САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Багаев

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2018

Рецензенты: проф., д-р физ.-мат. наук Т. А. Суслина,
проф., д-р физ.-мат. наук С. Л. Яковлев

Печатается по решению Учёного совета физического факультета СПбГУ.

А. А. Багаев ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СПб. 2018

В учебно-методическом пособии приведены 50 задач по теории вероятностей. Задачи предназначены для практических занятий обучающихся на основных образовательных программах по уровню бакалавриат «Инженерно-ориентированная физика» и «Прикладные физика и математика» по направлению «Прикладные математика и физика», «Физика» (экспериментальный поток) по направлению «Физика», «Электромагнитные и акустические процессы» по направлению «Радиофизика» Санкт-Петербургского государственного университета. Также задачи можно использовать на экзамене по учебной дисциплине «Теория вероятностей». Методы, необходимые для решения задач, соответствуют теоретическому материалу курса, читаемого автором в 5-м семестре. Для всех задач приведены ответы, для большинства — решения.

Комментарий автора

Настоящее пособие по-сути является вариантом сборника задач. Эти задачи использовались автором на экзамене по теории вероятностей в текущем и прошлом годах. Также некоторые из них были рекомендованы преподавателям, ведущим практические занятия по теории вероятностей в 5-м семестре.

Большинство задач придумано автором с целью охватить весь собственный курс теории вероятностей (за исключением математической статистики). Несколько задач позаимствовано из учебно-методического пособия [1] и учебников [2, 3], а также материалов проф. А. С. Благовещенского, доступных в сети Интернет по адресу: https://vk.com/a_s_b.

Содержание

Комбинаторика

Задача 1. Сколькими способами можно упорядочить множество

$$\{1, 2, \ldots, 2n\}$$

так, чтобы каждое чётное число имело чётный номер?

Р е ш е н и е: Чётное — чётный $\Rightarrow$ нечётное — нечётный, $(n!)^2$.

Задача 2. Какое количество различных символов (букв, цифр и т. п.) можно передать не более чем пятью знаками кода (Морзе), использующего точку $(\cdot)$ и тире (—)?

Р е ш е н и е: $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$.

Задача 3. Найти вероятность p того, что три студента получили за контрольную работу одинаковое количество баллов — 3 из 9, если известно, что в сумме они набрали 9 баллов на троих.

Р е ш е н и е: $p = 1/\#\Omega$, $\#\Omega$ — число способов расставить 2 перегородки по 10 позициям — между элементами множества

$$\{\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1}_{\text{9 элементов}}\}$$

и по краям. Порядок следования перегородок не важен, на одной позиции могут стоять 0, одна или 2 перегородки $\Rightarrow \#\Omega = \overline{C}_{10}^2 = C_{11}^2 = 55 \Rightarrow$ $\Rightarrow p = \frac{1}{55}$.

Задача 4. Найти коэффициент при мономе $x^2y^3z^3$ в разложении полинома

$$(x + y + z)^8.$$

Р е ш е н и е: Полиномиальный коэффициент — число упорядоченных разбиений $R(8|2,3,3) = \frac{8!}{2!3!3!} = 560$.

Задача 5. Найти коэффициент при мономе xy^4z^4 в разложении полинома

$$(x + y + z)^9.$$

Р е ш е н и е: Полиномиальный коэффициент — число упорядоченных разбиений $R(9|1,4,4) = \frac{9!}{1!4!4!} = 630$.

Классическая теория вероятностей

Задача 6. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Случайным образом вынимаем 4 шара без возвращения. Найти вероятность того, что 2 из них белые и 2 чёрные.

О т в е т: $\frac{C_4^2 C_5^2}{C_9^4} = \frac{10}{21}$

Задача 7. В урне 10 различных шаров. Случайным образом вынимаем 3 шара с возвращением. Найти вероятность того, что все шары разные.

О т в е т: $\frac{10!}{10^3(10-3)!} = \frac{18}{25}$

Задача 8. 16 шаров распределяются по четырём ящикам. Найти вероятность p того, что в каждом ящике по четыре шара в рамках статистики Максвелла—Больцмана.

Р е ш е н и е: Полное число способов равно 4^{16}, число распределений $4+4+4+4$ — $C_{16}^4 C_{12}^4 C_8^4 \Rightarrow p = \frac{C_{16}^4 C_{12}^4 C_8^4}{4^{16}}$.

Задача 9. 16 шаров распределяются по четырём ящикам. Найти вероятность p того, что в каждом ящике по четыре шара в рамках статистики Бозе—Эйнштейна.

О т в е т: $\frac{1}{\bar{C}_{16}^4} = \frac{1}{C_{19}^4}$.

Задача 10. В группе 10 студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух из них совпадут дни рождения.

О т в е т: $1 - \frac{365!}{365^{10} 355!} \approx 0{,}117$.

Задача 11. Для того, чтобы разрушить мост требуется попадание не менее двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания $p_1 = \frac{1}{10}$, $p_2 = \frac{3}{10}$ и $p_3 = \frac{2}{5}$ соответственно. Найти вероятность того, что мост разрушен.

Р е ш е н и е: Мост разрушен $\Leftrightarrow$ попало не менее двух бомб $\Rightarrow$
$$\Rightarrow (1-p_1)p_2p_3 + p_1(1-p_2)p_3 + p_1p_2(1-p_3) + p_1p_2p_3 =$$
$$= \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5} = \frac{83}{500}.$$

Задача 12. Найти вероятность P того, что среди 5 наугад выбранных карт окажутся карты всех мастей (в колоде 36 карт).

Р е ш е н и е: $\#\Omega = C_{36}^5$. Одна из мастей встречается дважды: 4 способа её выбора, при этом C_9^2 способов выбора двух карт. Остальные три — независимо друг от друга по $C_9^1 = 9$ способов (в колоде 9 карт одинаковой масти). $\Rightarrow P = \frac{4 \cdot 9^3 C_9^2}{C_{36}^5}$.

Задача 13. Найти вероятность P того, что среди 3 наугад выбранных карт окажутся карты разных мастей (в колоде 36 карт).

Р е ш е н и е: $\#\Omega = C_{36}^3$. Одна из мастей не встречается: 4 способа её выбора. Оставшиеся три — независимо друг от друга по $C_9^1 = 9$ способов (в колоде 9 карт одинаковой масти) $\Rightarrow P = \frac{4 \cdot 9^3}{C_{36}^3}$.

Биномиальное распределение

Задача 14. Правильную монету бросили 6 раз. Найти вероятность того, что орёл выпал не менее одного, но не более двух раз.

О т в е т: $\frac{1}{2^6}\left(C_6^1 + C_6^2\right) = \frac{21}{64}$.

Задача 15. Правильную монету бросили 6 раз. Найти вероятность того, что орёл выпал не менее трёх, но не более пяти раз.

О т в е т: $\frac{1}{2^6}\left(C_6^3 + C_6^4 + C_6^5\right) = \frac{41}{64}$.

Задача 16. Правильную монету бросили 5 раз. Найти вероятность того, что орёл выпал не более четырёх раз.

О т в е т: $1 - \frac{1}{2^5} C_5^5 = \frac{31}{32}$.

Задача 17. Правильную монету бросили 5 раз. Найти вероятность того, что орёл выпал не менее одного раза.

О т в е т: $1 - \frac{1}{2^5} C_5^0 = \frac{31}{32}$.

Задача 18. Двое бросают правильную монету n раз каждый. Найти вероятность p того, что у них выпадет одинаковое количество орлов.

О т в е т: $p = \frac{1}{2^{2n}} \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$. Последнее равенство следует из соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \sum_{k=1}^{m} C_m^k x^k y^{m-k} = \sum_{k=1}^{n+m} C_{n+m}^k x^k y^{n+m-k}.$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Задача 19. Правильную монету бросают 3600 раз. Найти (приближённо) вероятность того, что число выпадений орла будет в пределах от 1200 до 2100 раз. Ответ записать в виде интеграла.

Р е ш е н и е: $n = 3600$, $p = q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P(\{1200 < \xi < 2100\}) = P\left(\left\{-20 < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < 10\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-20}^{10} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

по интегральной теореме Муавра — Лапласа.

Задача 20. Правильную монету бросают 3600 раз. Найти (приближённо) вероятность того, что число выпадений орла будет в пределах от 1830 до 1860 раз. Ответ записать в виде интеграла.

Р е ш е н и е: $n = 3600$, $p = q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P(\{1830 < \xi < 1860\}) = P\left(\left\{1 < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < 2\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

по интегральной теореме Муавра — Лапласа.

Задача 21. Правильную монету бросают 2500 раз. Найти (приближённо) вероятность того, что число выпадений орла будет в пределах от 1225 до 1300 раз. Ответ записать в виде интеграла.

Р е ш е н и е: $n = 2500$, $p = q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P(\{1225 < \xi < 1300\}) = P\left(\left\{-1 < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < 2\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

по интегральной теореме Муавра — Лапласа.

Задача 22. Правильную монету бросают 2500 раз. Найти (приближённо) вероятность того, что число выпадений орла будет в пределах от 1000 до 2000 раз. Ответ записать в виде интеграла.

Р е ш е н и е: $n = 2500$, $p = q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P(\{1000 < \xi < 2000\}) = P\left(\left\{-10 < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < 30\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-10}^{30} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

по интегральной теореме Муавра — Лапласа.

Задача 23. Правильную монету бросают $4 \cdot 10^4$ раз. Найти (приближённо) вероятность того, что орёл выпадет 20200 раз.

Р е ш е н и е: $n = 4 \cdot 10^4$, $m = 20200$, $p = q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P(\{\xi = 20200\}) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{100} \varphi(2) \approx 0{,}0245,$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ по локальной теореме Муавра — Лапласа.

Задача 24. Правильную монету бросают 900 раз. Найти (приближённо) вероятность того, что орёл выпадет 405 раз.

Р е ш е н и е: $n = 900$, $m = 405$, $p = q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P(\{\xi = 405\}) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{15} \varphi(-3) \approx 0{,}0002,$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ по локальной теореме Муавра — Лапласа.

Задача 25. Для неумелого но упорного рыбака вероятность поймать рыбу за одну рыбалку равна 2%. Рыбак ходил на рыбалку 200 раз. Найти (приближённо) вероятность того, что за это время у него было 4 успешных рыбалки.

Р е ш е н и е: По теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} \Rightarrow P_{200}(4) \approx e^{-4} \frac{4^4}{4!} \approx 0{,}195.$$

Задача 26. У страховой компании 5000 клиентов. Вероятность наступления страхового случая в год составляет 0,1%. Найти (приближённо) вероятность того, что компании придётся делать три страховые выплаты в году.

Р е ш е н и е: По теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} \Rightarrow P_{5000}(3) \approx e^{-5}\frac{5^3}{3!} \approx 0{,}14.$$

Задача 27. Текст содержит 20000 знаков. Каждый знак может быть неправильно напечатан с вероятностью 0,04%. Найти (приближённо) вероятность p того, что в тексте не менее двух опечаток.

Р е ш е н и е: По теореме Пуассона

$$P_n(k) \approx e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} \Rightarrow p \approx 1 - e^{-8} - 8e^{-8} - 32e^{-8} = 1 - 41e^{-8} \approx 0{,}986.$$

Условная вероятность
Формула полной вероятности
Формула Байеса

Задача 28. В тире находятся два стрелка. Известно, что первый попадает в мишень с вероятностью $p_1 = \frac{4}{5}$, а второй — с вероятностью $p_2 = \frac{2}{5}$. Оба по одному разу стреляют по мишени. Найти вероятность p поражения мишени.

Р е ш е н и е: Мишень поражена $\Longleftrightarrow$ либо A_1 — оба попали, либо A_2 — первый попал, а второй промахнулся, либо A_3 — первый промахнулся, а второй попал. $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_1 = \varnothing \Rightarrow$

$$p = p_1 p_2 + p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{22}{25}.$$

Задача 29. В тире находятся два стрелка. Известно, что первый попадает в мишень с вероятностью $p_1 = \frac{3}{5}$, а второй — с вероятностью $p_2 = \frac{2}{5}$. Оба по одному разу стреляют по мишени. Найти вероятность p одного попадания в мишень.

Р е ш е н и е: Одно попадание в мишень $\Longleftrightarrow$ либо A_1 — первый попал, а второй промахнулся, либо A_2 — первый промахнулся, а второй попал. $A_1 \cap A_2 = \varnothing \Rightarrow$

$$p = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{13}{25}.$$

Задача 30. В тире находятся два стрелка. Известно, что первый попадает в мишень с вероятностью $p_1 = \frac{3}{5}$, а второй — с вероятностью $p_2 = \frac{2}{5}$. Раздался один выстрел (кто из них стрелял — мы не видели). Найти вероятность p поражения мишени.

Р е ш е н и е: Пусть событие B — мишень поражена, A_1 — стрелял первый стрелок, A_2 — стрелял второй стрелок. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $A_1 \cup \cup A_2 = \Omega$. По формуле полной вероятности $p = P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + + P(B|A_2)P(A_2)$. Очевидно, $P(B|A_1) = p_1, P(B|A_2) = p_2$ и, так как не знаем, кто стрелял, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

Задача 31. В тире находятся два стрелка. Известно, что первый попадает в мишень с вероятностью $p_1 = \frac{3}{5}$, а второй — с вероятностью $p_2 = \frac{2}{5}$. Раздался один выстрел (кто из них стрелял — мы не видели). Зафиксировано попадание в мишень. Найти вероятность того, что стрелял первый стрелок.

Р е ш е н и е: Пусть событие B — мишень поражена, A_1 — стрелял первый стрелок, A_2 — стрелял второй стрелок. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $A_1 \cup \cup A_2 = \Omega$. По формуле Байеса $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$. Очевидно, $P(B|A_1) = p_1, P(B|A_2) = p_2$ и, так как не знаем, кто стрелял, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_1|B) = \frac{p_1}{p_1+p_2} = \frac{3}{5}$.

Задача 32. В тире находятся два стрелка. Известно, что первый попадает в мишень с вероятностью $p_1 = \frac{3}{4}$, а второй — с вероятностью $p_2 = \frac{1}{4}$. Оба по одному разу стреляют по мишени. Зафиксировано одно попадание в мишень. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

Р е ш е н и е: Пусть событие B — одно попадание в мишень, A — попал первый стрелок. По формуле условной вероятности $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Одно попадание в мишень $\Longleftrightarrow$ либо A_1 — первый попал, а второй промахнулся, либо A_2 — первый промахнулся, а второй попал. $A_1 \cap A_2 = = \varnothing \Rightarrow P(B) = p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$. $A \cap B = A_1 \Rightarrow \Rightarrow P(A \cap B) = p_1(1-p_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A|B) = \frac{9}{10}$.

Распределение случайной величины
Плотность распределения
Функции от случайных величин

Задача 33. Пусть время T ожидания регистрации солнечного нейтрино распределено согласно экспоненциальному закону с параметром

$\lambda > 0$. Пусть к моменту времени t частица не зарегистрирована. Найти вероятность того, что начиная с момента времени t время ожидания регистрации не меньше s.

Р е ш е н и е: $P(\{T \geqslant t+s\}|\{T \geqslant t\}) = \frac{P(\{T \geqslant t+s\})}{P(\{T \geqslant t\})} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$.

Задача 34. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & x < 0,\ x > 2. \end{cases}$$

Найти константу a и вычислить $P(\{\xi > 1\})$.

О т в е т: $a = \frac{3}{8}$, $P(\{\xi > 1\}) = \frac{7}{8}$.

Задача 35. Абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $\rho_\xi(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $a\xi$, где $0 \neq a = \mathrm{const}$.

О т в е т: $\rho_{a\xi}(x) = \frac{1}{|a|}\,\rho_\xi\left(\frac{x}{a}\right)$.

Задача 36. Две абсолютно непрерывные случайные величины ξ и η имеют плотности распределения $\rho_\xi(x)$ и $\rho_\eta(x)$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $a\xi + b\eta$, где $0 \neq a = \mathrm{const}, 0 \neq b = \mathrm{const}$.

О т в е т: $\rho_{a\xi+b\eta}(x) = \frac{1}{|ab|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_\xi\left(\frac{x-y}{a}\right) \rho_\eta\left(\frac{y}{b}\right) dy$.

Задача 37. Две абсолютно непрерывные случайные величины ξ и η имеют плотности распределения $\rho_\xi(x)$ и $\rho_\eta(x)$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $\xi - \eta$.

О т в е т: $\rho_{\xi-\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_\xi(x+y)\rho_\eta(y)dy$.

Задача 38. Две случайные величины ξ и η имеют одинаковое стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. Найти распределение суммы $\xi + \eta$.

О т в е т: $N(0,2)$.

Задача 39. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}\,x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & x < 0,\ x > 2. \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения случайной величины $\eta = \sqrt{\xi}$.

О т в е т: $\rho_\eta(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}y^5, & 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}; \\ 0, & y < 0,\ y > \sqrt{2}. \end{cases}$

Задача 40. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^{-x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.

О т в е т: $\rho_\eta(y) = \chi_{[0,1]}(y)$.

Характеристические функции

Задача 41. Абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

где $0 < \lambda = \text{const}$. Вычислить характеристическую функцию $f_\xi(t)$.

О т в е т: $f_\xi(t) = \frac{1}{1 - i\frac{t}{\lambda}}$.

Задача 42. Абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$\rho_\xi(x) = e^{-2|x|}.$$

Вычислить характеристическую функцию $f_\xi(t)$.

О т в е т: $f_\xi(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$.

Задача 43. Дискретная случайная величина ξ принимает значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и значение 0 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Вычислить характеристическую функцию $f_\xi(t)$.

О т в е т: $f_\xi(t) = \cos^2 \frac{t}{2}$

Задача 44. Дискретная случайная величина ξ принимает значения -1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и 2 с вероятностью $\frac{3}{4}$. Вычислить характеристическую функцию $f_\xi(t)$.

О т в е т: $f_\xi(t) = \frac{1}{4}\, e^{-it} + \frac{3}{4}\, e^{2it}$.

Задача 45. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, характеристическая функция которой равна

$$f_\xi(t) = \frac{4}{t^2}\, \cos t \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Р е ш е н и е: $E\xi = -if'_\xi(0) = 0$; $D\xi = -f''_\xi(0) = \frac{7}{6}$.

Задача 46. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, характеристическая функция которой равна

$$f_\xi(t) = \frac{4}{t^2}\, e^{it} \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Р е ш е н и е: $E\xi = -if'_\xi(0) = 1$; $D\xi = -f''_\xi(0) + (f'(0))^2 = \frac{1}{6}$.

Задача 47. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, характеристическая функция которой равна

$$f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} + it}.$$

Р е ш е н и е: $E\xi = -if'_\xi(0) = 1$; $D\xi = -f''_\xi(0) + (f'(0))^2 = 1$.

Гауссовские векторы

Задача 48. Совместная плотность случайных величин ξ и η имеет вид

$$\rho_{\xi\eta}(x, y) = Ce^{-x^2 - xy - 3y^2}.$$

Найти константу C и ковариацию ξ и η.

Р е ш е н и е: $-x^2 - xy - 3y^2 = -\frac{1}{2}(\vec{r}, A\vec{r})$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Гауссов интеграл равен $\frac{2\pi}{\sqrt{\det A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} = C^{-1}$. Матрица ковариаций

$$S = A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{cov}(\xi, \eta) = -\frac{1}{11}.$$

Задача 49. Совместная плотность случайных величин ξ и η имеет вид
$$\rho_{\xi\eta}(x,y) = Ce^{-2x^2-xy-y^2}.$$
Найти константу C и ковариацию ξ и η.

Р е ш е н и е: $-2x^2 - xy - y^2 = -\frac{1}{2}(\vec{r}, A\vec{r})$, где
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Гауссов интеграл равен $\frac{2\pi}{\sqrt{\det A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}} = C^{-1}$. Матрица ковариаций
$$S = A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cov}(\xi,\eta) = -\frac{1}{7}.$$

Задача 50. Совместная плотность случайных величин ξ и η имеет вид
$$\rho_{\xi\eta}(x,y) = Ce^{-2x^2+4xy-3y^2}.$$
Найти константу C и ковариацию ξ и η.

Р е ш е н и е: $-2x^2 + 4xy - 3y^2 = -\frac{1}{2}(\vec{r}, A\vec{r})$, где
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Гауссов интеграл равен $\frac{2\pi}{\sqrt{\det A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{8}} = C^{-1}$. Матрица ковариаций
$$S = A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cov}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}.$$

Список литературы

[1] *Благовещенский А. С., Лемехов Е. Е., Олейник В. Л., Попов А. Н., Смородина Н. В.* Теория вероятностей: учеб.-методич. пособие для студентов 2 курса. СПб: Изд-во С.-Петерб ун-та, 1999.

[2] *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: Высшая школа, 1979.

[3] *Бородин А. Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб.: Лань, 1999.