

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (6 семестр, 2 апреля 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение носителя обобщенной функции на \mathbb{R} . Какое множество является носителем обобщенной функции \mathcal{P}_x^1 ? Почему? (1.5 балла)

Ответ: \mathbb{R} .

(2) Дать определение фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора $y' + xy$. (1.5 балла)

Ответ: $e^{\frac{t^2-x^2}{2}}\theta(x-t)$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x+1)y' = \delta(x+1) + \mathcal{P}\frac{1}{x-1}$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $C_1\theta(x+1) + C_2 - \delta(x+1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

(4) Найти общий вид решения уравнения $y'' + 4y' + 4y = 1 - \delta''(x)$ в $S'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{4} - \delta(x) + 4\theta(x)e^{-2x}(x-1)$.

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = 2i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}$, принадлежащее $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu = f$, где $f \in D(\mathbb{R}^2)$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{\pi}\frac{1}{ix+4y}$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение предела функции в $D'(\mathbb{R})$. Вычислить $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin \frac{x}{2\varepsilon}\right)$ в $D'(\mathbb{R})$. (3 балла)

Ответ: $\pi\delta(x)$.

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (6 семестр, 2 апреля 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение носителя обобщенной функции на \mathbb{R} . Какое множество является носителем обобщенной функции $\frac{1}{x+i0}$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: \mathbb{R} .

(2) Дать определение фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора $y' + 2xy$. (1.5 балла)

Ответ: $e^{t^2-x^2}\theta(x-t)$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x-1)y' = \delta(x-1) + \mathcal{P}\frac{1}{x+1}$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $C_1\theta(x-1) + C_2 - \delta(x-1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

(4) Найти общий вид решения уравнения $y'' + 2y' + y = 1 + \delta''(x)$ в $S'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $1 + \delta(x) + \theta(x)e^{-x}(x-2)$.

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = 2i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}$, принадлежащее $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu = f$, где $f \in D(\mathbb{R}^2)$.

Ответ: $\frac{1}{\pi}\frac{1}{ix-4y}$. (2 балла)

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение предела функции в $D'(\mathbb{R})$. Вычислить $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin \frac{2x}{\varepsilon}\right)$ в $D'(\mathbb{R})$. (3 балла)

Ответ: $\pi\delta(x)$.

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (6 семестр, 2 апреля 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение носителя обобщенной функции на \mathbb{R} . Какое множество является носителем обобщенной функции $\theta(x)$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: $[0, +\infty)$.

(2) Дать определение фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора $y' - xy$. (1.5 балла)

Ответ: $e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\theta(x-t)$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x+2)y' = \delta(x+2) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $C_1\theta(x+2) + C_2 - \delta(x+2) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$.

(4) Найти общий вид решения уравнения $y'' - 4y' + 4y = 1 - \delta''(x)$ в $S'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{4} - \delta(x) - 4\theta(-x)e^{2x}(x+1)$.

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$, принадлежащее $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu = f$, где $f \in D(\mathbb{R}^2)$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{\pi} \frac{1}{4ix+y}$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение предела функции в $D'(\mathbb{R})$. Вычислить $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin \frac{x}{3\varepsilon}\right)$ в $D'(\mathbb{R})$. (3 балла)

Ответ: $\pi\delta(x)$.

Вопросы к коллоквиуму по методам математической физики (6 семестр, 2 апреля 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Дать определение носителя обобщенной функции на \mathbb{R} . Какое множество является носителем обобщенной функции $\frac{1}{x - i0}$? Почему? (1.5 балла)

Ответ: \mathbb{R} .

(2) Дать определение фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора $y' - 2xy$. (1.5 балла)

Ответ: $e^{x^2 - t^2} \theta(x - t)$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти общий вид решения уравнения $(x - 2)y' = \delta(x - 2) + \mathcal{P}\frac{1}{x - 1}$ в $D'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $C_1 \theta(x - 2) + C_2 - \delta(x - 2) + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$.

(4) Найти общий вид решения уравнения $y'' - 2y' + y = 1 + \delta''(x)$ в $S'(\mathbb{R})$. (2 балла)

Ответ: $1 + \delta(x) - \theta(-x)e^x(x + 2)$.

(5) Найти фундаментальное решение оператора $L = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y}$, принадлежащее $S'(\mathbb{R}^2)$, а также частное решение уравнения $Lu = f$, где $f \in D(\mathbb{R}^2)$. (2 балла)

Ответ: $\frac{1}{\pi} \frac{1}{4ix - y}$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Дать определение предела функции в $D'(\mathbb{R})$. Вычислить $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin \frac{3x}{\varepsilon} \right)$ в $D'(\mathbb{R})$. (3 балла)

Ответ: $\pi \delta(x)$.