Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 22 июня 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Перечислить все (включая бесконечность) особые точки уравнения

$$(z-1)W'' + z^2W' + (z+1)W = 0.$$

Какие из них являются правильными? Почему? Найти первое слагаемое в асимптотике фундаментальных решений уравнения в окрестности правильных особых точек. (1.5 балла)

Ответ: $z = 1$ - правильная особая точка, асимптотика $W_1 = (z-1)(1 + O(|z-1|)), W_2 = \ln(z-1)(1 + O(|z-1|))$ при $|z-1| \to 0$; $z = \infty$ - неправильная особая точка.

(2) Чему равно 5-е собственное значение оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Какова его кратность? Какие функции образуют базис в соответствующем собственном подпространстве? (1.5 балла)

Ответ: $\lambda = 20$, кратность 9, собственные функции $e^{im\varphi}P_4^{|m|}(\cos\theta), m = -4, -3, ..., 4$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти решения уравнения

$$2z(z+2)W'' - (z-2)W' + W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z = 0$. Вычислить коэффициенты рядов явно. (2 балла)

Ответ: $W_1 = z^{\frac{1}{2}}, W_2 = z - 2$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = 3\cos^2\theta - \alpha,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2} = 7\cos\theta - 3\cos 2\theta,$$

где α – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)

Ответ: если $\alpha \neq 5$, то решений нет; если $\alpha = 5$, то $u = (A - \frac{4}{r})P_0(\cos\theta) + (8r + \frac{4}{r^2})P_1(\cos\theta) - r^2P_2(\cos\theta)$, где A - произвольная вещественная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - \cos t \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 1 + \sin(4\pi x).$$

(2 балла)

Ответ: $u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\pi(2n-1))^2 t}}{2n-1} \sin(2n-1)x - \frac{1}{1+(2\pi)^4}((2\pi)^2(\cos t - e^{-(2\pi)^2 t}) + \sin t)\sin 2\pi x + e^{-(4\pi)^2 t}\sin 4\pi x$

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя метод отражений, доказать, что решение u уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $y > 0$, непрерывное вплоть до границы, удовлетворяет равенству

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x',0)dx'}{(x-x')^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

(3 балла)

Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 22 июня 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Перечислить все (включая бесконечность) особые точки уравнения

$$(z+1)W'' + (z-1)^2 W' + zW = 0.$$

Какие из них являются правильными? Почему? Найти первое слагаемое в асимптотике фундаментальных решений уравнения в окрестности правильных особых точек. (1.5 балла)

Ответ: $z=-1$ - правильная особая точка, асимптотика $W_1 = (z+1)^{-3}(1+O(|z+1|)), W_2 = 1+O(|z+1|)$ при $|z+1| \to 0$; $z=\infty$ - неправильная особая точка.

(2) Чему равно 2-е собственное значение оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Какова его кратность? Какие функции образуют базис в соответствующем собственном подпространстве? (1.5 балла)

Ответ: $\lambda = 2$, кратность 3, собственные функции $e^{im\varphi}P_1^{|m|}(\cos\theta), m=-1,0,1$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти решения уравнения

$$2z(z+3)W'' - (z-3)W' + W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z=0$. Вычислить коэффициенты рядов явно. (2 балла)

Ответ: $W_1 = z^{\frac{1}{2}}, W_2 = z-3$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = -3\cos^2\theta - \alpha,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2} = 7\cos\theta + 3\cos 2\theta,$$

где α – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)

Ответ: если $\alpha \neq -5$, то решений нет; если $\alpha = -5$, то $u = (A+\frac{4}{r})P_0(\cos\theta) + (8r+\frac{4}{r^2})P_1(\cos\theta) + r^2P_2(\cos\theta)$, где A - произвольная вещественная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \cos t \sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 1 - \sin(2\pi x).$$

(2 балла)

Ответ: $u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(\pi(2n-1))^2 t}}{2n-1}\sin(2n-1)x + \frac{1}{1+(4\pi)^4}((4\pi)^2(\cos t - e^{-(4\pi)^2 t}) + \sin t)\sin 4\pi x - e^{-(2\pi)^2 t}\sin 2\pi x$

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя метод отражений, доказать, что решение u уравнения Лапласа в правой полуплоскости $x > 0$, непрерывное вплоть до границы, удовлетворяет равенству

$$u(x,y) = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(0,y')dy'}{x^2+(y-y')^2}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(3 балла)

Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 22 июня 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Перечислить все (включая бесконечность) особые точки уравнения

$$zW'' + (z-1)^2W' + W = 0.$$

Какие из них являются правильными? Почему? Найти первое слагаемое в асимптотике фундаментальных решений уравнения в окрестности правильных особых точек. (1.5 балла)

Ответ: $z = 0$ - правильная особая точка, асимптотика $W_1 = 1 + O(|z|), W_2 = \ln z(1 + O(|z|))$ при $|z| \to 0$; $z = \infty$ - неправильная особая точка.

(2) Чему равно 4-е собственное значение оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Какова его кратность? Какие функции образуют базис в соответствующем собственном подпространстве? (1.5 балла)

Ответ: $\lambda = 12$, кратность 7, собственные функции $e^{im\varphi}P_3^{|m|}(\cos\theta), m = -3, -2, ..., 3$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти решения уравнения

$$2z(z-3)W'' - (z+3)W' + W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z = 0$. Вычислить коэффициенты рядов явно. (2 балла)

Ответ: $W_1 = z^{\frac{1}{2}}, W_2 = z + 3$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = 3\cos^2\theta - \alpha,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2} = -7\cos\theta - 3\cos 2\theta,$$

где α – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)

Ответ: если $\alpha \neq 5$, то решений нет; если $\alpha = 5$, то $u = (A - \frac{4}{r})P_0(\cos\theta) - (8r + \frac{4}{r^2})P_1(\cos\theta) - r^2P_2(\cos\theta)$, где A - произвольная вещественная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - \cos t\sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 1 + \sin(2\pi x).$$

(2 балла)

Ответ: $u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(\pi(2n-1))^2t}}{2n-1}\sin(2n-1)x - \frac{1}{1+(4\pi)^4}((4\pi)^2(\cos t - e^{-(4\pi)^2t}) + \sin t)\sin 4\pi x + e^{-(2\pi)^2t}\sin 2\pi x$

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя метод отражений, доказать, что решение u уравнения Лапласа в нижней полуплоскости $y < 0$, непрерывное вплоть до границы, удовлетворяет равенству

$$u(x,y) = -\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x',0)dx'}{(x-x')^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y < 0.$$

(3 балла)

Вопросы к экзамену по методам математической физики
(6 семестр, 22 июня 2022)

- Выполнить следующие задания.

(1) Перечислить все (включая бесконечность) особые точки уравнения

$$(z+1)W'' + zW' + W = 0.$$

Какие из них являются правильными? Почему? Найти первое слагаемое в асимптотике фундаментальных решений уравнения в окрестности правильных особых точек. (1.5 балла)

Ответ: $z = -1$ - правильная особая точка, асимптотика $W_1 = (z+1)^2(1 + O(|z+1|)), W_2 = 1 + O(|z+1|)$ при $|z+1| \to 0$; $z = \infty$ - неправильная особая точка.

(2) Чему равно 3-е собственное значение оператора Лапласа-Бельтрами на сфере? Какова его кратность? Какие функции образуют базис в соответствующем собственном подпространстве? (1.5 балла)

Ответ: $\lambda = 6$, кратность 5, собственные функции $e^{im\varphi}P_2^{|m|}(\cos\theta), m = -2, -1, ..., 2$.

- Решите следующие задачи

(3) Найти решения уравнения

$$2z(z-2)W'' - (z+2)W' + W = 0$$

в виде рядов в окрестности точки $z = 0$. Вычислить коэффициенты рядов явно. (2 балла)

Ответ: $W_1 = z^{\frac{1}{2}}, W_2 = z + 2$.

(4) Решить задачу для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1} = -3\cos^2\theta - \alpha,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2} = -7\cos\theta + 3\cos 2\theta,$$

где α – вещественный параметр, напомним, что $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$. (2 балла)

Ответ: если $\alpha \neq -5$, то решений нет; если $\alpha = -5$, то $u = (A + \frac{4}{r})P_0(\cos\theta) - (8r + \frac{4}{r^2})P_1(\cos\theta) + r^2 P_2(\cos\theta)$, где A - произвольная вещественная постоянная.

(5) Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \cos t \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 1 - \sin(4\pi x).$$

(2 балла)

Ответ: $u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\pi(2n-1))^2 t}}{2n-1} \sin(2n-1)x + \frac{1}{1+(2\pi)^4}((2\pi)^2(\cos t - e^{-(2\pi)^2 t}) + \sin t)\sin 2\pi x - e^{-(4\pi)^2 t}\sin 4\pi x$

- Выполнить следующее задание.

(6) Используя метод отражений, доказать, что решение u уравнения Лапласа в левой полуплоскости $x < 0$, непрерывное вплоть до границы, удовлетворяет равенству

$$u(x,y) = -\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0,y')dy'}{x^2 + (y-y')^2}, \quad x < 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(3 балла)