## Программа семинарских занятий (по неделям).

### Векторная алгебра.

**Неделя №1. Программа лекций:**

1.1. Направленный отрезок. Понятие вектора. Длина вектора.

1.2. Линейные операции над векторами (сложение, умножение на число), их свойства.

1.3. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Критерий коллинеарности и компланарности.

1.4. Базисы на плоскости и в пространстве. Координаты вектора.

1.5. Прямоугольные декартовы системы координат.

**Примерные задачи для упражнений.**

**1.** Дан параллелограмм $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

**2.** Дан параллелограмм $ABCD$; $M$ — точка пересечения диагоналей $[AC]$ и $[BD]$. Выразить векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MC}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; выразить векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MD}$ через вектор $\overrightarrow{BD}$.

**3.** (1001) В параллелограмме $ABCD$ вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначен через $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$ обозначен через $\vec{b}$; $M$ — точка пересечения диагоналей $[AC]$ и $[BD]$. Выразить векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**4.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти векторы:

$$
\begin{array}{lll}
1)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}, & 7)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}, & 13)2\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{D_1D},\\
2)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{D_1C_1}, & 8)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}, & 14)2\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1C}-\overrightarrow{BD},\\
3)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}, & 9)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD_1}, & 15)\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{D_1C_1}-\overrightarrow{B_1C_1}.\\
4)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}, & 10)\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}, & \\
5)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A}, & 11)\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{BA_1}, & \\
6)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{C_1C}, & 12)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{D_1A_1}, &
\end{array}
$$

**5.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначим $\overrightarrow{AA_1} =: \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} =: \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} =: \vec{c}$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

**6.** В пространстве заданы точки $O$, $A$ и $B$. Точка $C$ — середина отрезка $[AB]$.

1) Выразить вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$.
2) Выразить вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.
3) Выразить вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

**7.** В пространстве заданы точки $O$, $A$ и $B$. Точка $C$ принадлежит отрезку $[AB]$, и выполнено соотношение $\frac{|AC|}{|BC|} = \lambda$. Выразить вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

**8.** Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Отложим вектор $\vec{b}$ из конца вектора $\vec{a}$ и вектор $\vec{c}$ из конца вектора $\vec{b}$. При каком условии полученная фигура — треугольник.

**9.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве; заданы векторы $\vec{p} = a + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $\vec{q} = 2\vec{a} + 6\vec{b} + 8\vec{c}$. Проверить коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

**10.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{q} = 2y\vec{a} - x\vec{b}$. Известно, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ удовлетворяют условию $\vec{p} + \vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$. Найти числа $x$ и $y$.

**11.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Найти числа $x$, $y$, $z$, удовлетворяющие условию $(x+y)\vec{a} + (x+z)\vec{b} + (y+z)\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

**12.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$?

**13.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$?

**14.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости; заданы векторы $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$. При каком $\lambda$ векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны?

**15.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Координаты вектора $\vec{p}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; координаты вектора $\vec{q}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Выразить через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} - \vec{q}$, $2\vec{p} + \vec{q}$. Каковы координаты вектора $\vec{p} - 3\vec{q}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

**16.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Координаты вектора $\vec{p}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. При каком $\alpha$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ компланарны?

**17.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Компланарны ли векторы $\vec{p} = \vec{a}$, $\vec{q} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{r} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$? Если да, укажите линейную зависимость, связывающую векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$.

**18.** 1) Из векторов, образованных ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составить три базиса. 2) Разложить векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ по базису $\{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

**19.** В пространстве задана прямоугольная декартова система координат. Найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A(1,3,2)$, $B(5,8,-1)$.

**20.** В пространстве задана прямоугольная декартова система координат и точки $A(1,3,2)$, $B(5,8,-1)$. Точка $C$ — середина отрезка $[AB]$. Найти координаты точки $C$.

**21.** В пространстве задана прямоугольная декартова система координат и точки $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$. Точка $C$ — середина отрезка $[AB]$. Найти координаты точки $C$.

**22.** В пространстве задана прямоугольная декартова система координат и точки $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$. Точка $C$ принадлежит отрезку $[AB]$ и выполнено соотношение $\frac{|AC|}{|BC|} = \lambda$. Найти координаты точки $C$.

**23.** Дан треугольник $ABC$, $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$, $C(C_x, C_y, C_z)$. Найти координаты точки пересечения медиан.

**Примерное домашнее задание (Цубербиллер):** 1001, 1004, 1005, 1007, 1008, 1011, 1013, 1017, 1021, 1023.