

Вопросы к экзамену по методам математической физики

(6 семестр, 9 июня 2018)

- Ответьте на следующие вопросы.

(1) Дайте определение уравнения эллиптического типа. Принадлежит ли уравнение $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u$ к эллиптическому типу? Почему? (1 балл)

Ответ: нет

(2) Дайте определение правильной бесконечно удаленной точки для уравнения второго порядка. Является ли точка $z = \infty$ правильной для уравнения $W'' + \frac{2}{z}(W' + W) = 0$? Почему? (1 балл)

Ответ: нет

- Решите следующие задачи

(3) Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} W''W + 2W' = e^z \\ W(0) = 1, W'(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с центром в точке $z_0 = 0$ с точностью до $O(z^4)$. (1 балл)

Ответ: $1 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + O(z^4)$

(4) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$zW'' + (1-z)W' - W = 0$$

Вычислить один из полученных интегралов. (1 балл)

Ответ: $W_1 = e^z, W_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{zt}}{t-1} dt, \operatorname{Re} z > 0$

(5) Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < \varphi < \pi \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=2} = \sin 2\varphi \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $\frac{\sin \varphi}{3}(r + \frac{4}{r}) + \frac{4 \sin 2\varphi}{15}(r^2 + \frac{1}{r^2})$

(6) Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + 2 \cos \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $8(1 + \frac{2}{\pi})(1 - e^{-\frac{t}{4}}) \cos \frac{x}{2} + \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^3} (1 - e^{-(\frac{1+2n}{2})^2 t}) \cos \frac{2n+1}{2} x$

- Выполните следующие задания.

(7) Вычислить матрицу монодромии для системы $\begin{cases} W_1' = W_2 \\ W_2' = \frac{1}{3z}W_2 - \frac{1}{3z^2}W_1 \end{cases}$

в окрестности точки $z_0 = 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 & 3(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})z_1 \\ \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1}{z_1} & 3 - e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}$

(8) Найти обобщенное решение задачи Коши $u_{tt} = u_{xx} + \delta(t)(\delta(x) + \delta'(x))$, обращающееся в 0 при $t < 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{1}{2}(\theta(t - |x|) + \theta(t)(\delta(t + x) - \delta(t - x)))$

Вопросы к экзамену по методам математической физики

(6 семестр, 9 июня 2018)

- Ответьте на следующие вопросы.

(1) Дайте определение уравнения эллиптического типа. Принадлежит ли уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = u$ к эллиптическому типу? Почему? (1 балл)

Ответ: нет

(2) Дайте определение правильной бесконечно удаленной точки для уравнения второго порядка. Является ли точка $z = \infty$ правильной для уравнения $W'' + \frac{2}{z}W' + \frac{1}{z^3}W = 0$? Почему? (1 балл)

Ответ: да

- Решите следующие задачи

(3) Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} W''W - 2W' = \sin z \\ W(0) = 1, W'(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с центром в точке $z_0 = 0$ с точностью до $O(z^4)$. (1 балл)

Ответ: $1 + \frac{z^3}{6} + O(z^4)$

(4) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$zW'' - zW' - W = 0$$

Вычислить один из полученных интегралов. (1 балл)

Ответ: $W_1 = ze^z, W_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{zt}}{(t-1)^2} dt, \operatorname{Re} z > 0$

(5) Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 3, 0 < \varphi < \pi \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=3} = \sin 4\varphi \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $\frac{\sin 2\varphi}{160} \left(r^2 + \frac{81}{r^2} \right) + \frac{3 \sin 4\varphi}{4(81 - \frac{1}{81})} \left(r^4 + \frac{1}{r^4} \right)$

(6) Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2 + \cos \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $4\left(1 + \frac{8}{\pi}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right) \cos \frac{x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3} \left(1 - e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$

- Выполните следующие задания.

(7) Вычислить матрицу монодромии для системы $\begin{cases} W_1' = W_2 \\ W_2' = \frac{1}{4z}W_2 - \frac{1}{4z^2}W_1 \end{cases}$

в окрестности точки $z_0 = 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4i - 1 & 4(1 - i)z_1 \\ \frac{i-1}{z_1} & 4 - i \end{pmatrix}$

(8) Найти обобщенное решение задачи Коши $u_{tt} = u_{xx} + \delta(x)(\delta(t) + \delta'(t))$, обращающееся в 0 при $t < 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{\theta(t)}{2} \left(\theta(t - |x|) + \delta(t - |x|) \right)$

Вопросы к экзамену по методам математической физики

(6 семестр, 9 июня 2018)

- Ответьте на следующие вопросы.

(1) Дайте определение уравнения эллиптического типа. Принадлежит ли уравнение $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = u$ к эллиптическому типу? Почему? (1 балл)

Ответ: нет

(2) Дайте определение правильной бесконечно удаленной точки для уравнения второго порядка. Является ли точка $z = \infty$ правильной для уравнения $W'' + \frac{2}{z^2}W' + \frac{1}{z}W = 0$? Почему? (1 балл)

Ответ: нет

- Решите следующие задачи

(3) Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} W''W + 3W' = e^{-z} \\ W(0) = 1, W'(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с центром в точке $z_0 = 0$ с точностью до $O(z^4)$. (1 балл)

Ответ: $1 + \frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + O(z^4)$

(4) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$zW'' + (2 - z)W' + W = 0$$

Вычислить один из полученных интегралов. (1 балл)

Ответ: $W_1 = z - 2, W_2 = \int_1^\infty \frac{e^{zt}(t-1)^2}{t^2} dt, \operatorname{Re} z < 0$

(5) Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < \varphi < \pi \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=2} = \sin 4\varphi \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $\frac{\sin 2\varphi}{30}(r^2 + \frac{16}{r^2}) + \frac{\sin 4\varphi}{2(16 - \frac{1}{16})}(r^4 + \frac{1}{r^4})$

(6) Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2 + 2 \cos \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $4(2 + \frac{8}{\pi})(1 - e^{-\frac{t}{4}}) \cos \frac{x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^3} (1 - e^{-(n + \frac{1}{2})^2 t}) \cos(n + \frac{1}{2})x$

- Выполните следующие задания.

(7) Вычислить матрицу монодромии для системы $\begin{cases} W_1' = W_2 \\ W_2' = \frac{1}{2z}W_2 - \frac{1}{2z^2}W_1 \end{cases}$

в окрестности точки $z_0 = 0$. (3 балла)

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & -2z_1 \\ -\frac{2}{z_1} & 3 \end{pmatrix}$

(8) Найти обобщенное решение задачи Коши $u_{tt} = u_{xx} + \delta(t)\delta''(x)$, обращающееся в 0 при $t < 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{\theta(t)}{2}(\delta'(t+x) - \delta'(t-x))$

Вопросы к экзамену по методам математической физики

(6 семестр, 9 июня 2018)

- Ответьте на следующие вопросы.

(1) Дайте определение уравнения эллиптического типа. Принадлежит ли уравнение $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u$ к эллиптическому типу? Почему? (1 балл)

Ответ: да

(2) Дайте определение правильной бесконечно удаленной точки для уравнения второго порядка. Является ли точка $z = \infty$ правильной для уравнения $W'' + \frac{1}{z^2}(W' + W) = 0$? Почему? (1 балл)

Ответ: да

- Решите следующие задачи

(3) Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} W''W - 3W' = \cos z \\ W(0) = 1, W'(0) = 0 \end{cases}$$

в виде ряда с центром в точке $z_0 = 0$ с точностью до $O(z^4)$. (1 балл)

Ответ: $1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + O(z^4)$

(4) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$zW'' + (2 - z)W' - 2W = 0$$

Вычислить один из полученных интегралов. (1 балл)

Ответ: $W_1 = e^z, W_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{te^{zt}}{t-1} dt, \operatorname{Re} z > 0$

(5) Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 3, 0 < \varphi < \pi \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=3} = \sin 2\varphi \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $\frac{\sin \varphi}{8}(r + \frac{9}{r}) + \frac{3 \sin 2\varphi}{2(9 - \frac{1}{9})}(r^2 + \frac{1}{r^2})$

(6) Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + 3 \cos \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

(1 балл)

Ответ: $4(3 + \frac{4}{\pi})(1 - e^{-\frac{t}{4}}) \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^3} (1 - e^{-(n + \frac{1}{2})^2 t}) \cos(n + \frac{1}{2})x$

- Выполните следующие задания.

(7) Вычислить матрицу монодромии для системы $\begin{cases} W_1' = W_2 \\ W_2' = \frac{1}{5z}W_2 - \frac{1}{5z^2}W_1 \end{cases}$

в окрестности точки $z_0 = 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 & 5(1 - e^{i\frac{2\pi}{5}})z_1 \\ e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 & 5 - e^{i\frac{2\pi}{5}} \end{pmatrix}$

(8) Найти обобщенное решение задачи Коши $u_{tt} = u_{xx} + \delta''(t)\delta(x)$, обращающееся в 0 при $t < 0$. (3 балла)

Ответ: $\frac{1}{2}\delta'(t - |x|)$