

Список задач для зачета и экзамена по математическому анализу.

I курс. Базовый поток.

I. Операции над множествами. Метод математической индукции. Бином Ньютона.

1. Даны множества $A = \{-1; 2; 3\}$ и $B = \{1; 2; 3\}$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$.
2. Пользуясь методом математической индукции, доказать неравенство $3^n > 1 + 2n$ при $n \geq 2$.
3. Вычислить $\frac{101!}{99!}$.
4. Упростить выражение $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.
5. Сократить дробь $\frac{n!}{k!}$, $k < n$.
6. Упростить выражение: $\frac{C_{n-2}^1}{C_n^3}$.
7. Найти коэффициент при x^{-3} в выражении: $(x^2 - \frac{1}{x})^{12}$.

II. Комплексные числа.

1. Вычислить $\frac{2-i}{3+2i}$.
2. Вычислить в алгебраической форме $\sqrt{3-4i}$.
3. Представить комплексные числа $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i\sqrt{3}$, $z_3 = 1-2i$ в тригонометрической форме так, чтобы значение аргумента лежало в интервале $(-\pi, \pi]$.
4. Вычислить $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{12}$.
5. Вычислить $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.
6. Разложить на множители полином $x^4 + 1$.
7. Вычислить $\sin i$.
8. Вычислить $\text{Ln}(1 - i\sqrt{3})$.

III. Пределы.

1. Выписать первые 4 члена последовательности, если ее общий член задан следующей формулой: $x_n = \frac{1}{n}$.
2. Выписать первые 4 члена последовательности, если ее общий член задан следующей формулой: $y_n = \sum_{k=1}^n (-2)^k$.
3. Выписать первые 4 члена последовательности, если ее общий член задан следующей формулой: $z_n = 3$.
4. Сформулировать определение понятия "предел последовательности a_n равен плюс бесконечности" ($\lim a_n = +\infty$).
5. Сформулировать определение понятия "предел последовательности a_n равен минус бесконечности" ($\lim a_n = -\infty$).
6. Вычислить $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
7. Доказать, что последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, общий член которой задан формулой $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2^2}) \dots (1 - \frac{1}{2^n})$, сходится.
8. Сформулировать определение предела $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.
9. Сформулировать определение предела $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.
10. Сформулировать определение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
11. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$.
12. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$.
13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$.
14. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.
15. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}$.
16. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.
17. Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ на непрерывность.
18. Исследовать функцию $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ на непрерывность.

19. Какие из следующих утверждений являются верными: 1) $x^2 = O(x)$ при $x \rightarrow 0$, 2) $x = O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Почему?
20. Какие из следующих утверждений являются верными: 1) $x^2 = O(x)$ при $x \rightarrow \infty$, 2) $x = O(x^2)$ при $x \rightarrow \infty$? Почему?
21. Какие из следующих утверждений являются верными: 1) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, 2) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Почему?
22. Какие из следующих утверждений являются верными: 1) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$, 2) $x = o(x^2)$ при $x \rightarrow \infty$. Почему?
23. При каком значении параметра α верно, что $\sqrt{x^3 - 1} + x = O^*(x^\alpha)$ при $x \rightarrow +\infty$?
24. При каком значении параметра α верно, что $\sin x - \sqrt{x} = O^*(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$?

IV. Производная.

1. Вычислить производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
2. Вычислить производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x} \arctg x$.
3. Вычислить производную функции $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$.
4. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
5. Вычислить производную функции $\frac{dy}{dx}$, заданной параметрически: $y = \sin t$, $x = \cos t$.
6. Вычислить производную функции $\frac{dy}{dx}$, заданной неявно: $x^2 + y^2 = 4$.
7. Вычислить производную десятого порядка функции $f(x) = x^2 \sin x$.
8. Написать уравнение касательной к кубической параболе $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
9. Найти угол между кривыми $y = x^3$ и $y = \frac{1}{x^2}$.
10. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ и указать промежутки возрастания и убывания.
11. Для функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$ найти промежутки выпуклости и точки перегиба.
12. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$.
13. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$.
14. Найти асимптоты графика функции $f(x) = x \arctg x$.
15. Разложить функцию $f(x) = \arcsin x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{1}{2}$ до члена порядка $(x - 1/2)^2$.
16. Используя формулу Тейлора, вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$.

V. Неопределенный интеграл.

1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2x-3}$.
2. Вычислить интеграл $\int x e^{-3x} dx$.
3. Вычислить интеграл $\int \ln x dx$.
4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x+2}$.
5. Вычислить интеграл $\int x e^{-x^2} dx$.
6. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$.
7. Вычислить интеграл $\int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$.
8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.