1,2,4,5,18 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Чему равен предел в $D'(\mathbb{R})$ последовательности $\delta(x-n)$ при $n \to +\infty$? Почему? (1.5 балла) Ответ: 0

(2) Дать определение производной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить $\dfrac{\partial^2\theta(x-1,y)}{\partial x \partial y}$. (1.5 балла) Ответ: $\delta(x-1,y)$

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x+2)y' = 2\delta(x+2) - 1$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла) Ответ: $C_0\theta(x+2) + C_1 - \ln|x+2| - 2\delta(x+2)$

(4) Найти преобразование Фурье обобщенной функции

$$\frac{xe^{2ix}}{(x+1-i0)(x+i)}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{i-1}\begin{cases} e^{k+2}, k<-2 \\ -ie^{-i(k+2)}, k>-2 \end{cases}$

(5) Найти фундаментальное решение оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - 2i\frac{\partial}{\partial y},$$

а также частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция с компактным носителем. (2 балла) Ответ: $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2x-iy}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f = [-1,1]$, $\operatorname{supp} g = [0,1]$. Доказать, что

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset [-1,2]. \qquad \text{(3 балла)}$$

1,2,4,5,18 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Чему равен предел в $D'(\mathbb{R})$ последовательности $\delta(x+n)$ при $n \to +\infty$? Почему? (1.5 балла) Ответ: 0

(2) Дать определение производной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить $\dfrac{\partial^2 \theta(x, y-1)}{\partial x \partial y}$. (1.5 балла) Ответ: $\delta(x, y-1)$

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x-1)y' = \delta(x-1) + 2$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла) Ответ: $C_0\theta(x-1) + C_1 + \ln|x-1| - \delta(x-1)$

(4) Найти преобразование Фурье обобщенной функции

$$\frac{xe^{-ix}}{(x+1+i0)(x-i)}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{i+1}\begin{cases} ie^{i(1-k)}, k<1 \\ e^{1-k}, k>1 \end{cases}$

(5) Найти фундаментальное решение оператора

$$L = i\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y},$$

а также частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция с компактным носителем. (2 балла) Ответ: $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{y+2ix}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f = [0,2]$, $\operatorname{supp} g = [-1,0]$. Доказать, что

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset [-1,2]. \qquad \text{(3 балла)}$$

23,27 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Чему равен предел в $D'(\mathbb{R})$ последовательности $\delta(x-n)$ при $n \to +\infty$? Почему? (1.5 балла) Ответ: 0

(2) Дать определение производной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить $\dfrac{\partial^2\theta(x-1,y)}{\partial x\partial y}$. (1.5 балла) Ответ: $\delta(x-1,y)$

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x+2)y' = 2\delta(x+2) - 1$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла) Ответ: $C_0\theta(x+2) + C_1 - \ln|x+2| - 2\delta(x+2)$

(4) Найти фундаментальное решение оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - 2i\frac{\partial}{\partial y},$$

а также частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция с компактным носителем. (2 балла) Ответ: $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2x-iy}$

(5) Найти функцию Грина задачи Штурма-Лиувилля и решить с ее помощью неоднородную задачу:

$$\big((x+1)u'\big)' = f, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где f – гладкая функция на отрезке $[0,1]$. (2 балла) Ответ: $\begin{cases} \ln|x+1|(\frac{\ln|y+1|}{\ln 2} - 1), x < y \\ \ln|y+1|(\frac{\ln|x+1|}{\ln 2} - 1), x > y \end{cases}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f = [-1,1]$, $\operatorname{supp} g = [0,1]$. Доказать, что

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset [-1,2] \quad \text{(3 балла)}$$

23,27 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Чему равен предел в $D'(\mathbb{R})$ последовательности $\delta(x+n)$ при $n \to +\infty$? Почему? (1.5 балла) Ответ: 0

(2) Дать определение производной функции из $D'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить $\dfrac{\partial^2 \theta(x, y-1)}{\partial x \partial y}$. (1.5 балла) Ответ: $\delta(x, y-1)$

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x-1)y' = \delta(x-1) + 2$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла) Ответ: $C_0\theta(x-1) + C_1 + \ln|x-1| - \delta(x-1)$

(4) Найти фундаментальное решение оператора

$$L = i\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y},$$

а также частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция с компактным носителем. (2 балла) Ответ: $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{y+2ix}$

(5) Найти функцию Грина задачи Штурма-Лиувилля и решить с ее помощью неоднородную задачу:

$$\left(xu'\right)' = f, \quad u(1) = u(2) = 0,$$

где f – гладкая функция на отрезке $[1,2]$. (2 балла) Ответ: $\begin{cases} \ln|x|(\frac{\ln|y|}{\ln 2} - 1), x < y \\ \ln|y|(\frac{\ln|x|}{\ln 2} - 1), x > y \end{cases}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть $f, g \in D'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f = [0,2]$, $\operatorname{supp} g = [-1,0]$. Доказать, что

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset [-1,2] \quad \text{(3 балла)}$$

10–14,17 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать достаточные условия того, что последовательность регулярных обобщенных функций является δ-образной. Показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2+x^2)}=\delta(x)$. (1.5 балла)

(2) Дать определение фундаментального решения обыковенного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора $\left(\dfrac{d}{dx}+1\right)^2$. (1.5 балла)

Ответ: $xe^{-x}\theta(x)$

- Решите следующие задачи

(3) Найти преобразование Фурье функции $\dfrac{xe^{ix}}{(x-1-i0)(x+i)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{2\pi i}{1+i}\begin{cases}-ie^{k+1}, k<-1\\ e^{i(k+1)}, k>-1\end{cases}$

(4) Найти общий вид решения уравнения $(x+1)y' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x-1}+\delta(x+1)$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $C_0\theta(x+1)+C_1-\frac{1}{2}\ln|\frac{x+1}{x-1}|-\delta(x+1)$

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L=\dfrac{\partial}{\partial x}-3\dfrac{\partial}{\partial y}$ в $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu=f$, где $f\in D(\mathbb{R}^2)$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{1}{3}\delta(x+\frac{y}{3})\theta(y)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение производной функции в $D'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить $\dfrac{\partial}{\partial x}\theta(t-|x|)$. (3 балла)

Ответ: $\theta(t)(\delta(t+|x|)-\delta(t-|x|))$

10–14,17 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Сформулировать достаточные условия того, что последовательность регулярных обобщенных функций является δ-образной. Показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to-0} \dfrac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2+x^2)} = -\delta(x)$. (1.5 балла)

(2) Дать определение фундаментального решения обыковенного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора $\left(\dfrac{d}{dx}-1\right)^2$. (1.5 балла)

Ответ: $xe^x\theta(x)$

- Решите следующие задачи

(3) Найти преобразование Фурье функции $\dfrac{xe^{-ix}}{(x+1+i0)(x-i)}$. (2 балла)

Ответ: $-\frac{2\pi i}{1+i}\begin{cases} ie^{i(1-k)}, k<1 \\ e^{1-k}, k>1 \end{cases}$

(4) Найти общий вид решения уравнения $(x-1)y' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x+1} + \delta(x-1)$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $C_0\theta(x-1) + C_1 - \frac{1}{2}\ln|\frac{x+1}{x-1}| - \delta(x-1)$

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = 3\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y}$ в $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu=f$, где $f\in D(\mathbb{R}^2)$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{3}\delta(\frac{x}{3}+y)\theta(x)$

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение производной функции в $D'(\mathbb{R}^n)$. Вычислить $\dfrac{\partial}{\partial t}\theta(t-|x|)$. (3 балла)

Ответ: $\delta(t-|x|)$

20 группа

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение регулярной обобщенной функции на $\mathbb{R}$. Какие из следующих функций являются ядрами регулярных функций? Почему?
а) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$; б) $\dfrac{1}{x\sqrt{|x|}}$; в) $\ln|x|$; г) e^x. (1.5 балла)
Ответ: а,в,г.

(2) Дать определение преобразования Фурье функции из $S'(\mathbb{R})$. Показать, что функция $\sin x$ принадлежит $S'(\mathbb{R})$ и найти ее преобразование Фурье. (1.5 балла)
Ответ: $\frac{1}{2i}(\delta(k+1)-\delta(k-1))$

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x+1)y' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x-1} + \mathcal{P}\dfrac{1}{x+1}$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)
Ответ: $C_0\theta(x+1) + C_1 + \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \mathcal{P}\frac{1}{x+1}$

(4) Найти общий вид решения уравнения $y'' - (1+3i)y' + 3iy = \delta(x) + 2$ в $S'(\mathbb{R})$. (2 балла)
Ответ: $C_0e^{i3x} - 2 - \frac{i}{3+i}(e^{i3x}\theta(x) + e^x\theta(-x))$

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = i\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}$, принадлежащее $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция с компактным носителем. (2 балла)
Ответ: $\frac{1}{\pi}\frac{1}{2y+ix}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение предела функции в $D'(\mathbb{R})$. Вычислить $\lim\limits_{k\to+\infty}\Big(\cos\big(k(x-1)\big)\mathcal{P}\dfrac{1}{x-1}\Big)$. (3 балла)
Ответ: 0

20 группа

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение регулярной обобщенной функции на $\mathbb{R}$. Какие из следующих функций являются ядрами регулярных функций? Почему?
а) $\dfrac{1}{x}$; б) x^2; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|}}$; г) $\dfrac{1}{x\ln|x|}$. (1.5 балла)
Ответ: б,в.

(2) Дать определение преобразования Фурье функции из $S'(\mathbb{R})$. Показать, что функция $\cos x$ принадлежит $S'(\mathbb{R})$ и найти ее преобразование Фурье. (1.5 балла)
Ответ: $\frac{1}{2}(\delta(k-1)+\delta(k+1))$

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x-1)y' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x-1} + \mathcal{P}\dfrac{1}{x+1}$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)
Ответ: $C_0\theta(x-1) + C_1 + \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \mathcal{P}\frac{1}{x-1}$

(4) Найти общий вид решения уравнения $y'' - (1+5i)y' + 5iy = 1 + 2\delta(x)$ в $S'(\mathbb{R})$. (2 балла)
Ответ: $C_0 e^{i5x} + \frac{1}{5(5+i)} + \frac{2i}{5+i}(e^{i5x}\theta(x) - 2\pi e^x\theta(-x))$

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = i\dfrac{\partial}{\partial x} + 2\dfrac{\partial}{\partial y}$, принадлежащее $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция с компактным носителем. (2 балла)
Ответ: $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{y+2ix}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение предела функции в $D'(\mathbb{R})$. Вычислить $\lim\limits_{k\to+\infty}\Big(\cos\big(k(x+1)\big)\mathcal{P}\dfrac{1}{x+1}\Big)$. (3 балла)
Ответ: 0

25, 26 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение произведения обобщенной функции на гладкую функцию. Вычислить $x \cdot \dfrac{1}{x+i0}$. (1.5 балла)

Ответ: 1

(2) Дать определение свертки двух функций из $D'(\mathbb{R})$. Существует ли свертка функций e^{-x^2} и $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$? Почему? (1.5 балла)

- Решите следующие задачи

(3) Найти преобразование Фурье обобщенной функции $\dfrac{x^2}{(x+1-i0)(x+2i)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{2\pi}{1-2i}\begin{cases} 4e^{2k}, k<0 \\ -e^{-ik}, k>0 \end{cases} + 2\pi\delta(k)$

(4) Пусть f – непрерывная функция с компактным носителем. Вычислив предварительно фундаментальное решение, найти частное решение уравнения

$$y''' + 3y'' - 10y' = f(x). \qquad (2 \text{ балла})$$

Ответ: $(\frac{e^{2x}}{14} + \frac{e^{-5x}}{35} - \frac{1}{10})\theta(x)$

(5) Найти функцию Грина задачи Штурма-Лиувилля и с ее помощью решить неоднородную задачу:

$$\left(\frac{u'}{x}\right)' = f, \quad u(1)' = u(2) = 0,$$

где f – гладкая функция на отрезке $[1,2]$.(2 балла)

Ответ: $\begin{cases} \frac{y^2}{2} - 2, x<y \\ \frac{x^2}{2} - 2, x>y \end{cases}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть f – 1-периодическое продолжение функции $x^2 - x, 0 < x < 1$. Найти все производные $f^{(m)}, m \in \mathbb{N}$, функции f. (3 балла)

Ответ: f' – 1-периодическое продолжение функции $2x-1, 0<x<1$

$f'' = 2 - 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$

$f^{(m)} = -2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{(m-2)}(x-n), m \geqslant 3$

25, 26 группы

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение произведения обобщенной функции на гладкую функцию. Вычислить $x \cdot \dfrac{1}{x - i0}$. (1.5 балла)

Ответ: 1

(2) Дать определение свертки двух функций из $D'(\mathbb{R})$. Существует ли свертка функций e^{-x^2} и $\dfrac{1}{x + i0}$? Почему? (1.5 балла)

- Решите следующие задачи

(3) Найти преобразование Фурье обобщенной функции $\dfrac{x^2}{(x - 2 + i0)(x - i)}$. (2 балла)

Ответ: $\frac{2\pi}{1+2i}\begin{cases} e^{i2k}, k < 0 \\ e^{-k}, k > 0 \end{cases} + \frac{4\pi\delta(k)}{1+2i}$

(4) Пусть f – непрерывная функция с компактным носителем. Вычислив предварительно фундаментальное решение, найти частное решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 5y' = f(x). \qquad \text{(2 балла)}$$

Ответ: $(\frac{e^x}{6} + \frac{e^{-5x}}{30} - \frac{1}{5})\theta(x)$

(5) Найти функцию Грина задачи Штурма-Лиувилля и с ее помощью решить неоднородную задачу:

$$\left(\frac{u'}{x+1}\right)' = f, \quad u(0)' = u(1) = 0,$$

где f – гладкая функция на отрезке $[0, 1]$.(2 балла)

Ответ: $\begin{cases} \frac{(y+1)^2}{2} - 2, x < y \\ \frac{(x+1)^2}{2} - 2, x > y \end{cases}$

- Выполнить следующее задание.

(6) Пусть $f = |\sin x|$. Найти все производные $f^{(m)}, m \in \mathbb{N}$, функции f. (3 балла)

Ответ: $f' = |\cos x| \operatorname{sign} \cos x$ – 1-периодическое продолжение функции $\cos x, 0 < x < 1$

$f'' = -|\sin x| + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - \pi n)$

$f^{(2m+1)} = (-1)^m |\cos x| \operatorname{sign} \cos x + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \delta^{(2m-2k-1)}(x - \pi n), m \geqslant 1$

$f^{(2m)} = (-1)^m |\sin x| + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \delta^{(2m-2k-2)}(x - \pi n), m \geqslant 1$