

Список-минимум

I. Введение.

1. Доказать по методу математической индукции, что $3^n > 1 + 2n$ при $n \geq 2$.
2. Для заданных множеств A и B найти и изобразить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$:
 $A = [-1; 2)$; $B = (-2; 0)$.
3. Изобразить на плоскости множество $[-1; 2) \times (-2; 0)$.
4. Записать в виде интервала окрестность точки $a = -3$ радиуса $0,2$. Записать в виде объединения интервалов проколотую окрестность точки $a = -3$ радиуса $0,2$.
5. Для множества $X = (-3; 1]$ указать \sup , \inf , \max и \min (если они существуют).
6. Найти n из уравнения: $\frac{C_{n-2}^1}{C_n^3} = \frac{3}{10}$.
7. Найти коэффициент при x^{-3} в выражении $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

II. Комплексные числа.

1. Вычислить $(2 + 3i)\overline{(-2 - 2i)}(1 - i) - \frac{i^{27}}{-2+i}$
2. Представить в тригонометрической форме записи число $z = -5 + 7i$.
3. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z , удовлетворяющие неравенству $|z - i| \leq 2$.
4. Выразить $\cos 6x$ через $\sin x$ и $\cos x$.
5. Вычислить $\sqrt[5]{-32i}$.
6. Выполнить деление с остатком: $3x^5 + 1$ на $x^2 - 1$.
7. Разложить на множители полином $2x^3 - x - 1$.

III. Пределы.

1. Сформулировать определение $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
2. Сформулировать определение $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \infty$:
А. словами(!) на языке "ε-δ",
Б. на языке последовательностей;
В. Привести пример.
3. Доказать, что последовательность $x_n = |\sin 1 \sin 2 \dots \sin n|$ имеет предел.
- 4-11. Вычислить предел:
 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{\sqrt{2n^2-1}+n}$.
 5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4+3x-4}{(x^2-1)^2}$ при $a = 1, a = 0, a = \infty$.
 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 5x}{x}$.
 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n$, 8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$, 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}$, 10. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(2x)}{2x-1}$,
 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$.
12. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность. Определить типы разрывов:
 $f(x) = \frac{|x+2|}{x^2-4}$.

13. Проверить, какие из функций $x \sin x$, $\sqrt[2]{x}$, x^2 являются $o(x)$ при $x \rightarrow \infty$.
14. Проверить, какие из функций $x \sin x$, $\sqrt[2]{x}$, x^2 являются $O(x)$ при $x \rightarrow \infty$.
15. Даны функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \sqrt{x}$. Написать формулу для вычисления функций $f \circ g(x)$ и $g \circ f(x)$.
16. Доказать, что уравнение $x^3 + x^2 - 3 = 0$ имеет корень на промежутке $[1;2]$.

IV. Производные.

1. Вычислить производную:

$$y = \sqrt{\arctg^3 \ln^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}}$$
2. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t^2 \end{cases}$$
3. Написать уравнение касательной к кривой в точке x_0 :

$$y = \frac{4x-x^2}{4}, x_0 = 2$$
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на указанном отрезке:

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1; 4]$$
5. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - x}{x^2}$$
6. Используя формулу Лейбница, вычислить:

$$(x^2 \cos(2x))^{(20)}$$
7. Написать формулу Тейлора в точке x_0 для полинома:

$$p(x) = -2x^3 + 3x - 4, x_0 = -2.$$
8. Написать формулу Тейлора порядка n в точке x_0 для функции:

$$f(x) = \arcsin x, n = 3, x_0 = 1/2.$$
9. Вычислить предел, пользуясь формулой Тейлора:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^3}$$
10. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремумов функции:

$$f(x) = e^{-2x+1}(x^3 - x^2).$$
11. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 3.$$
12. Найти асимптоты кривой:

$$y = xe^{1/x}.$$
13. Построить график функции:

$$f(x) = -(2x + 1)e^{2(x+1)}$$

V. Неопределённый интеграл.

- 1-4. Вычислить неопределённый интеграл и выполнить проверку дифференцированием:
1. $\int \arcsin x dx$, 2. $\int (x^2 - 2x) \sin x dx$, 3. $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$, 4. $\int xe^{-x^2} dx$.