Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 16 июня 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Вычислить квадратичную форму матрицы $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$. При каких значениях a форма является положительно определенной? Почему? Определить тип уравнения $u_{xx} + au_{xy} + u_{yy} = 0$ при таких a. (1.5 балла)
Ответ: $2\xi_1^2 + 2a\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2, -2 < a < 2$, эллиптический.

(2) Какие из перечисленных функций являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Каким собственным значениям они соответствуют? Какова кратность этих собственных значений?
а) $e^{i\varphi}\cos\theta$; б) $e^{i\varphi}$; в) $e^{-2i\varphi}\cos\theta$. (1.5 балла)
Ответ: а), $\lambda = 2$, кратность 3.

- Решите следующие задачи

(3) Найти интегральные представления для решений уравнения
$$4zW'' + (z-4)W' + W = 0.$$
Вычислить один из полученных интегралов. (2 балла)
Ответ: $W_1 = z^2 e^{\frac{-z}{4}}, W_2 = \int_0^\infty \frac{e^{zt}dt}{(4t+1)^3}, \operatorname{Re} z < 0$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое
$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=1} = a + 9\sin^2\theta, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=2} = -5\cos\theta, \end{aligned}$$
где a – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)
Ответ: при $a \neq -6$ решение не существует, если $a = -6$, то $u = CP_0(\cos\theta) - \frac{20}{7}(2r + \frac{1}{r^2})P_1(\cos\theta) - \frac{3}{31}(r^2 + \frac{64}{3r^3})P_2(\cos\theta), C$ – произвольная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для волнового уравнения
$$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} + \cos 3t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ &u'|_{x=0} = u'|_{x=\pi} = 0, \\ &u|_{t=0} = \cos 3x, \\ &u_t|_{t=0} = 1 + \cos^2 x. \end{aligned}$$
Ответ: $u = \frac{1-\cos 3t}{9} + \frac{3t}{2} + \frac{1}{12}\sin 6t\cos 2x + \cos 9t\cos 3x$. (2 балла)

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя конформное отображение, доказать, что функция Грина задачи Дирихле для полосы $-\infty < x < \infty, 0 < y < \pi$, имеет вид
$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}, \quad M = (x,y), \quad M_0 = (x_0, y_0),$$
здесь $\ln 1 = 0$. (3 балла)

Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 16 июня 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Вычислить квадратичную форму матрицы $\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$. При каких значениях a форма является положительно определенной? Почему? Определить тип уравнения $3u_{xx} + 2au_{xy} + 3u_{yy} = 0$ при таких a. (1.5 балла)
Ответ: $3\xi_1^2 + 2a\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2, -3 < a < 3$, эллиптический.

(2) Какие из перечисленных функций являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Каким собственным значениям они соответствуют? Какова кратность этих собственных значений?
а) $e^{2i\varphi}\cos\theta$; б) 1; в) $e^{-i\varphi}$. (1.5 балла)
Ответ: б), $\lambda = 0$, кратность 1.

- Решите следующие задачи

(3) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$3zW'' + (2z-3)W' + 2W = 0.$$

Вычислить один из полученных интегралов. (2 балла)
Ответ: $W_1 = z^2 e^{-\frac{2z}{3}}, W_2 = \int_0^\infty \frac{e^{zt}dt}{(3t+2)^3}, \operatorname{Re} z < 0$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=1} = a + 3\sin^2\theta, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=2} = 15\cos\theta, \end{aligned}$$

где a – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)
Ответ: при $a \neq -2$ решение не существует, если $a = -2$, то $u = CP_0(\cos\theta) + \frac{60}{7}(2r + \frac{1}{r^2})P_1(\cos\theta) - \frac{1}{31}(r^2 + \frac{64}{3r^3})P_2(\cos\theta), C$ – произвольная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} + \cos 4t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ &u'|_{x=0} = u'|_{x=\pi} = 0, \\ &u|_{t=0} = \cos 4x, \\ &u_t|_{t=0} = 1 + \cos^2 x. \end{aligned}$$

(2 балла)
Ответ: $u = \frac{1-\cos 4t}{16} + \frac{3t}{2} + \frac{1}{8}\sin 4t \cos 2x + \cos 4t \cos 4x$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя конформное отображение, доказать, что функция Грина задачи Дирихле для полосы $0 < x < \pi, -\infty < y < \infty$, имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\cos(x + x_0) - \operatorname{ch}(y - y_0)}{\cos(x - x_0) - \operatorname{ch}(y - y_0)}, \quad M = (x, y), \quad M_0 = (x_0, y_0),$$

здесь $\ln 1 = 0$. (3 балла)

Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 16 июня 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Вычислить квадратичную форму матрицы $\begin{pmatrix} 5 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$. При каких значениях a форма является положительно определенной? Почему? Определить тип уравнения $5u_{xx} + 2au_{xy} + 5u_{yy} = 0$ при таких a. (1.5 балла)

Ответ: $5\xi_1^2 + 2a\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2, -5 < a < 5$, эллиптический.

(2) Какие из перечисленных функций являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Каким собственным значениям они соответствуют? Какова кратность этих собственных значений?

а) $e^{-i\varphi}$; б) $e^{-i\varphi}\cos\theta$; в) $e^{2i\varphi}\cos\theta$. (1.5 балла)

Ответ: б), $\lambda = 2$, кратность 3.

- Решите следующие задачи

(3) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$2zW'' + (3z-2)W' + 3W = 0.$$

Вычислить один из полученных интегралов. (2 балла)

Ответ: $W_1 = z^2 e^{-\frac{3z}{2}}, W_2 = \int_0^\infty \frac{e^{zt}dt}{(2t+3)^3}, \operatorname{Re} z < 0$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = a - 9\sin^2\theta,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2} = -15\cos\theta,$$

где a – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)

Ответ: при $a \neq 6$ решение не существует, если $a = 6$, то $u = CP_0(\cos\theta) - \frac{60}{7}(2r + \frac{1}{r^2})P_1(\cos\theta) + \frac{3}{31}(r^2 + \frac{64}{3r^3})P_2(\cos\theta), C$ – произвольная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} = 4u_{xx} + \cos 3t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u'|_{x=0} = u'|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \cos 3x,$$
$$u_t|_{t=0} = 1 + \cos^2 x.$$

(2 балла)

Ответ: $u = \frac{1-\cos 3t}{9} + \frac{3t}{2} + \frac{1}{8}\sin 4t\cos 2x + \cos 6t\cos 3x$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя конформное отображение, доказать, что функция Грина задачи Дирихле для полосы $-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x-x_0) + \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}, \quad M = (x,y), \quad M_0 = (x_0, y_0),$$

здесь $\ln 1 = 0$. (3 балла)

Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 16 июня 2021)

- Выполнить следующие задания.

(1) Вычислить квадратичную форму матрицы $\begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$. При каких значениях a форма является положительно определенной? Почему? Определить тип уравнения $2u_{xx} + au_{xy} + 2u_{yy} = 0$ при таких a. (1.5 балла)
Ответ: $4\xi_1^2 + 2a\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2, -4 < a < 4$, эллиптический.

(2) Какие из перечисленных функций являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Каким собственным значениям они соответствуют? Какова кратность этих собственных значений?
а) $e^{i\varphi}$; б) 1; в) $e^{2i\varphi}\cos\theta$. (1.5 балла)
Ответ: б), $\lambda = 0$, кратность 1.

- Решите следующие задачи

(3) Найти интегральные представления для решений уравнения

$$zW'' + (4z - 1)W' + 4W = 0.$$

Вычислить один из полученных интегралов. (2 балла)
Ответ: $W_1 = z^2 e^{-4z}, W_2 = \int_0^\infty \frac{e^{zt}dt}{(t+4)^3}, \operatorname{Re} z < 0$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = a - 3\sin^2\theta,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2} = 5\cos\theta,$$

где a – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$. (2 балла)
Ответ: при $a \neq 2$ решение не существует, если $a = 2$, то $u = CP_0(\cos\theta) + \frac{20}{7}(2r + \frac{1}{r^2})P_1(\cos\theta) + \frac{1}{31}(r^2 + \frac{64}{3r^3})P_2(\cos\theta), C$ – произвольная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} = 9u_{xx} + \cos 4t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u'|_{x=0} = u'|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \cos 4x,$$
$$u_t|_{t=0} = 1 + \cos^2 x.$$

(2 балла)
Ответ: $u = \frac{1-\cos 4t}{16} + \frac{3t}{2} + \frac{1}{12}\sin 6t\cos 2x + \cos 12t\cos 4x$.

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя конформное отображение, доказать, что функция Грина задачи Дирихле для полосы $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty$, имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\cos(x + x_0) + \operatorname{ch}(y - y_0)}{-\cos(x - x_0) + \operatorname{ch}(y - y_0)}, \quad M = (x, y), \quad M_0 = (x_0, y_0),$$

здесь $\ln 1 = 0$. (3 балла)