венно опирается на интуитивные процедуры. Тем или иным путем, в открытой или в скрытой форме, даже прикрытая самым безупречным формалистическим, логическим, аксиоматическим одеянием, конструктивная интуиция всегда остается самым жизненным элементом в математике[1].

§ 5. Комплексные числа

1. Возникновение комплексных чисел. По ряду причин возникла потребность в расширении понятия числа даже за пределы континуума действительных чисел — посредством введения так называемых комплексных чисел. Необходимо ясно представлять себе, что все подобного рода расширения и нововведения приходят отнюдь не в результате чьих-то индивидуальных усилий. Скорее их можно рассматривать как итог некоторой постепенной и исполненной колебаний эволюции, в которой не должна быть преувеличиваема роль отдельных личностей. Одной из причин, которые обусловили появление и употребление отрицательных и дробных чисел, было стремление к большей свободе в формальных вычислениях. Только к концу средневековья математики стали терять ощущение беспокойства и неуверенности, с которым они оперировали этими понятиями, тогда как ничего подобного не наблюдалось в отношении таких интуитивно ясных и конкретно воспринимаемых понятий, как понятие натурального числа.

Простейшая процедура, требующая применения комплексных чисел, есть *решение квадратных уравнений.* Напомним, как обстояло дело с линейным уравнением $ax = b$, когда нужно было определить удовлетворяющее ему значение неизвестной величины x. Решение имеет вид $x = \frac{b}{a}$, и введение дробных чисел как раз обусловливается требованием, чтобы всякое линейное уравнение с целыми коэффициентами (при $a \neq 0$) было разрешимо. Уравнения вроде

$$x^2 = 2 \tag{1}$$

не имеют решения в области рациональных чисел, но имеют таковое в расширенном поле всех действительных чисел. Но даже поле действительных чисел недостаточно обширно, чтобы в нем можно было построить полную и законченную теорию квадратных уравнений. Например, следующее очень простое уравнение

$$x^2 = -1 \tag{2}$$

[1] Подробнее об этих вопросах см. [24] и [25].

не имеет действительных решений, так как квадрат действительного числа никак не может быть отрицательным. Нам приходится или удовольствоваться тем положением, что такие простые уравнения неразрешимы, или следовать по уже знакомому пути — расширять числовую область и вводить новые числа, с помощью которых удастся решить уравнение. Именно это самое и делается, когда вводят новый символ i и принимают, в качестве определения, что $i^2 = -1$. Разумеется, этот объект — «мнимая единица» — не имеет ничего общего с числом как орудием *счета*. Это — отвлеченный *символ*, подчиненный основному закону $i^2 = -1$, и ценность его зависит исключительно от того, будет ли достигнуто в результате его введения действительно полезное расширение числовой системы.

Так как мы хотим складывать и умножать с помощью символа i так же, как с обыкновенными числами, то естественно пользоваться символами вроде $2i$, $3i$, $-i$, $2 + 5i$, вообще, $a + bi$, где a и b — действительные числа. Раз эти символы должны подчиняться коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам, то должны быть возможны, например, такие вычисления:

$$(2 + 3i) + (1 + 4i) = (2 + 1) + (3 + 4)i = 3 + 7i;$$
$$(2 + 3i) \cdot (1 + 4i) = 2 + 8i + 3i + 12i^2 = (2 - 12) + (8 + 3)i = -10 + 11i.$$

Руководствуясь этими соображениями, мы начинаем систематическое изложение теории комплексных чисел со следующего *определения*: символ вида $a + bi$, где a и b — два действительных числа, носит название *комплексного числа с действительной частью a и мнимой частью b*. Операции сложения и умножения совершаются над этими числами так, как будто бы i было обыкновенное действительное число, однако с условием заменять i^2 через -1. Точнее говоря, сложение и умножение определяются по формулам

$$\begin{cases} (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \\ \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{cases} \tag{3}$$

В частности, мы получаем

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

Основываясь на этих определениях, легко проверить, что для комплексных чисел справедливы коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы. Далее, не только сложение и умножение, но также и вычитание и деление, будучи применены к двум комплексным числам, приводят снова к комплексным числам того же вида $a + bi$, так что комплексные числа образуют поле (см. стр. 87):

$$\begin{cases} (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i, \\ \dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i. \end{cases} \tag{5}$$

(Второе равенство теряет смысл, если $c + di = 0 + 0i$, так как тогда $c^2 + d^2 = 0$. Значит, и на этот раз нужно исключить деление на нуль, т. е. на $0 + 0i$). Например,

$$(2+3i)-(1+4i)=1-i,$$

$$\frac{2+3i}{1+4i}=\frac{2+3i}{1+4i}\cdot\frac{1-4i}{1-4i}=\frac{2-8i+3i+12}{1+16}=\frac{14}{17}-\frac{5}{17}i.$$

Поле комплексных чисел включает поле действительных чисел в качестве «подполя», так как комплексное число $a + 0i$ отождествляется с действительным числом a. Заметим, с другой стороны, что комплексное число вида $0 + bi = bi$ называется «чисто мнимым».

Упражнения.

1) Представить $\dfrac{(1+i)(2+i)(3+i)}{(1-i)}$ в форме $a + bi$.

2) Представить $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ в форме $a + bi$.

3) Представить в форме $a + bi$ следующие выражения:

$$\frac{1+i}{1-i},\quad \frac{1+i}{2-i},\quad \frac{1}{i^5},\quad \frac{1}{(-2+i)(1-3i)},\quad \frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}.$$

4) Вычислить $\sqrt{5+12i}$. (Указание: напишите $\sqrt{5+12i} = x+yi$, возведите в квадрат и сравняйте действительные части и мнимые части.)

Вводя символ i, мы расширили поле действительных чисел и получили поле символов $a + bi$, в котором квадратное уравнение

$$x^2 = -1$$

имеет два решения: $x = i$ и $x = -i$. В самом деле, согласно определению, $i \cdot i = (-i)(-i) = i^2 = -1$. Нужно сказать, что мы приобрели гораздо больше: можно легко проверить, что теперь каждое квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

становится разрешимым. В самом деле, выполняя над равенством (6) ряд преобразований, мы получаем:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}, \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \\ x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим теперь, что если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ есть обыкновенное действительное число и корни уравнения (7) — действительные; если же $b^2 - 4ac < 0$, то тогда $4ac - b^2 > 0$, и, следовательно, $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-(4ac - b^2)} = \sqrt{4ac - b^2} \cdot i$, так что уравнение (7) имеет в качестве корней мнимые числа. Так, например, уравнение

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

имеет действительные корни $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2$ или 3, тогда как уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

имеет мнимые корни $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 2 = 1 + i$ или $1 - i$.

2. Геометрическое представление комплексных чисел. Уже в XVI столетии в математических работах появляются квадратные корни из отрицательных чисел в формулах, дающих решения квадратных уравнений. Но в те времена математики затруднились бы объяснить точный смысл этих выражений, к которым относились почти с суеверным трепетом. Сам термин «мнимый» до сих пор напоминает нам о том, что эти выражения рассматривались как нечто искусственное, лишенное реального значения. И только в начале XIX в., когда уже выяснилась роль комплексных чисел в различных областях математики, было дано очень простое геометрическое истолкование комплексных чисел и операций с ними, и этим был положен конец сомнениям в возможности их законного употребления. Конечно, с современной точки зрения формальные операции с комплексными числами полностью оправдываются на основе формальных определений, так что геометрическое представление логически не является необходимым. Но такое представление, предложенное почти одновременно Весселем (1745–1818), Арганом (1768–1822) и Гауссом, позволило рассматривать комплексные числа и действия с ними как нечто вполне естественное с интуитивной точки зрения и, кроме того, имеющее чрезвычайно большое значение в приложениях комплексных чисел как в самой математике, так и в математической физике.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел заключается в том, что комплексному числу $z = x + yi$ сопоставляется точка на плоскости с координатами x, y. Именно действительная часть числа мыслится как x-координата, а мнимая — как y-координата. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками «числовой плоскости», подобно тому как нами было установлено раньше (см. § 2), соответствие между действительными числами и точками «числовой оси». Точкам на оси x в числовой плоскости соответствуют действительные числа $z = x + 0i$, тогда как точкам на оси y — чисто мнимые числа $z = 0 + yi$.

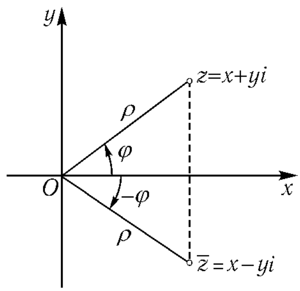

Рис. 22. Геометрическое представление комплексных чисел. Точка z имеет прямоугольные координаты x, y

Если

$$z = x + yi$$

есть какое-то комплексное число, то мы называем число

$$\overline{z} = x - yi$$

сопряженным с числом z. В числовой плоскости точка $\overline{z}$ получается из точки z посредством зеркального отражения относительно оси x. Если мы условимся расстояние точки z от начала обозначать через ρ, то на основании теоремы Пифагора

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z \cdot \overline{z}.$$

Действительное число $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* z и обозначается

$$\rho = |z|.$$

Если z лежит на действительной оси, то модуль совпадает с абсолютным значением z. Комплексные числа с модулем 1 изображаются точками, лежащими на «единичном окружности» с центром в начале и радиусом 1.

Если $|z| = 0$, *то* $z = 0$. Это следует из определения $|z|$ как расстояния точки z от начала. Далее, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Это вытекает как следствие из более общей теоремы, которая будет доказана на стр. 132.

Упражнения.

1) Доказать последнюю теорему, исходя непосредственно из определения умножения двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$.

2) Пользуясь тем обстоятельством, что произведение двух *действительных* чисел равно нулю в том и только в том случае, если один из множителей *равен нулю, доказать соответствующую* теорему для *комплексных чисел.* (Указание: основывайтесь при доказательстве на двух последних теоремах.)

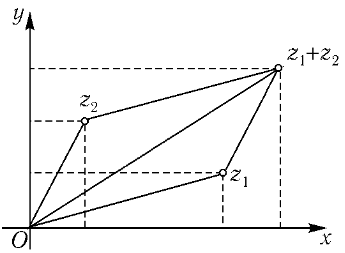

Рис. 23. Сложение комплексных чисел по правилу параллелограмма

Согласно определению сложения двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$, мы имеем

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Таким образом, точка $z_1 + z_2$ изображается в числовой плоскости четвертой вершиной параллелограмма, у которого тремя первыми вершинами являются точки 0, z_1, z_2. Это простой способ построения суммы двух комплексных чисел ведет ко многим важным следствиям. Из него мы заключаем, что *модуль суммы двух комплексных чисел не превышает суммы модулей* (ср. стр. 89)

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Достаточно сослаться на то, что длина стороны треугольника не превышает суммы длин двух других сторон.

Упражнение. В каких случаях имеет место равенство $|z_1+z_2| = |z_1|+$ $+|z_2|$?

Угол между положительным направлением оси x и отрезком Oz называется *аргументом* z и обозначается буквой φ (см. рис. 22). Числа z и $\overline{z}$ имеют один и тот же модуль

$$|\overline{z}| = |z|,$$

но их аргументы противоположны по знаку:

$$\overline{\varphi} = -\varphi.$$

Конечно, аргумент z определяется не однозначно, так как к нему можно прибавлять или из него вычитать любой угол, кратный 360°, не изменяя направления отрезка Oz. Итак, углы

$$\begin{array}{llll} \varphi, & \varphi+360^\circ, & \varphi+720^\circ, & \varphi+1080^\circ, \ldots \\ & \varphi-360^\circ, & \varphi-720^\circ, & \varphi-1080^\circ, \ldots \end{array}$$

графически дают один и тот же аргумент. Так как, согласно определениям синуса и косинуса,

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

то любое комплексное число z выражается через его модуль и аргумент следующим образом:

$$z = x + yi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8}$$

Например,

в случае	$z = i$	мы имеем	$\rho = 1,$	$\varphi = 90^\circ,$
» »	$z = 1 + i$	» »	$\rho = \sqrt{2},$	$\varphi = 45^\circ,$
» »	$z = 1 - i$	» »	$\rho = \sqrt{2},$	$\varphi = -45^\circ,$
» »	$z = -1 + \sqrt{3}i$	» »	$\rho = 2,$	$\varphi = 120^\circ,$

так что

$$\begin{aligned} i &= 1(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ), \\ 1 + i &= \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ), \\ 1 - i &= \sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)), \\ -1 + \sqrt{3}i &= 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ). \end{aligned}$$

Читатель может проверить эти утверждения посредством подстановки числовых значений тригонометрических функций.

Тригонометрическим представлением (8) очень полезно воспользоваться, чтобы уяснить себе геометрический смысл умножения двух комплексных чисел. Если

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и

$$z' = \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

то

$$zz' = \rho\rho'\{(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + (\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi')i\}.$$

Но, в силу основных теорем сложения синуса и косинуса,

$$\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' = \cos(\varphi+\varphi'),$$
$$\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi' = \sin(\varphi+\varphi').$$

Итак,

$$zz' = \rho\rho'\{\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')\}. \tag{9}$$

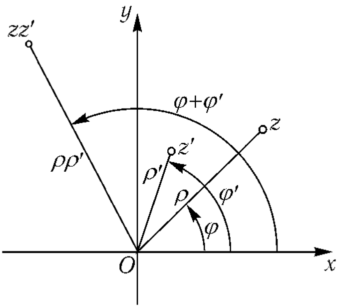

Рис. 24. Умножение комплексных чисел: аргументы складываются, модули перемножаются

В правой части последнего равенства мы видим написанное в тригонометрической форме комплексное число с модулем $\rho\rho'$ и аргументом $\varphi + \varphi'$. Значит, мы можем отсюда заключить, что *при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются* (рис. 24). Таким образом, мы видим, что умножение комплексных чисел както связано с *вращением.*

Установим точнее, в чем тут дело. Назовем направленный отрезок, идущий из начала в точку z, *вектором* точки z; тогда модуль $\rho = |z|$ есть его длина. Пусть z — какая-нибудь точка единичной окружности, так что $\rho' = 1$. В таком случае умножение z на z' просто поворачивает вектор z на угол φ'. Если же $\rho' \neq 1$, то, помимо вращения, длина вектора должна быть умножена на ρ'. Рекомендуем читателю самостоятельно проиллюстрировать эти факты, умножая различные комплексные числа на $z_1 = i$ (вращение на 90°); $z_2 = -i$ (то же вращение на 90°, но в обратном направлении); $z_3 = 1 + i$ и $z_4 = 1 - i$.

Формула (9) в особенности представляет интерес, если $z = z'$; в этом случае имеем:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Умножая снова на z, будем иметь

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi);$$

и, вообще, для любого n, повторяя операцию, получим

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{10}$$

В частности, если точка z находится на *единичной окружности*, так что $\rho = 1$, мы приходим к формуле, открытой французским математиком А. де Муавром (1667–1754):

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \tag{11}$$

Эта формула — одно из самых замечательных и полезных соотношений в элементарной математике. Поясним это примером. Возьмем $n = 3$ и разложим левую часть по формуле бинома

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3.$$

Тогда получим:

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = \cos^3 3\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Одно такое *комплексное равенство равносильно двум равенствам, связывающим действительные числа.* В самом деле, если два комплексных числа равны, то в отдельности равны их действительные части и их мнимые части. Итак, можно написать

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Пользуясь затем соотношением

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

получим окончательно:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

Подобного рода формулы, выражающие $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ соответственно через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, легко получить при каком угодно целом значении n.

Упражнения.

1) Написать аналогичные формулы для $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$.
2) Предполагая, что точка z находится на единичном круге: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, показать, что $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$.
3) Без вычислений установить, что модуль числа $\frac{a+bi}{a-bi}$ равен единице.
4) Доказать: если z_1 и z_2 — два комплексных числа, то аргумент $z_1 - z_2$ равен углу между положительным направлением действительной оси и вектором, идущим от z_2 к z_1.
5) Дан треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3; установить геометрический смысл аргумента числа $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$.
6) Доказать, что отношение двух комплексных чисел с одинаковым аргументом есть действительное число.
7) Доказать, что если аргументы чисел $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ и $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ равны между собой, то четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности или на прямой линии, и обратно.
8) Доказать: четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности или на прямой линии, если число
$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$
действительное.

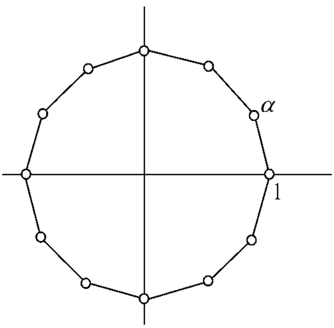

Рис. 25. Двенадцать корней двенадцатой степени из единицы

3. Формула Муавра и корни из единицы. Под корнем n-й степени из числа a мы понимаем всякое такое число b, что $b^n = a$. В частности, число 1 имеет два квадратных корня: 1 и -1, так как $1^2 = (-1)^2 = 1$. Число 1 имеет один *действительный* кубический корень, именно 1, тогда как оно же имеет четыре корня четвертой степени: два действительных, 1 и -1, и два мнимых, i и $-i$. Эти факты наводят на мысль, что в комплексной области должно существовать еще два кубических корня из 1 (а всего кубических корней тогда будет три). С помощью формулы Муавра мы покажем, что эта догадка справедлива.

Мы убедимся, что в *поле комплексных чисел существует ровно n корней степени n из* 1. *Эти корни изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг и имеющего точку* 1 *в качестве одной из вершин.*

Сказанное почти ясно из рис. 25 (соответствующего случаю $n = 12$). Первая вершина многоугольника есть 1. Следующая есть

$$\alpha = \cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}, \tag{12}$$

так как аргумент должен равняться n-й части угла в 360°. Еще следующая вершина есть $\alpha\cdot\alpha = \alpha^2$, так как мы получим ее, вращая вектор α на угол $\frac{360^\circ}{n}$. Дальше получаем вершину α^3 и т. д.; после n шагов возвращаемся снова к вершине 1, т. е. получаем

$$\alpha^n = 1,$$

что следует также из формулы (11), так как

$$\left(\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}\right) = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1 + 0\cdot i = 1.$$

Итак, $\alpha^1 = \alpha$ есть корень уравнения $x^n = 1$. То же справедливо относительно следующей вершины

$$\alpha^2 = \cos\frac{720^\circ}{n} + i\sin\frac{720^\circ}{n}.$$

Мы убедимся в этом, если напишем

$$(\alpha^2)^n = \alpha^{2n} = (\alpha^n)^2 = 1^2 = 1,$$

или же воспользуемся формулой Муавра

$$(\alpha^2)^n = \cos\left(n\cdot\frac{720^\circ}{n}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{720^\circ}{n}\right) = \cos 720^\circ + i\sin 720^\circ = 1 + 0i = 1.$$

Точно так же мы заключаем, что все n чисел

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots,\ \alpha^{n-1}$$

являются корнями степени n из 1. Если будем степени увеличивать дальше или рассмотрим отрицательные степени, то новых корней не получим. В самом деле,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^n}{\alpha} = \alpha^{n-1};\ \text{точно так же}\ \alpha^n = 1, \alpha^{n+1} = (\alpha^n)\alpha = 1\cdot\alpha = \alpha$$

и т. д., так что ранее полученные корни повторяются. Читателю предоставляем в качестве упражнения показать, что иных корней, кроме перечисленных, рассматриваемое уравнение не имеет.

Если n — четное, то одна из вершин n-угольника попадает в точку -1, в соответствии с общеизвестным алгебраическим фактом: -1 есть корень четной степени из 1.

Уравнение, которому удовлетворяют корни n-й степени из 1,

$$x^n - 1 = 0, \tag{13}$$

n-й степени, но легко понизить его степень на единицу. Воспользуемся алгебраической формулой

$$(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1). \tag{14}$$

Так как произведение двух чисел равно 0 в том и только в том случае, если один из множителей равен нулю, то выражение (14) обращается в нуль или при $x = 1$, или при условии, что удовлетворяется уравнение

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1 = 0. \tag{15}$$

Этому уравнению удовлетворяют корни α, α^2, ... , α^{n-1}; оно называется *циклотомическим*, или *уравнением деления окружности*. Так, например, мнимые кубические корни из 1

$$\alpha = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha^2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

являются корнями уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

как читатель сможет убедиться, выполняя подстановки. Таким же образом корни пятой степени из 1 (кроме самого числа 1) удовлетворяют уравнению

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0. \tag{16}$$

Чтобы построить правильный пятиугольник, нам приходится решить уравнение четвертой степени. Простое алгебраическое ухищрение —

замена $w = x + \frac{1}{x}$ — приводит к уравнению второй степени. Мы делим уравнение (16) на x^2 и переставляем члены:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

и, принимая во внимание, что $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, получаем

$$w^2 + w - 1 = 0.$$

По формуле (7) пункта 1 корни этого квадратного уравнения имеют вид:

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad w_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Итак, мнимые корни пятой степени из 1 являются корнями следующих двух квадратных уравнений:

$$x + \frac{1}{x} = w_1 \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{1}{2}\big(\sqrt{5} - 1\big)x + 1 = 0$$

и

$$x + \frac{1}{x} = w_2 \quad \text{или} \quad x^2 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{5} + 1\big)x + 1 = 0.$$

Читатель сможет их решить по той же формуле (7).

Упражнения.

1) Найти корни 6-й степени из 1.
2) Вычислить $(1+i)^{11}$.
3) Вычислить все различные значения выражений

$$\sqrt{1+i}, \quad \sqrt[3]{7-4i}, \quad \sqrt[3]{i}, \quad \sqrt[5]{-i}.$$

4) Вычислить $\frac{1}{2i}(i^7 - i^{-7})$.

***4. Основная теорема алгебры.** Не только уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ или $x^n - 1 = 0$ разрешимы в поле комплексных чисел, но можно утверждать гораздо больше: *всякое алгебраическое уравнение степени n с действительными или комплексными коэффициентами*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (17)$$

разрешимо в поле комплексных чисел. Для случая уравнений 3-й и 4-й степеней эта теорема была установлена в XVI в. Тартальей, Карданом и другими: оказалось, что такие уравнения решаются посредством формул, подобных формуле квадратного уравнения, но значительно более сложных. В течение почти двух столетий длилось настойчивое изучение общего уравнения 5-й и более высоких степеней, но все усилия разрешить их теми же методами оказались напрасными. Когда молодому Гауссу в его докторской диссертации (1799) удалось впервые доказать, что решения *существуют*, то это уже было крупнейшим успехом; правда, вопрос о возможности обобщить на случай степеней $\geqslant 5$ классические формулы, позволяющие находить корни с помощью рациональных операций и извлечения корней, оставался в то время открытым (см. стр. 156).

Теорема Гаусса утверждает, что, *каково бы ни было алгебраическое уравнение вида* (17), *где n — целое положительное число, а коэффициенты a — действительные или даже комплексные числа, существует по крайней мере одно такое комплексное число $\alpha = c + di$, что*

$$f(a) = 0.$$

Число α называется корнем уравнения (17). Доказательство этой теоремы будет приведено в этой книге на стр. 314–316. Предположим пока, что теорема доказана, и выведем из нее другую теорему, известную под названием *основной теоремы алгебры* (было бы, впрочем, правильнее назвать ее основной теоремой комплексной числовой системы): *всякий алгебраический полином степени n*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \tag{18}$$

может быть представлен в виде произведения ровно n множителей:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n), \tag{19}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — комплексные числа, корни уравнения $f(x) = 0$. Так, например, полином

$$f(x) = x^4 - 1$$

разлагается на множители следующим образом:

$$f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)(x + 1).$$

Что числа α являются корнями уравнения $f(x) = 0$, это очевидно из самого разложения (19), так как при $x = \alpha_r$ один из множителей $f(x)$, а следовательно, и сам полином $f(x)$ обращаются в нуль.

В иных случаях не все множители $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ... полинома $f(x)$ степени n оказываются различными; так, в примере

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$$

мы имеем только один корень, $x = 1$, «считаемый дважды», или «кратности 2». Во всяком случае, полином степени n не может разлагаться в произведение более чем n различных множителей вида $x - \alpha$, и соответствующее уравнение не может иметь более n корней.

При доказательстве основной теоремы алгебры мы воспользуемся — не в первый раз — алгебраическим тождеством

$$x^k - \alpha^k = (x-\alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \ldots + \alpha^{k-2}x + \alpha^{k-1}), \quad (20)$$

которое при $\alpha = 1$ служило нам для определения суммы геометрической прогрессии. Предполагая теорему Гаусса доказанной, допустим, что $\alpha = \alpha_1$ есть корень уравнения (17), так что

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + a_{n-2}\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_1\alpha^1 + a_0 = 0.$$

Вычитая это выражение из $f(x)$ и перегруппировывая члены, мы получим тождество

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha_1) = \\ &= (x^n - \alpha_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \ldots + a_1(x - \alpha_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Пользуясь теперь формулой (20), мы можем выделить множитель $x - \alpha_1$ из каждого члена и затем вынести его за скобку, причем степень многочлена, остающегося в скобках, станет уже на единицу меньше. Перегруппировывая снова члены, мы получим тождество

$$f(x) = (x - \alpha_1)g(x),$$

где $g(x)$ — многочлен степени $n-1$:

$$g(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0.$$

(Вычисление коэффициентов, обозначенных через b, нас здесь не интересует.) Применим дальше то же рассуждение к многочлену $g(x)$. По теореме Гаусса, существует корень α_2 уравнения $g(x) = 0$, так что

$$g(x) = (x - \alpha_2)h(x),$$

где $h(x)$ — новый многочлен степени уже $n-2$. Повторяя эти рассуждения $n-1$ раз (подразумевается, конечно, применение принципа математической индукции), мы, в конце концов, приходим к разложению

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n). \tag{22}$$

Из тождества (22) следует не только то, что комплексные числа α_1, α_2, ... , α_n суть корни уравнения (17), но и то, что иных корней уравнение (17) не имеет. Действительно, если бы число y было корнем уравнения (17), то из (22) следовало бы

$$f(y) = (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_n) = 0.$$

Но мы видели (стр. 130), что произведение комплексных чисел равно нулю в том и *только в том* случае, если один из множителей равен нулю. Итак, один из множителей $y-\alpha_r$ равен 0, т. е. $y=\alpha_r$, что и требовалось установить.

*§ 6. Алгебраические и трансцендентные числа

1. Определение и вопросы существования. *Алгебраическим числом* называется всякое число x, действительное или мнимое, удовлетворяющее некоторому алгебраическому уравнению вида

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \quad (n \geqslant 1,\ a_n \neq 0), \tag{1}$$

где числа a_i — целые. Так, например, число $\sqrt{2}$ — алгебраическое, так как оно удовлетворяет уравнению

$$x^2 - 2 = 0.$$

Таким же образом алгебраическим числом является всякий корень любого уравнения с целыми коэффициентами третьей, четвертой, пятой, какой угодно степени, и независимо от того, выражается или не выражается он в радикалах. Понятие алгебраического числа есть естественное обобщение понятия рационального числа, которое соответствует частному случаю $n=1$.

Не всякое действительное число является алгебраическим. Это вытекает из следующей, высказанной Кантором теоремы: *множество всех алгебраических чисел счетно.* Так как множество всех действительных