

имеющее место при всяком  $p$ , удовлетворяющем условию  $p > -1$ , и при любом целом положительном значении  $n$ . (Ради общности мы предвосхищаем здесь применение отрицательных и нецелых чисел, предполагая, что  $p$  может быть любым числом, большим, чем  $-1$ . Доказательство неравенства — одно и то же, независимо от того, каково число  $p$ .) Мы воспользуемся и на этот раз математической индукцией.

а) Если верно, что  $(1 + p)^r \geq 1 + rp$ , то, умножая обе части неравенства на положительное число  $1 + p$ , мы получаем:

$$(1 + p)^{r+1} \geq 1 + rp + p + rp^2.$$

Отбрасывая вовсе положительный член  $rp^2$ , мы только усилим это неравенство; итак,

$$(1 + p)^{r+1} \geq 1 + (r + 1)p.$$

Полученный результат показывает, что неравенство (6) имеет место и при  $n = r + 1$ . б) Совершенно очевидно, что  $(1 + p)^1 \geq 1 + p$ . Таким образом, доказательство закончено.

Ограничение, заключающееся в условии  $p > -1$ , существенно. Если  $p < -1$ , то  $1 + p$  отрицательно, и рассуждение а) отпадает, так как при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства должен измениться. (Например, умножая обе части неравенства  $3 > 2$  на  $-1$ , мы получили бы  $-3 > -2$ , а это неверно.)

**\*6. Биномиальная теорема.** Часто бывает нужно написать в раскрытом виде выражение для  $n$ -й степени бинома  $(a + b)^n$ . Непосредственное вычисление показывает, что

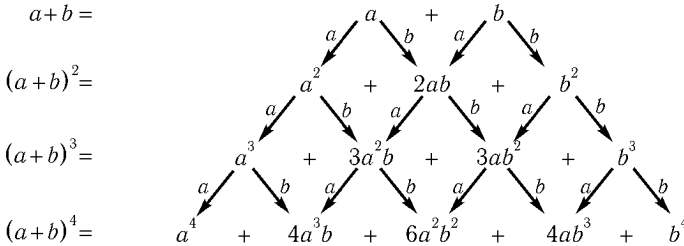
$$\text{при } n = 1 \quad (a + b)^1 = a + b,$$

$$\begin{aligned} \text{при } n = 2 \quad (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = \\ &= a(a + b) + b(a + b) = a^2 + 2ab + b^2, \end{aligned}$$

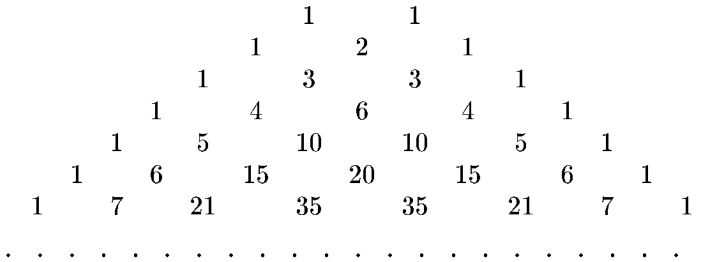
$$\begin{aligned} \text{при } n = 3 \quad (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \end{aligned}$$

и так далее. Но какой общий закон скрывается за словами «и так далее»? Проанализируем процесс вычисления  $(a + b)^2$ . Так как  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ , то мы получили выражение для  $(a + b)^2$ , умножая каждый член выражения  $a + b$  на  $a$ , затем на  $b$  и складывая то, что получилось. Ту же процедуру пришлось применить при вычислении  $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$ . Так же точно вычисляются  $(a + b)^4$ ,  $(a + b)^5$  и так далее

до бесконечности. Выражение для  $(a + b)^n$  мы получим, умножая выражение  $(a + b)^{n-1}$  сначала на  $a$ , потом на  $b$ , затем складывая то, что получится. Это приводит к следующей диаграмме:



позволяющей сразу разобраться в общем законе составления коэффициентов в разложении  $(a + b)^n$ . Мы строим треугольную схему из натуральных чисел, начиная с коэффициентов 1, 1 двучлена  $a + b$  таким образом, что каждое число в треугольнике является суммой двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке (слева и справа). Такая схема известна под названием *треугольника Паскаля*.



Коэффициенты в разложении  $(a + b)^n$  по убывающим степеням  $a$  и возрастающим степеням  $b$  стоят в  $n$ -й строке этой схемы.

Так, например,

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Пользуясь очень сжатыми обозначениями с применением нижних и верхних значков (индексов), обозначим числа, стоящие в  $n$ -й строке треугольника Паскаля следующим образом:

$$C_0^n = 1, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n, C_n^n = 1.$$

Тогда общей формуле для разложения  $(a + b)^n$  можно придать вид:

$$(a + b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n. \quad (7)$$

Согласно закону, лежащему в основе построения треугольника Паскаля, мы имеем соотношение

$$C_i^n = C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1}. \quad (8)$$

В качестве упражнения читатель, имеющий уже некоторый опыт в применении математической индукции, может воспользоваться этим принципом, а также очевидными равенствами  $C_0^1 = C_1^1 = 1$ , для того чтобы доказать общую формулу

$$C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (9)$$

[При любом целом положительном значении  $n$  символ  $n!$  (читается « $n$ -факториал») обозначает произведение  $n$  первых натуральных чисел:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ . Удобно также в качестве определения положить  $0! = 1$ , так чтобы формула (9) оправдывалась также и при  $i$ , равном 0 или  $n$ .]

Выводу этой раскрытой формулы для коэффициентов биномиального разложения иногда дается наименование *биномиальной теоремы* (см. также стр. 540).

### Упражнения.

Доказать с помощью метода математической индукции следующие равенства:

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$2) \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$*3) 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = \frac{1 - (n+1)q + nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$$

$$*4) (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}.$$

Найти сумму следующих геометрических прогрессий:

$$5) \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

$$6) 1 + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^n}{(1+x^2)^n}.$$