имеющее место при всяком p, удовлетворяющем условию $p > -1$, и при любом целом положительном значении n. (Ради общности мы предвосхищаем здесь применение отрицательных и нецелых чисел, предполагая, что p может быть любым числом, большим, чем -1. Доказательство неравенства — одно и то же, независимо от того, каково число p.) Мы воспользуемся и на этот раз математической индукцией.

а) *Если* верно, что $(1+p)^r \geqslant 1 + rp$, то, умножая обе части неравенства на положительное число $1+p$, мы получаем:

$$(1+p)^{r+1} \geqslant 1 + rp + p + rp^2.$$

Отбрасывая вовсе положительный член rp^2, мы только усилим это неравенство; итак,

$$(1+p)^{r+1} \geqslant 1 + (r+1)p.$$

Полученный результат показывает, что неравенство (6) имеет место и при $n = r+1$. б) Совершенно очевидно, что $(1+p)^1 \geqslant 1 + p$. Таким образом, доказательство закончено.

Ограничение, заключающееся в условии $p > -1$, существенно. Если $p < -1$, то $1+p$ отрицательно, и рассуждение а) отпадает, так как при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства должен измениться. (Например, умножая обе части неравенства $3 > 2$ на -1, мы получили бы $-3 > -2$, а это неверно.)

***6. Биномиальная теорема.** Часто бывает нужно написать в раскрытом виде выражение для n-й степени бинома $(a+b)^n$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}
\text{при}\quad n=1\quad (a+b)^1 &= a+b,\\
\text{при}\quad n=2\quad (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) =\\
&= a(a+b) + b(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,\\
\text{при}\quad n=3\quad (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 =\\
&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) =\\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,
\end{aligned}$$

и так далее. Но какой общий закон скрывается за словами «и так далее»? Проанализируем процесс вычисления $(a+b)^2$. Так как $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, то мы получили выражение для $(a+b)^2$, умножая каждый член выражения $a+b$ на a, затем на b и складывая то, что получилось. Ту же процедуру пришлось применить при вычислении $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$. Так же точно вычисляются $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ и так далее до бесконечности. Выражение для $(a+b)^n$ мы получим, умножая выражение $(a+b)^{n-1}$ сначала на a, потом на b, затем складывая то, что получится. Это приводит к следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
a+b= & & & & & & & a \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & + & & b \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & & & & & \\
(a+b)^2= & & & & & a^2 \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & + & & 2ab \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & + & & b^2 \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & & & \\
(a+b)^3= & & & a^3 \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & + & & 3a^2b \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & + & & 3ab^2 \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & + & & b^3 \arrow[dll, "a"'] \arrow[drr, "b"] & & \\
(a+b)^4= & a^4 & & + & & 4a^3b & & + & & 6a^2b^2 & & + & & 4ab^3 & & + & & b^4
\end{tikzcd}$$

позволяющей сразу разобраться в общем законе составления коэффициентов в разложении $(a+b)^n$. Мы строим треугольную схему из натуральных чисел, начиная с коэффициентов 1, 1 двучлена $a+b$ таким образом, что каждое число в треугольнике является суммой двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке (слева и справа). Такая схема известна под названием *треугольника Паскаля*.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

. . . .

Коэффициенты в разложении $(a+b)^n$ по убывающим степеням a и возрастающим степеням b стоят в n-й строке этой схемы.

Так, например,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Пользуясь очень сжатыми обозначениями с применением нижних и верхних значков (индексов), обозначим числа, стоящие в n-й строке треугольника Паскаля следующим образом:

$$C_0^n = 1,\ C_1^n,\ C_2^n,\ C_3^n,\ \ldots,\ C_{n-1}^n,\ C_n^n = 1.$$

Тогда общей формуле для разложения $(a+b)^n$ можно придать вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n. \qquad (7)$$

Согласно закону, лежащему в основе построения треугольника Паскаля, мы имеем соотношение

$$C_i^n = C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1}. \tag{8}$$

В качестве упражнения читатель, имеющий уже некоторый опыт в применении математической индукции, может воспользоваться этим принципом, а также очевидными равенствами $C_0^1 = C_1^1 = 1$, для того чтобы доказать общую формулу

$$C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \tag{9}$$

[При любом целом положительном значении n символ $n!$ (читается «n-факториал») обозначает произведение n первых натуральных чисел: $n! = 1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot n$. Удобно также в качестве определения положить $0! = 1$, так чтобы формула (9) оправдывалась также и при i, равном 0 или n.]

Выводу этой раскрытой формулы для коэффициентов биномиального разложения иногда дается наименование *биномиальной теоремы* (см. также стр. 540).

Упражнения.

Доказать с помощью метода математической индукции следующие равенства:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

*3) $1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} = \dfrac{1-(n+1)q+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

*4) $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\ldots(1+q^{2^n}) = \dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$.

Найти сумму следующих геометрических прогрессий:

5) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{(1+x^2)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

6) $1 + \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}$.