САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
кафедра высшей математики и математической физики

С.Б.Левин, Н.В.Смородина, В.А.Слоущ, М.М.Фаддеев

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ
второй семестр

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2013 г.

- Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. Т.А.Суслина;
  проф., д.ф.-м.н. М.И.Белишев.
- Печатается по решению учебно-методической комиссии
  физического факультета СПбГУ.

С.Б.Левин, Н.В.Смородина, В.А.Слоущ, М.М.Фаддеев. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ. Второй семестр. — СПб.: СПбГУ, 2013. – 26с.

Введение

Настоящее методическое пособие является продолжением пособия [1] и содержит упражнения и задачи, предлагаемые студентам физического факультета СПбГУ на практических занятиях по курсу "Высшая алгебра" во втором семестре. Пособие адресовано преподавателям, ведущим практические занятия по курсу "Высшая алгебра" во втором семестре, и студентам, изучающим этот предмет (под контролем преподавателя).

Настоящее пособие устроено аналогично пособию [1]. Предлагаемые задания объединены по темам (всего пособие содержит 14 тем). Каждая тема (за исключением тем №7 и №14) содержит упражнения, задачи и задания для самостоятельного решения. В начале каждой темы помещен краткий список обсуждаемых вопросов. Темы №7 и №14 представляют собой примеры контрольных работ, предлагаемых студентам во втором семестре на практических занятиях по курсу "Высшая алгебра".

Как и в [1], деление на задачи и упражнения достаточно условно. В основном упражнения являются простейшими заданиями; задачи — более сложными. Почти все темы содержат *дополнительные задачи*. Последние могут касаться вопросов, которые не обсуждались в основном курсе, и требуют от студентов самостоятельного изучения предмета.

Настоящее пособие не содержит краткого изложения основных понятий и формул, необходимых при решении задач (эти сведения содержатся, например, в [2] – [5]). Также пособие не содержит ответов и решений приведенных задач и упражнений. Решения некоторых из предлагаемых задач можно найти в [4] – [9].

Настоящее пособие не может использоваться как жесткий план занятий. Темы №№ 1, 2, 5, 6 рассчитаны на одно занятие (два академических часа); темы №№ 3, 12, 13 рассчитаны на два занятия; темы №№ 4, 9, 10 могут быть пройдены за одно занятие, но при необходимости могут разбираться и два занятия; наконец, тема №8 может занимать от одного до полутора занятий, а тема №11 — от половины до целого занятия. Темы содержат больше заданий, чем можно пройти за отведенное время; предполагается, что преподаватель сам выберет подходящий материал. Программа курса "Высшая алгебра" предусматривает 15 практических занятий во втором семестре. Однако, в связи с отменой занятий в праздничные дни и во время коллоквиумов число практических занятий может сократиться до тринадцати. Представляется разумным, что на занятиях в "сильных" группах можно выпустить большую часть упражнений и сосредоточиться на задачах. Тема №1 посвящена повторению материала, пройденного в первом семестре, и в сильных группах ее можно выпустить. В группах с более слабой подготовкой рекомендуется сосредоточиться на упражнениях и опустить большинство задач. Также возможно в слабых группах опустить на практических занятиях тему №2 и задания темы №8 за исключением упражнений на приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа. В последнем случае можно поменять местами темы №8 и №9.

Большинство упражнений и задач взяты авторами из [2] – [8], а также [10] и часто используются в тексте без дополнительных ссылок. Авторы выражают признательность проф. Т.А.Суслиной, предоставившей большое количество задач.

Обозначения

- $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в случае векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ имеется ввиду стандартное скалярное произведение);
- $|\vec{a}|$ ($\|\vec{a}\|$) — модуль (норма) вектора $\vec{a}$;
- $\vec{a}\times\vec{b}$ — векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- a^t — результат операции транспонирования, примененной к матрице a;
- a^* — матрица, сопряженная к матрице a;
- $\mathrm{Tr}a$ — след матрицы a;
- $M^{m,n}(\mathbb{R})$ — линейное пространство всех вещественных $m\times n$-матриц;
- $M^{m,n}(\mathbb{C})$ — линейное пространство всех комплексных $m\times n$-матриц;
- $M^{m,n}$ — линейное пространство $m\times n$-матриц (вещественных либо комплексных);
- $C([a,b])$ — линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ (вещественных либо комплексных);
- $\Omega_n(\mathbb{R})$ — линейное пространство всех вещественных многочленов степени не выше n;
- $\Omega_n(\mathbb{C})$ — линейное пространство всех комплексных многочленов степени не выше n;
- Ω_n — линейное пространство всех многочленов (вещественных либо комплексных) степени не выше n;
- $\Omega(\mathbb{R})$ — линейное пространство всех вещественных многочленов;
- $\Omega(\mathbb{C})$ — линейное пространство всех комплексных многочленов;
- Ω — линейное пространство всех многочленов (вещественных либо комплексных);
- $\sigma(A)$ — спектр линейного оператора A.

Тема №1. Повторение. Ранг матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений общего вида

Ранг матрицы; критерий нетривиальной разрешимости однородной системы; фундаментальная система решений однородной системы; теорема Кронекера-Капелли; условие разрешимости системы при любой правой части; решение общих систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса; структура общего решения однородной и неоднородной системы; условия разрешимости системы. Простейшие приложения теории систем линейных алгебраических уравнений к аналитической геометрии.

Упражнения.

1. Решить системы методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{array}\right).$$

2. Однородная система $A\vec{x} = \overrightarrow{0}$ имеет общее решение

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = C_1(1, -4, 3, 0)^t + C_2(-1, -1, 0, 1)^t.$$

Неоднородная система $A\vec{x} = (0, 3, 3)^t$ имеет частное решение $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (1, 2, 0, 0)^t$. Найти общее решение неоднородной системы.

3. Определить, какие из однородных систем имеют нетривиальное решение, а какие из неоднородных систем разрешимы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{array}\right).$$

4. Какие из нижеперечисленных систем имеют решение при любой правой части? Для систем, имеющих решение не при любой правой части, найти условия разрешимости.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & f_1\\ 1 & 2 & 1 & f_2\\ 1 & 0 & -1 & f_3\\ 1 & 1 & 0 & f_4\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & f_1\\ 1 & 2 & f_2\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & f_1\\ 2 & 2 & f_2\end{array}\right).$$

5. В пространстве задан вектор $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; точка O — начало координат.

a) Каким уравнениям удовлетворяют координаты точек $A(x, y, z)$, для которых $\overrightarrow{OA} \times \vec{a} = \overrightarrow{0}$? Решите эту систему уравнений. Найдите какую-либо фундаментальную систему решений этой системы уравнений. Каково геометрическое место точек A, для которых $\overrightarrow{OA} \times \vec{a} = \overrightarrow{0}$?

b) Какой системе уравнений удовлетворяют координаты точек $B(x, y, z)$, для которых $\overrightarrow{OB} \times \vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$? Решите эту систему уравнений. Найдите какую-либо фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы. Каково геометрическое место точек B, для которых $\overrightarrow{OB} \times \vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$? Сравните его с геометрическим местом точек из пункта а).

6. В пространстве задан вектор $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; точка O — начало координат.

a) Какому уравнению удовлетворяют координаты точек $A(x, y, z)$, для которых $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{a} = 0$? Решите это уравнение. Найдите какую-либо фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы. Каково геометрическое место точек A, для которых $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{a} = 0$?

b) Какому уравнению удовлетворяют координаты точек $B(x, y, z)$, для которых $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{a} = 3$? Решите это уравнение. Найдите какую-либо фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы. Каково геометрическое место точек B, для которых $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{a} = 3$? Сравните его с геометрическим местом точек из пункта a).

Задачи.
7. Даны векторы в пространстве $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$. Какой системе уравнений удовлетворяют координаты вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, если $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$. Исследовать полученную систему уравнений. Определить, при каких условиях система имеет решение, и описать общее решение системы. *Указание:* см. задачу 14 темы 3 методического пособия [1].
8. Даны векторы в пространстве $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)^t$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$. Какой системе уравнений удовлетворяют координаты вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$, если выполнены условия

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}; \\ (\vec{x}, \vec{c}) = \alpha. \end{cases}$$

Исследовать полученную систему уравнений, определить, при каких условиях система имеет решение, и описать общее решение системы.
9. Даны векторы в пространстве $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)^t$ и числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Какой системе уравнений удовлетворяют координаты вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$, если выполнены условия

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{a}) = \alpha; \\ (\vec{x}, \vec{b}) = \beta; \\ (\vec{x}, \vec{c}) = \gamma. \end{cases}$$

Исследовать полученную систему уравнений, определить, при каких условиях система имеет решение, и описать общее решение системы.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.
1. Решить системы методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

2. Неоднородная система $A\vec{x} = \vec{f}$ имеет два частных решения $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти какое-нибудь нетривиальное решение однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$.
3. На плоскости задан вектор $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; точка O — начало координат.

a) Какому уравнению удовлетворяют координаты точек $A(x, y)$, для которых $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{a} = 0$? Решите это уравнение. Найдите какую-либо фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы. Каково геометрическое место точек A, для которых $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{a} = 0$?

b) Какому уравнению удовлетворяют координаты точек $B(x, y)$, для которых $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{a} = 3$? Решите это уравнение. Найдите какую-либо фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы. Каково геометрическое место точек B, для которых $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{a} = 3$? Сравните его с геометрическим местом точек из пункта a).

Задачи [5]**:** 443 (d–f), 444 (f–j).

Тема №2. Множества с бинарной операцией: группы, кольца, поля

Бинарная операция, свойство ассоциативности, свойство коммутативности, нейтральный элемент; аддитивная и мультипликативная терминология; обратный элемент. Понятие группы; абелева группа; подгруппа. Кольца; коммутативные кольца; кольца с единицей и без единицы; кольца с делителями нуля и без делителей нуля. Поля. Изоморфизмы групп, колец и полей.

Задачи.

1. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств относительно указанной операции: а) целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения; б) неотрицательные целые числа относительно сложения; в) положительные рациональные числа относительно умножения; г) корни n-ой степени из единицы (включая комплексные) относительно умножения; д) матрицы порядка n с целыми элементами относительно умножения; е) матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным 1, относительно умножения; ж) положительные вещественные числа с операцией $a * b = a^2b^2$.

2. Доказать, что следующие группы изоморфны друг другу: G_1 — целые числа относительно сложения; G_2 — четные числа относительно сложения; G_3 — целые числа, кратные n, относительно сложения; G_4 — степени данного числа $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0, \pm 1)$ с целыми показателями относительно умножения.

3. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями (относительно сложения и умножения чисел): а) целые числа; б) целые числа, кратные данному числу n; в) рациональные числа; г) числа вида $a+b\sqrt{2}$ с целыми a, b; д) числа вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a, b.

4. Доказать, что все матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными a, b образуют поле (относительно сложения и умножения матриц), а множество матриц того же вида с вещественными a, b образуют кольцо (но не поле).

5. Образуют ли кольцо все (т.е. при всех m) тригонометрические полиномы вида $f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ с вещественными коэффициентами a_k, b_k? Образуют ли кольцо все тригонометрические полиномы вида $f(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos kx$ с вещественными коэффициентами a_k? Образуют ли кольцо все тригонометрические полиномы вида $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \sin kx$ с вещественными коэффициентами b_k?

6. Доказать, что все диагональные матрицы порядка $n \geqslant 2$ с вещественными элементами образуют коммутативное кольцо (относительно сложения и умножения матриц) с единицей и с делителями нуля.

7. Доказать, что поле матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными a, b изоморфно полю чисел вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a, b.

8. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где a, b — вещественные числа, образуют поле, изоморфное полю комплексных чисел.

Дополнительные задачи.

9. Доказать, что если $a^2 = e$ (где e — нейтральный элемент группы G) для любого $a \in G$, то группа G — абелева.

10. Пусть X — кольцо с единицей и без делителей нуля. Проверить, что если $x \in X$ имеет односторонний обратный, то x обратим.

11. Обязательно ли коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля является полем?

12. Пусть X — кольцо с единицей, $x, y \in X$, xy и yx обратимы. Показать, что x и y обратимы.

13. Пусть X — кольцо с единицей и без делителей нуля, $x, y \in X$, xy или yx обратимы. Показать, что x и y обратимы.

Задания для самостоятельного решения

Задачи [5]**:** 840, 846, 847, 848, 849, 851.

1. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств относительно указанной операции: а) множество диагональных матриц относительно операции сложения; б) множество диагональных матриц относительно операции умножения; в) множество диагональных матриц, у которых все диагональные элементы не равны нулю, относительно операции умножения; г) множество симметричных (кососимметричных) матриц относительно операции сложения; д) множество симметричных (кососимметричных) матриц относительно операции умножения.

2. Показать, что *дробно-линейные* функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, образуют группу относительно операции композиции.

3. Пусть $G_1 = GL(2)$ — группа неособых (2×2)-матриц относительно умножения; G_2 — группа дробно-линейных функций (см. предыдущую задачу). Будет ли отображение $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{ax+b}{cx+d}$ изоморфизмом?

4. Выясните, какие из следующих множеств образуют кольцо, относительно матричного сложения и умножения: а) вещественные симметричные матрицы; б) вещественные ортогональные матрицы; в) верхнетреугольные матрицы; г) множество $n \times n$ матриц (при $n \geqslant 2$), у которых две последние строки нулевые; д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

5. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, $z, w \in \mathbb{C}$, образуют кольцо, относительно сложения и умножения матриц.

6. Показать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & -y & -v & -t \\ y & x & -t & v \\ v & t & x & -y \\ t & -v & y & x \end{pmatrix}$, $x, y, v, t \in \mathbb{R}$, образуют кольцо относительно сложения и умножения матриц.

7. Проверить, что кольца задач 5 и 6 изоморфны.

8. При каких $n \in \mathbb{Z}$ множество матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ nb & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, образуют поле?

Тема №3. Линейные пространства

Аксиоматика линейного пространства; подпространства; базис, координаты, размерность. Линейная оболочка, размерность и базис линейной оболочки; размерность и базис пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Сумма и пересечение подпространств; прямая сумма, прямое дополнение; размерность и базис суммы и пересечения подпространств.

Упражнения.

1. Являются ли линейными пространствами следующие множества? Если да, то определите размерность и укажите какой-либо базис. а) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$; б) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$; в) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 = x_n$.

2. Найти какой-либо базис и размерность линейной оболочки векторов

1) $\vec{f_1} = (1,1,0,0)^t$, $\vec{f_2} = (1,0,1,2)^t$, $\vec{f_3} = (1,0,0,1)^t$, $\vec{f_4} = (1,1,1,1)^t$; 2) $\vec{f_1} = (1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,1,0)^t$, $\vec{f_3} = (0,0,1)^t$.

3. Найти какой-либо базис в линейной оболочке векторов $\vec{f_1} = (1,1,2,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,1,1)^t$, $\vec{f_3} = (0,1,1,0)^t$. Найти координаты вектора $\vec{x} = (3,2,6,3)$ в этом базисе.
4. Представить в виде линейной оболочки некоторых векторов подпространство решений системы

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

5. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,-1,1)^t$, $\vec{f_3} = (-1,1,-1,1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (0,1,1,1)^t$, $\vec{g}_2 = (0,0,1,1)^t$, $\vec{g}_3 = (0,0,0,1)^t$. Найти размерность и какой-либо базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
6. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,-1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (0,1,1)^t$, $\vec{g}_2 = (0,0,1)^t$. Найти размерность и какой-либо базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
7. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,-1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,1,-1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1,0,1)^t$, $\vec{g}_2 = (1,0,0)^t$. Найти размерность и какой-либо базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
8. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1}(x) = (1,1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,1,1,0)^t$, $\vec{f_3} = (-1,-1,-1,1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1,1,0,0)^t$, $\vec{g}_2 = (1,-1,0,0)^t$. Проверить, что сумма подпространств L и M — прямая, и разложить вектор $\vec{x} = (-1,1,1,2)^t$ в сумму векторов $\vec{f} \in L$ и $\vec{g} \in M$.
9. Подпространство L натянуто на многочлены $p_1(x) = 1+x+x^2+x^3$, $p_2(x) = 1+x+x^2$, $p_3(x) = -1-x-x^2+x^3$; подпространство M — на многочлены $q_1(x) = 1+x$, $q_2(x) = 1-x$. Проверить, что сумма подпространств L и M — прямая, и разложить многочлен $h(x) = 1+x+2x^2+5x^3$ в сумму многочленов $p(x) \in L$ и $q(x) \in M$.
10. Найти прямое дополнение в пространстве $\mathbb{R}^4$ к линейной оболочке векторов:
а) $\vec{f_1} = (1,2,1,0)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,-1,-1)^t$; б) $\vec{f_1} = (1,1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,-1,1)^t$, $\vec{f_3} = (-1,1,-1,1)^t$.
Задачи.
11. Образуют ли следующие множества подпространства в $M^{n,n}$? Если да, найти размерность и указать базис: а) матрицы с нулевым определителем; б) матрицы с нулевым следом; в) матрицы с положительным следом.
12. Доказать, что пространство $C([0,1])$ раскладывается в прямую сумму подпространства F постоянных функций и подпространства $G := \{g \in C([0,1]) : g(1/2) = 0\}$.
13. Доказать, что пространство $M^{n,n}$ есть прямая сумма подпространств всех симметричных и всех кососимметричных матриц.
Дополнительные задачи.
14. Доказать, что множество $\mathbb{C}^n$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ (подразумевается, что сложение векторов в $\mathbb{C}^n$ определено стандартным образом, умножение векторов из $\mathbb{C}^n$ на числа также определяется стандартной формулой, но при этом допускается только умножение на вещественные числа). Найти размерность и какой-либо базис этого пространства.
15. Доказать, что все симметричные (кососимметричные) матрицы n-го порядка с вещественными элементами образуют линейное подпространство пространства всех вещественных матриц n-го порядка. Найти размерности и указать базисы.
16. Доказать, что все самосопряженные матрицы n-го порядка с комплексными элементами образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Найти размерность и указать какой-либо базис.
17. Доказать, что все самосопряженные матрицы n-го порядка с комплексными элементами не образуют линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.

18. Доказать, что все самосопряженные матрицы n-го порядка с комплексными элементами и с нулевым следом образуют линейное подпространство в пространстве всех самосопряженных матриц n-го порядка с комплексными элементами над полем $\mathbb{R}$. Найти размерность, указать какой-либо базис, и найти какое-либо прямое дополнение, описанного подпространства.
19. Даны точки $0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_n \leqslant 1$; доказать, что пространство $C([0,1])$ раскладывается в прямую сумму подпространства Ω_{n-1} и подпространства $G := \{g \in C([0,1]) : g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) = 0\}$.
20. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму подпространств $F = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 + x^2 + \dots + x^n = 0\}$ и $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 = x^2 = \dots = x^n\}$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.
1. Являются ли линейными пространствами следующие множества? Если да, то определите размерность и укажите какой-либо базис: а) все векторы из $\mathbb{R}^n$, у которых четные координаты равны нулю; б) все векторы из $\mathbb{R}^n$, у которых четные координаты равны между собой; в) все векторы из $\mathbb{R}^n$ вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots)^t$.
2. Найти какой-либо базис и размерность линейной оболочки векторов

$$1)\quad \begin{array}{l} \vec{f_1} = (1,1)^t, \\ \vec{f_2} = (2,1)^t; \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{ll} \vec{f_1} = (0,0,1,1)^t, & \vec{f_2} = (0,-1,1,2)^t, \\ \vec{f_3} = (0,-1,0,1)^t, & \vec{f_4} = (1,1,0,0)^t. \end{array}$$

3. Найти базис в линейной оболочке векторов $\vec{f_1} = (2,1,3,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,2,0,1)^t$, $\vec{f_3} = (-1,1,-3,0)^t$. Найти координаты вектора $\vec{x} = (2,4,0,2)$ в этом базисе.
4. Представить в виде линейной оболочки некоторых векторов подпространство решений системы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 0 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

5. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,2,1,0)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,-1,-1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (2,-1,0,1)^t$, $\vec{g}_2 = (1,-1,3,7)^t$, $\vec{g}_3 = (0,0,0,1)^t$. Найти размерность и базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
6. Подпространство L натянуто на многочлены $p_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $p_2(x) = -1 + x^2 + 2x^3$, $p_3(x) = 4x + x^2 - x^3$; подпространство M — на многочлены $q_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, $q_2(x) = 1 + 4x - 3x^3$, $q_3(x) = 1 + 4x - 2x^3$. Найти размерность и базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
7. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,1,0)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1,0,1)^t$, $\vec{g}_2 = (1,0,0)^t$. Найти размерность и базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
8. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1}(x) = (0,0,0,1)^t$, $\vec{f_2} = (0,0,1,1)^t$, $\vec{f_3} = (0,0,1,-1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1,1,0,0)^t$, $\vec{g}_2 = (1,-1,0,0)^t$. Проверить, что сумма подпространств L и M — прямая и разложить вектор $\vec{x} = (-1,1,0,1)^t$ в сумму векторов $\vec{f} \in L$ и $\vec{g} \in M$.
Задачи.
9. Найти базис и размерность следующих линейных пространств: а) все многочлены из $\Omega_n(\mathbb{R})$, имеющие корень в точке $x_0 = 3$; б) все многочлены из $\Omega_n(\mathbb{R})$, имеющие корень в точке $x_0 = 3 + 2i$; в) все многочлены из $\Omega_n(\mathbb{R})$, имеющие одинаковые значения в точках $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$.

Тема №4. Линейные операторы

Понятие линейного оператора, сложение линейных операторов, умножение линейных операторов на число, композиция линейных операторов; ядро, образ и ранг линейного оператора; изображающая матрица оператора; линейные уравнения в линейном пространстве, классификация линейных операторов, альтернатива Фредгольма.

Упражнения.

1. Какие из перечисленных ниже преобразований $A:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) являются линейными: а) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$; б) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy\\x-y\end{pmatrix}$; в) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; г) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

2. Проверить, что все операторы $A:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), определенные равенствами $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{K}$, являются линейными; доказать, что все линейные операторы $A:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$ могут быть заданы равенствами такого типа.

3. Проверить, что следующие операторы линейны;

а) $A:\Omega_2(\mathbb{R})\to\Omega_1(\mathbb{R})$: $(AP)(x)=P'(x)$, $P\in\Omega_2(\mathbb{R})$;

б) $A:\Omega_n(\mathbb{C})\to\Omega_{n+1}(\mathbb{C})$: $(AP)(x)=\int\limits_0^x P(t)dt$, $P\in\Omega_n(\mathbb{C})$;

в) $A:\Omega_n(\mathbb{R})\to\Omega_n(\mathbb{R})$: при всех $P\in\Omega_n(\mathbb{R})$ $(AP)(x)=Q(x)$, где $Q(x)=P(3x+5)$;

д) $A:M^{2,2}(\mathbb{R})\to M^{2,2}(\mathbb{R})$: $Aa=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot a$, $a\in M^{2,2}(\mathbb{R})$.

4. Проверить, что для любых $u,v\in M^{2,2}(\mathbb{R})$ операторы $A,B:M^{2,2}(\mathbb{R})\to M^{2,2}(\mathbb{R})$: $Aa=u\cdot a$, $Ba=a\cdot v$, $a\in M^{2,2}(\mathbb{R})$, линейны.

5. Найти изображающую матрицу в стандартном базисе для операторов: $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: а) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\-x-y\end{pmatrix}$; б) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$.

6. Для оператора $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+2y\\-x+y\end{pmatrix}$ найти изображающую матрицу а) в паре базисов $\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$; б) в базисе $\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$.

7. Для оператора $A:\Omega_2(\mathbb{R})\to\Omega_2(\mathbb{R})$: $(AP)(x)=P'(x)$ найти изображающую матрицу в базисе $\{p_0(x)=1,p_1(x)=x,p_2(x)=x^2\}$.

8. Для оператора $A:\Omega_1(\mathbb{R})\to\Omega_2(\mathbb{R})$: $(AP)(x)=\int\limits_0^x P(t)dt$ найти изображающую матрицу в паре базисов $\{p_0(x)=1,p_1(x)=x\}$, $\{p_0(x)=1,p_1(x)=x,p_2(x)=x^2\}$.

9. Для оператора $A:M^{2,2}(\mathbb{R})\to M^{2,2}(\mathbb{R})$: $Aa=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot a$ найти изображающую матрицу в базисе $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

10. Найти ядро, образ и ранг оператора $A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$: $A\vec f=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&2&1&2\\1&2&1&3\end{pmatrix}\cdot\vec f$, $\vec f\in\mathbb{R}^4$.

11. Найти ядро, образ и ранг оператора $A:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^3$: $A\vec f=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\1&2&1&2&1\\1&2&1&3&1\end{pmatrix}\cdot\vec f$, $\vec f\in\mathbb{C}^5$.

12. Найти ядро, образ и ранг оператора $A:\Omega_3\to\Omega_3$: $(AP)(x)=P'(x)$.

Задачи.

13. Для оператора $A:M^{2,2}\to M^{2,2}$, заданного умножением на данную матрицу $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ слева (справа) найти изображающую матрицу в стандартном базисе в $M^{2,2}$.

14. В некотором линейном пространстве E имеется базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Линейный оператор $A:E\to E$ действует на векторы базиса следующим образом: $Ae_1=e_3+e_4$, $Ae_2=e_1-e_2+$

e_3+3e_4, $Ae_3=e_3-5e_1$, $Ae_4=e_4-3e_2$. Найти матрицу, изображающую оператор A в базисе $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

15. В некотором линейном пространстве E имеется базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$; в линейном пространстве F (над тем же полем) заданы векторы $\{f_1,\ldots,f_n\}$. Показать, что существует единственный оператор $A:E\to F$, удовлетворяющий условиям $Ae_j=f_j$, $j=1,\ldots,n$. Проверить, что A — изоморфизм тогда и только тогда, когда $\{f_1,\ldots,f_n\}$ — базис в F.

16. В пространстве Ω_2 оператор A имеет в базисе $\{1,x,x^2\}$ изображающую матрицу $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Найти изображающую матрицу этого оператора в базисе $\{3x^2+2x+1,x^2+3x+2,2x^2+x+3\}$.

17. Найти $A+B$, $3B-A$, AB, BA для операторов

а) $A,B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y\\-x\end{pmatrix}$;

б) $A,B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\-x-y\end{pmatrix}$.

18. Найти $AB-BA$ для операторов $A,B:\Omega(\mathbb{C})\to\Omega(\mathbb{C})$: $(AP)(x)=xP(x)$, $(BP)(x)=-iP'(x)$.

19. Пусть $A:\Omega(\mathbb{C})\to\Omega(\mathbb{C})$ — оператор дифференцирования. Опишите, как действует оператор $5A^4+2A^3-3A^2-A+I$. Здесь I — единичный (тождественный) оператор в $\Omega(\mathbb{C})$.

20. Найти ядро, образ и ранг оператора $A:\Omega_3\to\Omega_3$: $(AP)(x)=xP''(x)-3P'(x)$.

21. Для операторов из упражнений 7 – 9 и из задачи 14 найти ядро, образ и ранг.

22. Для оператора из упражнения 7, используя его изображающую матрицу, решить уравнение $AP=2$; определить, имеет ли уравнение $AP=0$ нетривиальное решение; определить, имеет ли уравнение $AP=Q$ решение при любой правой части; если нет, выписать условия разрешимости.

23. Для оператора из упражнения 8, используя его изображающую матрицу, решить уравнение $AP=x+2$; определить, имеет ли уравнение $AP=0$ нетривиальное решение; определить, имеет ли уравнение $AP=Q$ решение при любой правой части; если нет, выписать условия разрешимости.

24. Для оператора из упражнения 9, используя его изображающую матрицу, решить уравнение $Aa=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; определить, имеет ли уравнение $Aa=0$ нетривиальное решение; определить, имеет ли уравнение $Aa=b$ решение при любой правой части; если нет, выписать условия разрешимости.

Дополнительные задачи.

25. Каждой подстановке $I=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\i_1&i_2&\ldots&i_n\end{pmatrix}$ сопоставим отображение $A_I:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$: $A_I(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t=(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n})^t$. Проверить, что операторы A_I — линейные; все операторы A_I образуют группу относительно операции композиция; отображение $I\mapsto A_I$ — гомоморфизм (т.е. переводит произведение подстановок в соответствующее произведение операторов).

26. Проверить, что для любых $u,v\in M^{2,2}(\mathbb{R})$ операторы $A,B:M^{2,2}(\mathbb{R})\to M^{2,2}(\mathbb{R})$: $Aa=u\cdot a$, $Ba=a\cdot v$, $a\in M^{2,2}(\mathbb{R})$, коммутируют (т.е. $AB=BA$).

27. Доказать, что операторы $A_{1,2}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, заданные равенствами $A_1\vec{x}=(\vec{x},\vec{a})\vec{a}$, $A_2\vec{x}=\vec{x}\times\vec{a}$, $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, являются линейными операторами; найти их образы, ядра и изображающие матрицы в стандартном базисе.

28. Доказать, что ранг изображающей матрицы эпиморфизма (отображения "на") равен числу ее строк, а ранг изображающей матрицы мономорфизма (с нулевым ядром) равен числу ее столбцов.

29. Найти ядро, образ и ранг для следующих отображений:

а) $A:\Omega_n(\mathbb{C})\to\Omega_n(\mathbb{C}):(AP)(x)=xP'(x)$, $P\in\Omega_n(\mathbb{C})$;
б) $A:\Omega_n(\mathbb{C})\to\Omega_n(\mathbb{C}):(AP)(x)=x^{-1}\int_0^x P(t)dt$, $P\in\Omega_n(\mathbb{C})$;
в) $A:\Omega_n(\mathbb{C})\to\Omega_n(\mathbb{C}):(AP)(x)=P(x+1)-P(x)$, $P\in\Omega_n(\mathbb{C})$;
г) $A:\Omega_n(\mathbb{C})\to\Omega_{n+3}(\mathbb{C}):(AP)(x)=\int_0^x (x-t)^2P(t)dt$, $P\in\Omega_n(\mathbb{C})$.

30. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1}(x) = (1,1,1,1)^t$, $\vec{f_2} = (1,1,1,0)^t$, $\vec{f_3} = (-1,-1,-1,1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1,1,0,0)^t$, $\vec{g}_2 = (1,-1,0,0)^t$. Сумма подпространств — прямая (см. упражнение 8 темы №3) и каждый вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ раскладывается единственным образом в сумму $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$, где $\vec{f} \in L$ и $\vec{g} \in M$. Определим оператор $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ равенством $P\vec{x} = \vec{f}$. Найти матрицу, изображающую оператор P в стандартном базисе. Найти образ и ядро оператора P. Вычислить P^2.

31. Пусть оператор A каждому вектору трехмерного пространства сопоставляет его компоненту по оси, образующей равные углы с осями прямоугольной декартовой системы координат. Показать, что оператор A является линейным оператором, и найти его изображающую матрицу в стандартном базисе. Найти ядро и образ этого оператора. Вычислить квадрат оператора.

32. Пусть конечномерное пространство E раскладывается в прямую сумму $E = L \dotplus M$ и каждый вектор $\vec{x} \in E$ раскладывается единственным образом в сумму $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$, где $\vec{f} \in L$ и $\vec{g} \in M$. Определим оператор $P : E \to E$ равенством $P\vec{x} = \vec{f}$. Оператор P называют оператором проектирования на подпространство L параллельно подпространству M. Проверить, что оператор P линеен. Вычислить P^2. Найти базис, в котором оператор P изображается диагональной матрицей.

33. Пусть в конечномерном пространстве E задан линейный оператор P, удовлетворяющий условию $P^2 = P$ (такие операторы называются идемпотентными). Показать, что существуют (единственные) подпространства L и M такие, что $E = L \dotplus M$, и P является оператором проектирования на подпространство L параллельно подпространству M.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 966, 967.
Задачи [5]**:** 971,973–978, 984.
Дополнительные задачи [5]**:** 968, 969, 979–981, 985–1004.

Тема №5. Преобразование координат вектора и изображающей матрицы оператора при замене базиса

Матрица перехода; преобразование координат вектора; преобразование изображающей матрицы оператора; преобразование уравнений поверхностей и кривых; определитель и след линейного оператора.

Упражнения.

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы базисы: $\mathbf{e} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\tilde{\mathbf{e}} := \{\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2, \vec{\tilde{e}}_3\}$, где $\vec{e}_1 = (1,1,1)^t$, $\vec{e}_2 = (1,1,0)^t$, $\vec{e}_3 = (1,0,0)^t$, $\vec{\tilde{e}}_1 = (2,3,2)^t$, $\vec{\tilde{e}}_2 = (3,1,2)^t$, $\vec{\tilde{e}}_3 = (4,3,3)^t$. Вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$ координаты $(1,1,1)^t$; оператор A изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу оператора A в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$.

2. В пространстве $\Omega_2(\mathbb{C})$ заданы базисы: $\mathbf{e} := \{e_1, e_2, e_3\}$, $\tilde{\mathbf{e}} := \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$, где $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$, $\tilde{e}_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $\tilde{e}_2(x) = x^2 + 3x + 2$, $\tilde{e}_3(x) = 2x^2 + x + 3$. Многочлен $p(x)$ имеет в базисе $\mathbf{e}$ координаты $(1,2,3)^t$; оператор A изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти координаты многочлена $p(x)$ в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$ и изображающую матрицу оператора A в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$.

3. В пространстве $M^{2,2}(\mathbb{C})$ заданы базисы: $\mathbf{e} := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\tilde{\mathbf{e}} := \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица a имеет в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$ координаты $(1, 1, 2, 0)^t$; оператор A изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти координаты матрицы a в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу оператора A в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$.

4. В некотором четырехмерном вещественном линейном пространстве E заданы базисы: $\mathbf{e} := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\tilde{\mathbf{e}} := \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$, где $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = 3e_1 + e_2$, $\tilde{e}_3 = -5e_1 + 2e_2 + e_3$, $\tilde{e}_4 = 7e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_4$. Вектор f имеет в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$ координаты $(1, 2, 1, 1)^t$; оператор A изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти координаты вектора f в базисе $\mathbf{e}$ и изображающую матрицу оператора A в базисе $\tilde{\mathbf{e}}$.

Задачи.

5. Пусть E — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в E. Пусть векторы $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n\}$ заданы формулами

$$\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^{j} e_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

а) Проверьте, что $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n\}$ образуют базис в E и найдите матрицу перехода от исходного базиса к новому.

б) Пусть вектор $x \in E$ имеет в исходном базисе координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а в новом базисе — $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n$. Приведите формулы преобразования координат.

в) Пусть $A : E \to E$ — линейный оператор, a — его изображающая матрица в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, и $\tilde{a}$ — его изображающая матрица в базисе $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n\}$. Приведите формулы преобразования изображающей матрицы.

6. Для данного вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ построить изображающую матрицу оператора $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $A\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

7. В стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ уравнение поверхности Γ имеет вид $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1$. Как выглядит уравнение поверхности Γ в базисе $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{i}$?

8. В стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ параметрические уравнения кривой L имеют вид $x_1 = t$, $x_2 = \cos t$, $x_3 = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Как выглядят параметрические уравнения кривой L в базисе $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$?

Дополнительные задачи.

9. Показать, что наборы многочленов $\{1, x, \ldots, x^n\}$, $\{1, x-a, \ldots, (x-a)^n\}$ являются базисами в пространстве $\Omega_n(\mathbb{C})$ и построить матрицу перехода от первого базиса ко второму. Разложить произвольный многочлен $P \in \Omega_n$ по второму базису (тем самым доказав формулу Тейлора для многочленов).

10. Решить предыдущую задачу в случае наборов многочленов $\{1, x - a_1, \ldots, (x - a_n)^n\}$, $\{1, x - b_1, \ldots, (x - b_n)^n\}$.

11. В базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ постройте изображающую матрицу оператора поворота вокруг вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ на угол φ. Базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — правый, каждый вектор поворачивается вокруг вектора $\vec{a}$ против часовой стрелки (если смотреть из конца вектора $\vec{a}$ в сторону начала координат). *Указание:* сначала построить изображающую матрицу оператора поворота в каком-нибудь ортонормированном базисе, один из векторов которого сонаправлен с вектором $\vec{a}$.

12. Задан произвольный вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ и группа операторов поворота U_φ на углы $\varphi \in \mathbb{R}$ вокруг вектора $\vec{a}$. Найти оператор A такой, что $U_\varphi = e^{\varphi A}$. *Указание:* так же как и для матриц, для любого линейного оператора A экспонента e^A определяется при помощи ряда $e^A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

13. Вычислить след и детерминант операторов из задач 6 (б) и 7 темы 5, а также задач 13, 29 (а,б,в) и 30 темы 4 настоящего пособия.

14. Показать, что если операторы A и B изображаются в некотором базисе $\mathbf{e}$ матрицами a и b, то

а) оператор $\alpha A + \beta B$ изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей $\alpha a + \beta b$;
б) оператор AB изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей ab;
в) при любом многочлене P оператор $P(A)$ изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей $P(a)$;
г) оператор e^A (см. задачу 12 данной темы) изображается в базисе $\mathbf{e}$ матрицей e^a.

15. Показать, что при условии $P = P^2$ справедливо равенство $\mathrm{Tr}P = \mathrm{rank}P$. *Указание:* можно воспользоваться результатами задачи 33 темы 4.

16. Пусть A, B операторы в пространстве E. Показать, что при условии $[A, B] = A$ справедливы равенства $[A^k, B] = kA^k$, $k \in \mathbb{N}$, и $A^n = 0$, где $n = \dim E$. *Указание:* для доказательства равенства $A^n = 0$ воспользуйтесь тождеством Кэли.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 936
Задачи [5]**:** 937

Тема №6. Спектр и собственные подпространства линейного оператора

Характеристический многочлен, спектр и собственные подпространства линейного оператора в конечномерном пространстве; собственный базис; диагонализуемый оператор. Квадратные матрицы как линейные операторы умножения слева в пространстве $\mathbb{C}^n$; диагонализация матриц; приложение диагонализации операторов к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Функции от операторов.

Упражнения.

1. Найти собственные числа и собственные подпространства матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Подобным преобразованием привести к диагональному виду матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Определить, можно ли подобным преобразованием привести к диагональному виду матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить задачу Коши: найти $\vec{x}(t) \in \mathbb{C}^2$, $t \in \mathbb{R}$: $\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{x}$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$; где

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи.

5. Оператор A в комплексном линейном пространстве E изображается матрицей $a = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ в некотором базисе $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$. Найти спектр, собственные подпространства и собственный базис оператора A. Выписать общее решение уравнения $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. *Указание:* записать уравнение в координатах в собственном базисе.

6. Пусть оператор A в конечномерном комплексном линейном пространстве обратим. Показать: 1) ноль не принадлежит спектру оператора A; 2) $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$; 3) $Ax = \lambda x \iff A^{-1}x = \lambda^{-1}x$.

7. Доказать равенство $d_{AB}(\lambda) = d_{BA}(\lambda)$, если оператор A обратим.

8. Доказать равенство $d_{AB}(\lambda) = d_{BA}(\lambda)$ для любых операторов A и B в конечномерном линейном пространстве. *Указание:* покажите, что при фиксированном λ многочлены $P(\mu) = d_{(A-\mu I)B}(\lambda)$ и $Q(\mu) = d_{B(A-\mu I)}(\lambda)$ совпадают при всех $\mu \notin \sigma(A)$.

9. Доказать, что если линейный оператор A диагонализуем, то оператор $P(A)$ также диагонализуем. Здесь P — произвольный многочлен.

10. Для операторов $A, B \in \Lambda(\Omega_2(\mathbb{C}))$, заданных равенствами $AP(x) = (x-1)^{-1}\int_1^x P(t)dt$, $BP(x) = (x+1)\frac{dP}{dx}$ найти спектр, собственные подпространства и собственный базис (если он существует).

11. Найти спектр и собственные подпространства оператора, действующего в пространстве $M^{n,n}(\mathbb{C})$ по формуле $a \to a^t$.

12. Показать, что при условии $P^2 = P$, оператор P диагонализуем и $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$. *Указание:* можно воспользоваться результатами задачи 33 темы 4.

13. Операторы $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, заданы равенствами

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2; \quad B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{C}^2.$$

Найти спектры, собственные подпространства и собственные базисы (если они существуют) операторов A и B.

14. Пусть E — комплексное n-мерное линейное пространство, оператор $A \in \Lambda(E)$ имеет n различных собственных значений; оператор $B \in \Lambda(E)$ коммутирует с оператором A. Показать, что любой собственный вектор оператора A является собственным вектором и для B.

Дополнительные задачи.

15. Для матрицы Фробениуса $B = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти характеристический многочлен. Всякий ли многочлен является характеристическим для некоторой матрицы?

16. Путь $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор столбец. Найти спектр и собственные подпространства матрицы $b = \vec{a} \cdot \vec{a}^t$ (как оператора умножения слева в $\mathbb{R}^n$). Диагонализуема ли матрица b?

17. В пространстве многочленов $\Omega_n(\mathbb{C})$ для операторов $AP(x) = xP'(x)$ и $BP(x) = x^{-1}\int_0^x P(t)dt$ найти собственные числа, собственные подпространства и собственный базис (если он существует).

18. В пространстве тригонометрических многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше $m \in \mathbb{N}$ для оператора $A = \frac{d^2}{dx^2}$ найти собственные числа, собственные подпространства и собственный базис (если он существует). Решить задачу Коши: $\begin{cases} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}, \\ P\,\big|_{t=0} = \sin x + \cos mx. \end{cases}$

19. Пусть E — комплексное n-мерное линейное пространство. Показать, что собственный вектор оператора $A \in \Lambda(E)$, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором оператора $P(A)$ (при любом $P \in \Omega(\mathbb{C})$), отвечающим собственному значению $P(\lambda)$.

20. В пространстве $\Omega_n(\mathbb{R})$ для оператора $A = \frac{d}{dx}$ найти операторы e^A и $\cos A$.

21. Показать $\sigma(P(A)) = \{P(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$.

22. Показать $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

23. Пусть E — n-мерное комплексное линейное пространство; σ — конечное множество на комплексной плоскости, мощности не выше n. Показать, что найдется оператор $A \in \Lambda(E)$ такой, что $\sigma(A) = \sigma$.
24. Пусть E — n-мерное комплексное линейное пространство; $A \in \Lambda(E)$ таков, что $A^2 = I$. Показать включение $\sigma(A) \subset \{-1, 1\}$.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:**1032; диагонализовать матрицы из номера 1047 (a, b, f, g, l, m, n).
Задачи [5]**:** 1048 (c).

Тема №7. Контрольная работа

Темы: метод Гаусса. Базис, подпространство, линейная оболочка. Образ, ядро, изображающая матрица линейного оператора. Преобразование координат. Спектр, собственные подпространства оператора, диагонализация матрицы.

1. Решить систему методом Гаусса. Записать ответ в векторной форме. Указать фундаментальную систему решений для соответствующей однородной системы.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

2. Найти координаты вектора $\vec{x} = (3, -5, 7, -1)^t$ в базисе $\vec{f_1} = (1, -1, 1, -1)^t$, $\vec{f_2} = (1, 1, 1, -1)^t$, $\vec{f_3} = (1, 1, -1, 1)^t$, $\vec{f_4} = (1, -1, 1, 1)^t$.
3. Подпространство L натянуто на векторы $\vec{f_1} = (1, -1, 1)^t$, $\vec{f_2} = (1, 1, -1)^t$; подпространство M — на векторы $\vec{g}_1 = (1, 1, 0)^t$, $\vec{g}_2 = (1, -1, 0)^t$. Найти размерность и базис подпространств $L \bigcap M$, $L + M$.
4. Оператор A задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ в базисе $\vec{f_1} := (1, 1, 0)^t$, $\vec{f_2} := (1, 1, 1)^t$, $\vec{f_3} := (1, 0, 0)^t$. Найти образ и ядро оператора A; найти изображающую матрицу оператора A в базисе $\vec{e}_1 = (1, 1, -1)^t$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 1)^t$, $\vec{e}_3 = (-1, 1, 1)^t$.
5. Диагонализовать матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Тема №8. Линейные и билинейные формы

Двойственное пространство, двойственный базис, преобразование двойственного базиса. Билинейная форма, матрица билинейной формы, симметричные формы, приведение формы к сумме одноименных произведений, индексы инерции.

Упражнения.
1. Какие из следующих отображений являются линейными формами?

(1) $E = \mathbb{R}^3$, $f(\vec{x}) = x^1 - x^2 + x^3$, $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)^t$.
(2) $E = \mathbb{C}^2$, $f(\vec{x}) = x^1 + ix^2$, $\vec{x} = (x^1, x^2)^t$.
(3) $E = \mathbb{C}^2$, $f(\vec{x}) = x^1 - \overline{x^2}$, $\vec{x} = (x^1, x^2)^t$.

(4) $E = M^{2,2}(\mathbb{R})$, $f(a) = \mathrm{Tr}(bac)$, $a \in M^{2,2}(\mathbb{R})$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) E — пространство трехмерных радиус-векторов, $f(\vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \vec{b}$, $g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$, где $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — правый ортонормированный базис.

(6) $E = \Omega_n(\mathbb{R})$, $f(P) = P(0) + P'(1) + P''(2) + \cdots + P^{(n)}(n)$.

(7) $E = \Omega_n(\mathbb{R})$, $f(P) = P(1) - P(0) + \int_0^1 P(t)dt$.

2. Дан базис $\vec{f}_1 = (1,1,1)^t$, $\vec{f}_2 = (1,1,0)^t$, $\vec{f}_3 = (1,0,0)^t$ в $\mathbb{R}^3$. Линейная форма g задана равенствами $g(\vec{f}_1) = 1$, $g(\vec{f}_2) = 2$, $g(\vec{f}_3) = 3$. Найти: а) координаты формы g в базисе $\{\vec{f}^1, \vec{f}^2, \vec{f}^3\}$, двойственном к базису $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$; б) координаты формы g в базисе $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\}$, двойственном к стандартному базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в $\mathbb{R}^3$; в) координаты формы g в базисе $\{\vec{y}^1, \vec{y}^2, \vec{y}^3\}$, двойственном к базису $\vec{y}_1 = (1,1,-1)^t$, $\vec{y}_2 = (1,-1,1)^t$, $\vec{y}_3 = (-1,1,1)^t$.

3. Даны линейные формы g^1, g^2, g^3 над $\mathbb{R}^3$: $g^1(\vec{x}) = x^1 + x^2 + x^3$, $g^2(\vec{x}) = x^1 + x^2$, $g^3(\vec{x}) = x^1$, $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)^t$. Показать, что формы g^1, g^2, g^3 образуют базис и найти базис в $\mathbb{R}^3$, к которому базис $\{g^1, g^2, g^3\}$ — двойственный.

4. В трехмерном пространстве E в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ билинейная форма $Q(x,y)$ изображается матрицей $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Новый базис имеет вид: $\tilde{e}_1 = e_1 - e_2$, $\tilde{e}_2 = e_1 + e_3$, $\tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Найти изображающую матрицу формы Q в новом базисе. Записать форму Q в старых и новых координатах.

5. Разложить форму $Q(x,y) = 2x^1y^1 - x^1y^2 + x^1y^3 + 2x^2y^1 - x^3y^1 + 3x^3y^3$ в сумму симметричной и антисимметричной форм.

6. Восстановить по квадратичной форме $Q(x,x) = (x^1)^2 + 2x^1x^3$ билинейную симметричную форму $Q(x,y)$.

7. Для формы $Q(x,y) = 2x^1y^1 - x^1y^2 + x^1y^3 - x^2y^1 + x^3y^1 + 3x^3y^3$ выписать изображающую матрицу в стандартным базисе; привести форму к сумме одноименных произведений (или квадратичную форму к сумме квадратов); выписать необходимые преобразования координат; найти индексы инерции квадратичной формы.

8. Привести квадратичную форму к сумме квадратов. Найти индексы инерции: $Q(x,x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$.

9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов. Найти индексы инерции: $Q(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

Задачи.

10. Даны линейные формы над $E = \Omega_{n-1}(\mathbb{C})$: $g^k(P) = P(\tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n \in \mathbb{R}$. Показать, что $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ — базис в E'. Найти базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, к которому двойственен базис $\mathbf{g}$. Разложить по базису $\mathbf{e}$ произвольный многочлен (т.е. выписать интерполяционную формулу Лагранжа).

11. Даны линейные формы над $E = \Omega_{n-1}(\mathbb{C})$: $g^k(P) = P^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Показать, что $\mathbf{g} = \{g^0, \ldots, g^{n-1}\}$ — базис в E'. Найти базис $\mathbf{e} = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, к которому двойственен базис $\mathbf{g}$. Разложить по базису $\mathbf{e}$ произвольный многочлен.

12. Даны линейные формы над $E = \Omega_{n-1}(\mathbb{C})$: $g^k(P) = \int_0^{k+1} P(t)dt$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Показать, что $\mathbf{g} = \{g^0, \ldots, g^{n-1}\}$ — базис в E'. Найти базис $\mathbf{e} = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$, к которому двойственен базис $\mathbf{g}$. Разложить по базису $\mathbf{e}$ произвольный многочлен.

13. Определить индексы инерции в зависимости от параметра λ:

а) $Q(x,x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $Q(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

в) $Q(x,x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

14. Привести к сумме квадратов квадратичную форму $Q(x) = \mathrm{Tr}x^2$ в линейном пространстве $M^{3,3}(\mathbb{R})$. Найти индексы инерции.

Дополнительные задачи.

15. Оператор A действует из $\Omega_2(\mathbb{R})$ в $(\Omega_2(\mathbb{R}))'$ по следующему правилу: каждому многочлену $P(t)$ оператор A ставит в соответствие линейную форму $g = AP$, определенную равенством $g(Q) = \int\limits_0^1 P(t)Q(t)dt$. Найти матрицу, изображающую оператор A в паре базисов $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbf{g} = \{g^1, g^2, g^3\}$, где $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$, а $\mathbf{g}$ — двойственный

базис к базису $\mathbf{e}$. Найти матрицу, изображающую оператор A в паре базисов $\tilde{\mathbf{e}} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$, $\tilde{\mathbf{g}} = \{\tilde{g}^1, \tilde{g}^2, \tilde{g}^3\}$, где $\tilde{e}_1(x) = 1$, $\tilde{e}_2(x) = x - a$, $\tilde{e}_3(x) = (x-a)^2$, а $\tilde{\mathbf{g}}$ — двойственный базис к базису $\tilde{\mathbf{e}}$.
16. Пусть E — n-мерное линейное пространство, E' — двойственное пространство. Предположим, что набор функционалов $\mathbf{g} = \{g^1, \ldots, g^n\}$ обладает свойством

$$\left[e \in E, \quad g^k(e) = 0, \quad k = 1, \ldots, n\right] \Longrightarrow e = 0.$$

Проверьте, что набор $\mathbf{g}$ является базисом в пространстве E'.
17. Привести к сумме квадратов квадратичную форму $Q(x) = \mathrm{Tr} x^2$ в линейном пространстве $M^{n,n}(\mathbb{R})$. Найти индексы инерции.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 527
Задачи [5]**:** 528, 529.
Дополнительные задачи [5]**:** 530, 533.

Тема №9. Евклидовы пространства

Вещественное евклидово пространство: скалярное произведение векторов; длина вектора; угол между векторами; ортонормированный базис; процесс ортогонализации; ортогональное дополнение. Комплексное евклидово пространство: скалярное произведение векторов; длина вектора; ортонормированный базис; процесс ортогонализации; ортогональное дополнение.

Упражнения.
1. В вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти $(\vec{x}, \vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|\vec{y}\|$ и косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ для векторов $\vec{x} = (1, 1, -1, 1)^t$, $\vec{y} = (1, 2, 3, 1)^t$; $\vec{x} = (-1, 0, 2, -2)^t$, $\vec{y} = (1, 1, -1, 1)^t$.
2. В комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^4$ со стандартным скалярным произведением найти $(\vec{x}, \vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|\vec{y}\|$ для векторов

$$\vec{x} = (-1+2i, 3-i, -i)^t, \quad \vec{y} = (-1+i, 2, 2-3i)^t; \quad \vec{x} = (2-i, i, 3+i)^t, \quad \vec{y} = (2, 3-i, 1+i)^t;$$
$$\vec{x} = (0, 2-i, 1+2i, 2)^t, \quad \vec{y} = (-1, 1+i, 1-2i, -1)^t.$$

Здесь i — мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.
3. Процессом ортогонализации построить ортонормированный базис подпространства в $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы $\vec{f_1} = (0, 1, 0, -1)^t$, $\vec{f_2} = (1, 1, -1, 1)^t$, $f_3 = (-1, -1, 1, 0)^t$.
4. Процессом ортогонализации базиса $\vec{f_1} = (1, 1, 1)^t$, $\vec{f_2} = (1, 1, 0)^t$, $f_3 = (1, 0, 0)^t$ в $\mathbb{R}^3$ построить ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$.
5. Найти все векторы в $\mathbb{R}^3$, перпендикулярные вектору $\vec{f} = (1, 1, 1)^t$.
6. Найти все единичные векторы в $\mathbb{C}^3$, перпендикулярные вектору $\vec{f} = (1, 1, i)^t$.
7. В $\mathbb{R}^4$ даны два ортогональных друг другу вектора единичной длины $\vec{f_1} = (-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$, $\vec{f_2} = (0, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7})^t$. Достроить систему $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$.
8. Построить ортонормированную фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

9. Разложить векторы $\vec{x} = (1, 2, -2, 1)^t$, $\vec{y} = (1, 1, 1, 1)^t$, $\vec{z} = (4, 3, 2, 1)^t$ по ортонормированному базису

$$\vec{f_1} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^t, \quad \vec{f_2} = (1/2, 1/2, -1/2, 1/2)^t, \tag{1}$$

$$\vec{f_3} = (-1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^t, \quad \vec{f_4} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^t. \tag{2}$$

10. В пространстве $\mathbb{R}^4$ задано подпространство $F = \mathcal{L}\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$, где $\vec{f_1} = (0, 2, -1, 0)^t$, $\vec{f_2} = (1, 0, 2, 3)^t$. Найти ортонормированный базис в ортогональном дополнении $F^{\perp}$.
11. Разложить вектор $\vec{x} = (5, 2, -2, 2)^t$ в ортогональную сумму $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \perp F$, где F — линейная оболочка векторов $\vec{f_1} = (2, 1, 1, -1)^t$, $\vec{f_2} = (1, 1, 3, 0)^t$.
12. Разложить вектор $\vec{x} = (1, 1, -1)^t$ в ортогональную сумму $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \perp F$, где F — линейная оболочка векторов $\vec{f_1} = (1, 1, 0)^t$, $\vec{f_2} = (1, 0, 0)^t$.
13. Пусть E — евклидово пространство (комплексное или вещественное). Пусть $\|\cdot\|$ — норма, порожденная скалярным произведением. Проверить тождество $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
Задачи.
14. Пусть F — подпространство в $\mathbb{R}^3$, натянутое на векторы $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
а) Найдите какой-нибудь вектор $\vec{e}_3$ перпендикулярный F.
б) В базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ постройте матрицу изображающую оператор ортогонального проектирования на подпространство F.
в) Постройте матрицу перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
г) В базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ постройте изображающую матрицу оператора ортогонального проектирования на подпространство F.
15. Найти косинусы углов между прямой $x^1 = x^2 = \cdots = x^n$ и осями координат.
16. Найти длины диагоналей n-мерного куба $K_n := [0, 1]^n$.
17. Будет ли ортонормированным стандартный базис в $E = M^{n,n}(\mathbb{C})$, относительно скалярного произведения $(a, b) = \mathrm{Tr} ab^*$. Построить изоморфизм евклидовых пространств E и $\mathbb{C}^{n^2}$.
18. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Доказать, что а) $\vec{x} = \alpha\vec{y}$, где $\alpha > 0$, тогда и только тогда, когда угол между $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равен нулю; б) $\vec{x} = \alpha\vec{y}$, где $\alpha < 0$, тогда и только тогда, когда угол между $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равен π.
19. Пусть F — подпространство вещественного евклидова пространства E. Пусть $x \in E \setminus \{0\}$; $x \not\perp F$. Предположим, что $x = y + z$, где $y \in F$, $z \perp F$. Доказать, что из всех векторов подпространства F наименьший угол с x образует вектор y; при этом равенство $\cos\widehat{(x, y)} = \cos\widehat{(x, y')}$, где $0 \neq y' \in F$, выполняется тогда и только тогда, когда $y' = \alpha y$ с некоторым $\alpha > 0$.
20. В $\mathbb{R}^4$ найти угол между подпространствами F и G, где $F = \mathcal{L}\{f_1, f_2\}$, $G = \mathcal{L}\{g_1, g_2\}$, $f_1 = (1, 0, 0, 0)^t$, $f_2 = (0, 1, 0, 0)^t$, $g_1 = (1, 1, 1, 1)^t$, $g_2 = (2, -2, 5, 2)^2$.
21. Пусть F — подпространство евклидова пространства E (вещественного либо комплексного); $x \in E \setminus \{0\}$. Доказать, что минимальное значение величины $\|x - f\|$, $f \in F$, достигается на векторе $f_0 \in F$, удовлетворяющем условию $x - f \perp F$. *Замечание:* величина $\|x - f_0\|$ называется расстоянием от элемента x до подпространства F.
22. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти расстояние от точки $A(1, 2, -1, 1)$ до плоскости $L = \{\vec{f_0} + t_1\vec{f_1} + t_2\vec{f_2}\}$, $\vec{f_0} = (0, -1, 1, 1)^t$, $\vec{f_1} = (0, -3, -1, 5)^t$, $\vec{f_2} = (4, -1, -3, 3)^t$.
23. Пусть E — вещественное евклидово пространство тригонометрических полиномов степени не выше n (т.е. функций вида

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

с вещественными коэффициентами). Скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Показать, что функции $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt\}$ образуют ортонормированный базис в E.

24. Пусть E — комплексное евклидово пространство тригонометрических полиномов степени не выше n (т.е., функций вида

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikt}, \quad \text{где} \quad i \text{ — мнимая единица, т.е.} \quad i^2 = -1,$$

с комплексными коэффициентами). Скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Показать, что функции $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikt}\}_{k=-n}^{n}$ образуют ортонормированный базис в E.

Дополнительные задачи.

25. Пусть E — вещественное линейное пространство, $Q(x,y)$ — симметричная билинейная форма с индексом инерции $n_- = 0$. Показать, что выполнено неравенство $|Q(x,y)| \leqslant \sqrt{Q(x,x)}\,\sqrt{Q(y,y)}$, $x,y \in E$.

26. Проверить, что при дополнительном условии $n_0 = 0$ равенство в предыдущей задаче возможно лишь при условии, когда x,y линейно зависимы.

27. Пусть E — вещественное линейное пространство, $Q(x,y)$ — симметричная билинейная форма с индексом инерции $n_- = 0$. Показать, что выполнено неравенство $\sqrt{Q(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{Q(x,x)} + \sqrt{Q(y,y)}$, $x,y \in E$.

28. Проверить, что при дополнительном условии $n_0 = 0$ равенство в предыдущей задаче возможно только для векторов x,y, для которых выполнено условие $\alpha x = \beta y$, при некоторых неотрицательных числах α, β, одновременно не равных нулю.

29. Пусть E — комплексное линейное пространство, $Q(x,y)$ — эрмитова (т.е. $Q(x,y) = \overline{Q(y,x)}$ при всех $x,y \in E$) неотрицательно определенная (т.е. $Q(x,x) \geqslant 0$ при всех $x \in E$) полуторалинейная форма. Показать, что выполнено неравенство $|Q(x,y)| \leqslant \sqrt{Q(x,x)}\,\sqrt{Q(y,y)}$, $x,y \in E$.

30. Проверить, что для положительно определенной формы равенство в предыдущей задаче возможно лишь при условии x,y — линейно зависимы.

31. Пусть E — комплексное линейное пространство, $Q(x,y)$ — эрмитова неотрицательно определенная полуторалинейная форма. Показать, что выполнено «неравенство треугольника» $\sqrt{Q(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{Q(x,x)} + \sqrt{Q(y,y)}$, $x,y \in E$.

32. Проверить, что для положительно определенной формы равенство в предыдущей задаче возможно только для векторов x,y, для которых выполнено условие $\alpha x = \beta y$, при некоторых неотрицательных числах α, β, одновременно не равных нулю.

33. Пусть E — евклидово пространство (вещественное либо комплексное); $\{f_1, \ldots, f_p\}$ — ортонормированная система векторов в E. Доказать неравенство Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{p} |(x,f_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$, $x \in E$. Показать, что если $k = \dim E$, то неравенство превращается в равенство (Парсеваля).

34. Показать, что вещественное линейное пространство (2×2) комплексных самосопряженных матриц с нулевым следом со скалярным произведением $(a,b) = \mathrm{Tr} ab^*$ образует трехмерное вещественное евклидово пространство E. Найти изоморфизм евклидовых пространств E и $\mathbb{R}^3$, переводящий операцию $\frac{1}{i}[a,b]$ в E в векторное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$. Здесь i — мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.

35. Пусть E — комплексное евклидово пространство $M^{n,n}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(a,b) = \mathrm{Tr} ab^*$. Пусть $F = \{a \in E : \mathrm{Tr} a = 0\}$ — подпространство матриц с нулевым следом. Найти ортогональное дополнение $F^\perp$.

36. Пусть E — вещественное евклидово пространство $M^{n,n}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(a,b) = \mathrm{Tr} ab^t$. Пусть F — подпространство симметричных матриц. Найти ортогональное дополнение $F^\perp$.

37. Пусть в вещественном евклидовом пространстве $E = \Omega_n(\mathbb{R})$ скалярное произведение полиномов $P(t)$ и $Q(t)$ задано формулой $(P,Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Проверьте, что полиномы Лежандра, заданные формулами $P_0(t) = 1$, $\quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k]$, $\quad k = 1, \ldots, n$, образуют ортогональный базис в E.

38. Пусть в вещественном евклидовом пространстве $\Omega_n(\mathbb{R})$ скалярное произведение полиномов $P(t)$ и $Q(t)$ задано формулой $(P,Q)=\int\limits_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt$. Примените процесс ортогонализации к базису $\{1,x,\dots,x^n\}$.
39. Пусть в комплексном евклидовом пространстве $\Omega_n(\mathbb{C})$ скалярное произведение полиномов $P(t)$ и $Q(t)$ задано формулой $(P,Q)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(t)\overline{Q(t)}e^{-t^2}dt$. Примените процесс ортогонализации к базису $\{1,x,\dots,x^n\}$.
40. Пусть $E=\Omega_n(\mathbb{R})$ — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $(P,Q)=\int\limits_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt$. Для линейных функционалов $g^1(P)=\frac{d^k}{dx^k}P(a)$, $g^2(P)=\int\limits_{a}^{b}P(t)dt$, найти такие многочлены $Q_1,Q_2\in E$, что справедливы равенства $g^1(P)=(P,Q_1)$, $g^2(P)=(P,Q_2)$ при всех $P\in E$.
41. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы два вектора $\vec{a},\vec{b}$. Определим линейный функционал $l(\vec{c})=\det(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Найти вектор $\vec{f}\in\mathbb{R}^3$ удовлетворяющий условию $l(\vec{c})=(\vec{f},\vec{c})$ при всех $\vec{c}$. Здесь через $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ обозначена (3×3)-матрица со столбцами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
42. Пусть E — нормированное пространство (комплексное или вещественное). Проверить эквивалентность следующих трех утверждений

- $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ при всех $x,y\in E$;
- $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\leqslant 2\|x\|^2+2\|y\|^2$ при всех $x,y\in E$;
- $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\geqslant 2\|x\|^2+2\|y\|^2$ при всех $x,y\in E$.

Указание. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Пространство E называется нормированным, если на E задана числовая функция, каждому вектору $x\in E$ сопоставляющая число $\|x\|$, удовлетворяющая свойствам: а) при всех $x\in E$ справедливо неравенство $\|x\|\geqslant 0$; при этом равенство $\|x\|=0$ возможно лишь для $x=0$; б) при всех $x\in E$, $\alpha\in\mathbb{K}$ справедливо равенство $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$; при всех $x,y\in E$ верно неравенство $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. Число $\|x\|$ называется нормой (или длиной) вектора x.
43. Пусть E — вещественное нормированное пространство, норма которого удовлетворяет условию $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$. Проверить, что функция $(x,y)=4^{-1}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$ является скалярным произведением в E и порождает исходную норму.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 1076-1078, 1085-1088, 1090, 1091, 1094.
Задачи [5]**:** 1089, 1092, 1093, 1079-1083, 1108.

Тема №10. Линейные операторы в евклидовом пространстве

Ортогональные и унитарные преобразования. Диагонализация симметричных операторов в вещественном евклидовом пространстве ортогональным преобразованием. Диагонализация симметричных вещественных матриц ортогональным преобразованием. Диагонализация самосопряженных и унитарных операторов в комплексном евклидовом пространстве унитарным преобразованием. Диагонализация эрмитовых матриц и унитарных матриц унитарным преобразованием.

Упражнения.

1. Привести симметричные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ортогональным преобразованием подобия к диагональному виду.

2. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду самосопряженные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \ i \text{ — мнимая единица, т.е. } i^2 = -1.$$

Задачи.

3. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду ортогональные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду унитарную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \ i \text{ — мнимая единица, т.е. } i^2 = -1.$$

5. Привести унитарным преобразованием подобия к диагональному виду нормальную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ -7 & 5 & -4 \\ -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \ i \text{ — мнимая единица, т.е. } i^2 = -1.$$

Указание: матрица A называется нормальной, если она коммутирует с матрицей A^*; собственные векторы такой матрицы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны друг другу. Нормальная матрица обладает собственным ортонормированным базисом.

6. Найти оператор, сопряженный к оператору дифференцирования, в пространстве $\Omega_n(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(P, Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)\overline{Q(t)}dt$.

7. Пусть E — комплексное n-мерное линейное пространство; A — линейный оператор в E; $Q(x, y)$ — полуторалинейная положительно определенная эрмитова форма. Показать, что если $Q(Ax, x) = 0$ при любом $x \in E$, то A — нулевой оператор. Верно ли аналогичное утверждение, если E — вещественное n-мерное линейное пространство и $Q(x, y)$ — билинейная положительно определенная симметричная форма?

8. В комплексном евклидовом пространстве $E = M^{n,n}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(a, b) = \mathrm{Tr} ab^*$ задан оператор умножения на матрицу $u \in M^{n,n}(\mathbb{C})$: $Aa = u \cdot a$, $a \in E$. Найти сопряженный оператор.

9. Доказать следующие свойства комплексного евклидова пространства $E = M^{n,n}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(a, b) = \mathrm{Tr}ab^*$: а) всякая унитарная матрица имеет норму $\sqrt{n}$; б) линейный оператор A в E, заданный умножением на унитарную матрицу u: $Aa = ua$, $a \in E$, является унитарным оператором.

10. Проверить, что оператор $\frac{d^2}{dt^2}$ симметричен в вещественном евклидовом пространстве тригонометрических многочленов степени не выше n (см. задачу 23 темы №9) со скалярным произведением $(f, g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Показать, что система функций

$$\{1/\sqrt{2}, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt\}$$

образует собственный ортонормированный базис для оператора $\frac{d^2}{dt^2}$.

Дополнительные задачи.

11. Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Показать, что существует такой самосопряженный неотрицательный оператор B, что выполнено $B^2 = A$. Доказать, что B положителен тогда и только тогда, когда A положителен.

12. Единственно ли решение предыдущей задачи?

13. Для линейного оператора A в комплексном евклидовом пространстве E доказать, что оператор A^*A неотрицателен. При этом A^*A положителен тогда и только тогда, когда A обратим.

14. Пусть A — самосопряженный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Показать, что следующие свойства эквивалентны: а) $\sigma(A) \subset [\alpha, \beta]$; б) оператор $A - \lambda I$ отрицателен при $\lambda > \beta$ и положителен при $\lambda < \alpha$.

15. Пусть A — линейный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Показать, что оператор A допускает разложение $A = BU$, где B — неотрицательный самосопряженный оператор в E, U — унитарный оператор в E (это разложение называется *полярным*).

16. Показать, что в разложении из предыдущей задачи оператор B однозначно определяется по оператору A. Найдите оператор B.

17. Пусть A и B — положительные самосопряженные операторы в комплексном евклидовом пространстве E и выполнено равенство $A = BC$, где C — унитарный оператор. Показать, что C — единичный.

18. Пусть A и B — неотрицательные самосопряженные операторы в комплексном евклидовом пространстве E, причем B обратим. Показать, что собственные значения оператора AB неотрицательны.

19. Пусть A и B —самосопряженные операторы в комплексном евклидовом пространстве E, причем A положителен. Показать, что собственные значения оператора AB вещественны, а сам оператор AB диагонализуем.

20. Пусть A — самосопряженный оператор в комплексном евклидовом пространстве E. Доказать следующие свойства: а) оператор $A - iI$ обратим; б) оператор $B = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ унитарен; в) оператор $B - I$ обратим; г) выполнено равенство $A = i(B - I)^{-1}(B + I)$.

21. Матрица $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ поворачивает все радиус-векторы на угол φ вокруг некоторой оси. Найдите прямую, вокруг которой происходит поворот. **Указания:** а) искомая прямая, очевидно, проходит через начало координат; б) как должна действовать матрица A на радиус-вектор, лежащий на искомой прямой?

22. Матрица $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ поворачивает все радиус-векторы на некоторый угол φ вокруг некоторой оси. Найдите прямую, вокруг которой происходит поворот и угол φ.

23. Пусть A — вещественная ортогональная (3×3)-матрица с единичным определителем. Показать, что A есть матрица поворота вокруг некоторой оси. *Указание:* здесь полезно познакомиться с задачами 14, 15, 18 темы 9 пособия [1].

24. Пусть заданы базисы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{g_1, \ldots, g_n\}$ в евклидовом пространстве E (вещественном или комплексном). Показать, что для существования изометрического (или унитарного) оператора, переводящего e_i в g_i, $i = 1, \ldots, n$, необходимо и достаточно, чтобы метрические тензоры этих базисов ($\{(e_i, e_j)\}_{i,j=1}^n$ и $\{(g_i, g_j)\}_{i,j=1}^n$) совпадали.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 1032(a,d,g) (диагонализовать ортогональным преобразованием).
Задачи [5]**:** 1112, 1114–1117.
Дополнительные задачи [5]**:** 1141, 1148–1150.

Тема №11. Приведение билинейной и квадратичной форм к каноническому виду ортогональным преобразованием

Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием; приведение билинейной формы к сумме одноименных произведений ортогональным преоюразованием.

Упражнения.
1. Привести квадратичные формы

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2;\quad 2x_1x_2 + x_2^2;\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;\quad 4x_1x_2 - x_2^2;$$
$$x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2;\quad 9x_1^2 + 6x_2^2 + 26x_3^2 - 4x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3;$$
$$x_1^2 + 4x_2^2 - 24x_3^2 + 4x_1x_2 - 24x_1x_3 + 12x_2x_3;\quad 9x_1^2 + 9x_2^2 + 17x_3^2 - 2x_1x_2 + 14x_1x_3 - 14x_2x_3;$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 15x_3^2 + 14x_1x_2 - 18x_1x_3 + 18x_2x_3;\quad 11x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 14x_1x_3 - 2x_2x_3;$$
$$-7x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 - 2x_1x_2 + 22x_1x_3 - 2x_2x_3;\quad 6x_1^2 + 6x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$$
$$4x_1^2 + 4x_2^2 - 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 12x_2x_3.$$

к сумме квадратов при помощи ортогонального преобразования.
Задачи.
2. Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием симметричную билинейную форму

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 535.
Задачи [5]**:** 536, 537.

Тема №12. Анализ уравнения второго порядка на плоскости и в пространстве; классификация поверхностей второго порядка

Приведение уравнения второго порядка на плоскости и в пространстве к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования и сдвига, при помощи метода Лагранжа и сдвига.

Упражнения.
1. Привести уравнение
$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + x - z = 1$$
к каноническому виду методом Лагранжа (выделением полных квадратов) и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.
2. Привести уравнение
$$xy - x - y = 1$$
к каноническому виду методом Лагранжа (выделением полных квадратов) и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.
3. Привести уравнение
$$xy + yz + 2x - z = 2$$
к каноническому виду методом Лагранжа (выделением полных квадратов) и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.
4. Привести уравнение
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y - 2x + z + 1 = 0$$
к каноническому виду методом Лагранжа (выделением полных квадратов) и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.
5. Привести уравнение
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y - 2x + z + 1 = 0$$
к каноническому виду ортогональным преобразованием координат и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.
6. Привести уравнение
$$4xy - y^2 = 0$$
к каноническому виду ортогональным преобразованием координат и сдвигом. Определить, какого типа кривую задает уравнение.
7. Привести уравнение
$$4xy + y^2 + 4yz + 2z^2 - 4x - 2y - 5 = 0$$
к каноническому виду ортогональным преобразованием координат и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения [5]**:** 545; [4]**:** 993-998.

Тема №13. Приведение матриц к канонической жордановой форме. Вычисление функций от оператора

Приведение к канонической форме Жордана, вычисление функций от оператора, применение к системам дифференциальных уравнений.

Упражнения.

1. Привести матрицы к жордановой форме (а также выписать жорданов базис из собственных и присоединенных векторов):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 & 11 \\ 2 & 3 & -6 & 13 \\ 2 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & 7 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задачи.

2. Вычислить $\sin A$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; вычислить e^A для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; вычислить $\cos A$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Решить задачу Коши: найти $\vec{x}(t) \in \mathbb{C}^2$, $t \in \mathbb{R}$: $\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{x}$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$; где

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дополнительные задачи.

4. В пространстве многочленов с комплексными коэффициентами степени не выше $m \in \mathbb{N}$ для оператора $A = \frac{d}{dx}$ найти жорданов базис. Решить задачу Коши: $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = AP, \\ P\,|_{t=0} = x + x^m. \end{cases}$

5. Решить предыдущую задачу с оператором Чезаро A, заданным равенством $AP(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x P(s)ds$.

6. Пусть E — n-мерное комплексное линейное пространство; $A \in \Lambda(E)$ таков, что $A^m = I$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Показать, что оператор A — диагонализуем. *Указание:* предположите, что у оператора A есть присоединенный вектор и придите к противоречию.

Задания для самостоятельного решения

Упражнения.

1. Привести матрицы к жордановой форме (а также выписать жорданов базис из собственных и присоединенных векторов):

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & -6 & -11 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ 5 & -7 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 & 15 \\ -3 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

[5]**:** 1047 (c,d,e,h,i,j,k,o).

Тема №14. Контрольная работа

Линейные и билинейные формы, евклидово пространство, самосопряженные и унитарные операторы в евклидовом пространстве, уравнения второго порядка.

1. Найти $(\vec{x}, \vec{y})$, $\|\vec{x}\|$, $\|\vec{y}\|$ для векторов $\vec{x} = (-1-i, 1, -i)^t$, $\vec{y} = (2-3i, 3, 3+i)^t$, где i — мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.

2. Ортогонализовать и нормировать базис $\vec{f_1} := (1,1,-1)^t$, $\vec{f_2} := (1,-1,1)^t$, $\vec{f_3} := (-1,1,1)^t$.

3. Разложить вектор $\vec{x} = (1,1,1)^t$ в ортогональную сумму $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \perp F$, где F — линейная оболочка векторов $\vec{f_1} = (1,1,-1)^t$, $\vec{f_2} = (1,-1,1)^t$.

4. Привести уравнение

$$(x+1)(y+1)(z+1) - xyz = 0$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием координат и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.

5. Привести уравнение

$$2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yz + 2x - 6z + 1 = 0$$

к каноническому виду методом Лагранжа (выделением полных квадратов) и сдвигом. Определить, какого типа поверхность задает уравнение.

Список литературы

[1] С.Б.Левин, В.А.Слоущ, Н.В.Смородина, М.М.Фаддеев. Задачи и упражнения по высшей алгебре. Первый семестр — СПб.: СПбГУ, 2013. – 30с.

[2] А.Г.Аленицын. Методическое указание к практическим занятиям по курсу "Высшая математика". Алгебра, I курс. Часть I. Л., 1984.

[3] А.Г.Аленицын. Учебные задания к практическим занятиям по курсу "Высшая математика"для групп ЦИПС. Алгебра I курс. Часть II. Л., 1988.

[4] О.Н. Цубербиллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 31-е изд., стер. – СПб.: издательство "Лань", 2003. – 336с.

[5] Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. Задачи по высшей алгебре 13е изд., 1999 – 286 с.

[6] М.А.Лялинов. Программа и задачи по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии в основном потоке. СПб., 2007.

[7] Т.А.Суслина. Высшая алгебра. Задачи к коллоквиуму во втором семестре (усиленный поток). СПб., 2007.

[8] Т.А.Суслина. Высшая алгебра. Задачи к экзамену во втором семестре (усиленный поток). СПб., 2007.

[9] В.А.Слоущ. Высшая алгебра. Задачи с решениями для коллоквиумов и экзаменов. Базовый поток. II семестр. СПб., 2007.

[10] М.А.Муратов, В.Л.Островский, Ю.С.Самойленко. Конечномерный линейный анализ I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L). Киев "Центр учебной литературы", 2011. – 153 с.