 0, \ y \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad x = \pi, \ y \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = 0, \ x \in [0,\pi], \\ \partial_n u = 0 & \text{при} \quad y = \pi, \ x \in [0,\pi], \end{cases} \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,y,t) = t + \sin t\cos x\cos y.$