

Вопросы для коллоквиумов и экзаменов по дисциплине "Высшая алгебра"
(базовый курс)

Вопросы для осеннего коллоквиума

1. Векторная алгебра

- 1.1. Понятие вектора. Длина вектора.
- 1.2. Линейные операции над векторами (сложение, умножение на число), их свойства.
- 1.3. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Критерий коллинеарности и компланарности.
- 1.4. Базисы на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Координаты вектора.
- 1.5. Прямоугольные декартовы системы координат.
- 1.6. Скалярное произведение векторов, его свойства.
- 1.7. Формулы для скалярного произведения векторов и косинуса угла между векторами в декартовых координатах.
- 1.8. Определители второго и третьего порядка.
- 1.9. Понятие ориентации. Правые и левые тройки векторов, правые и левые системы координат.
- 1.10. Векторное произведение, его свойства. Площадь параллелограмма, "натянутого" на пару векторов.
- 1.11. Смешанное произведение. Объем параллелепипеда "натянутого" на три вектора.
- 1.12. Выражение векторного и смешанного произведения в декартовых координатах.
- 1.13. Двойное векторное произведение.

2. Прямая на плоскости

- 2.1. Общее уравнение прямой на плоскости.
- 2.2. Уравнение прямой в отрезках на осях. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку.
- 2.3. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
- 2.4. Расстояние от точки до прямой.
- 2.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
- 2.6. Взаиморасположение двух прямых на плоскости.
- 2.7. Каноническое уравнение и параметрические уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

3. Прямая и плоскость в пространстве

- 3.1. Общее уравнение плоскости в пространстве. Уравнение связки плоскостей, проходящих через заданную точку.
- 3.2. Уравнение плоскости в отрезках на осях. Нормальное уравнение плоскости.
- 3.3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
- 3.4. Взаиморасположение двух плоскостей.
- 3.5. Общие уравнения прямой в пространстве.
- 3.6. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
- 3.7. Взаиморасположение двух прямых в пространстве.
- 3.8. Взаиморасположение прямой и плоскости.

Вопросы для экзамена зимней сессии

4. Кривые второго порядка на плоскости

- 4.1. Определение и каноническое уравнение эллипса.
- 4.2. Свойства эллипса. Эксцентриситет эллипса.
- 4.3. Касательные к эллипсу. Оптическое свойство эллипса (без доказательства).
- 4.4. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
- 4.5. Свойства гиперболы. Эксцентриситет гиперболы.
- 4.6. Асимптоты гиперболы.
- 4.7. Касательная к гиперболы. Оптическое свойство гиперболы (без доказательства).
- 4.8. Определение и каноническое уравнение параболы.
- 4.9. Свойства параболы. Касательные к параболы. Оптическое свойство параболы (без доказательства).

- 4.10. Полярные координаты на плоскости. Связь полярных и декартовых координат.
 4.11. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах.

5. Алгебра матриц

- 5.1. Понятие матрицы. Примеры.
 5.2. Линейные операции над матрицами, их свойства.
 5.3. Транспонирование и сопряжение матриц.
 5.4. Умножение матриц. Правило "строка на столбец". Некоммутативность умножения.
 5.5. Свойства произведения матриц.
 5.6. Класс квадратных матриц. Единичная матрица.
 5.7. След квадратной матрицы, его свойства.
 5.8. Определение и свойства обратной матрицы.
 5.9. Пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n векторов-столбцов. Стандартный базис в пространствах \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n и координаты вектора в стандартном базисе.
 5.10. Действие матриц на n -мерные векторы-столбцы.
 5.11. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений.
 5.12. Перестановки, их свойства.
 5.13. Определитель квадратной матрицы. Определение, примеры.
 5.14. Свойства определителей.
 5.15. Алгебраические дополнения. Миноры. Разложение определителя по строке (столбцу).
 5.16. Вычисление определителя треугольной матрицы. Вычисление определителя методом Гаусса.
 5.17. Теорема об определителе произведения (без доказательства).
 5.18. Неособые квадратные матрицы. Построение обратной матрицы.

6. Системы линейных алгебраических уравнений

- 6.1. Линейные системы с неособой квадратной матрицей коэффициентов. Формулы Крамера.
 6.2. Расширенная матрица системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса в случае системы с неособой квадратной матрицей коэффициентов.
 6.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса.
 6.4. Линейная зависимость столбцов и строк.
 6.5. Миноры прямоугольной матрицы. Три определения ранга матрицы.
 6.6. Теорема о ранге (без доказательства).
 6.7. Вычисление ранга матрицы.
 6.8. Общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.
 6.9. Критерий существования нетривиального решения однородной системы (без доказательства).
 6.10. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий разрешимости неоднородной системы при любой правой части. (Без доказательства).
 6.11. Альтернатива Фредгольма для систем с квадратной матрицей.
 6.11. Описание метода Гаусса в случае общих систем линейных алгебраических уравнений.

Вопросы для весеннего коллоквиума

1. Системы линейных алгебраических уравнений (повторение)

- 1.1. Общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.
 1.2. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений. Критерий существования нетривиального решения однородной системы.
 1.3. Структура общего решения однородной системы. Фундаментальная система решений однородной системы.
 1.4. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий существования решения неоднородной системы при любой правой части.
 1.5. Структура общего решения неоднородной системы.
 1.6. Альтернатива Фредгольма для систем с квадратной матрицей.

2. Координатное пространство

- 2.1. Определение и основные свойства координатного пространства.
 2.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов координатного пространства.

- 2.3. Базис в координатном пространстве. Координаты вектора в базисе.
- 2.4. Теорема о длине базиса в координатном пространстве.
- 2.5. Подпространство координатного пространства.
- 2.6. Базис и размерность подпространства.
- 2.7. Линейная оболочка системы векторов.
- 2.8. Пересечение и линейная сумма подпространств.
- 2.9. Теорема о размерности линейной суммы подпространств (без доказательства).
- 2.10. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений.
- 2.11. Прямая сумма подпространств.
- 2.12. Прямое дополнение подпространства.

Вопросы для экзамена летней сессии

3. Линейные операторы в координатном пространстве

- 3.1. Действие матриц из $M^{mn}(\mathbb{K})$ на векторы из \mathbb{K}^n . Понятие линейного оператора из \mathbb{K}^n в \mathbb{K}^m .
- 3.2. Образ и ранг линейного оператора. Ядро линейного оператора.
- 3.3. Характеристический многочлен квадратной матрицы.
- 3.4. Собственные числа квадратной матрицы.
- 3.5. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^n . Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^n .
- 3.6. Собственные числа, собственные векторы и собственные подпространства оператора, действующего из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n . Алгебраическая и геометрическая кратности собственных чисел оператора из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .
- 3.7. Критерий существования собственного базиса у оператора, действующего из \mathbb{K}^n в \mathbb{K}^n .
- 3.8. Подобие матриц. Инварианты подобия.
- 3.9. Диагональные матрицы. Диагонализуемые матрицы. Диагонализация матриц в классе вещественных матриц и в классе комплексных матриц.

4. Стандартное скалярное произведение в координатном пространстве

- 4.1. Определение и основные свойства стандартного скалярного произведения в \mathbb{R}^n .
- 4.2. Норма вектора в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
- 4.3. Ортогональность векторов в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.
- 4.4. Определение и основные свойства стандартного скалярного произведения в \mathbb{C}^n .
- 4.5. Норма вектора в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Неравенства треугольника и неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
- 4.6. Ортогональность векторов в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация по Шмидту.
- 4.8. Ортогональная сумма подпространств в стандартном евклидовом пространстве.
- 4.9. Ортогональное дополнение подпространства в стандартном евклидовом пространстве.
- 4.10. Транспонирование линейного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве.
- 4.11. Теорема об образе оператора и ядре транспонированного оператора в стандартном вещественном евклидовом пространстве.
- 4.12. Ортогональные матрицы. Изометрические операторы в стандартном вещественном евклидовом пространстве.
- 4.13. Матрица поворота на плоскости.
- 4.14. Матрица поворота в пространстве.
- 4.15. Симметричные операторы в стандартном вещественном евклидовом пространстве. Теорема о собственном базисе. Диагонализация вещественной симметричной матрицы.
- 4.16. Сопряжение линейного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве.
- 4.17. Теорема об образе оператора и ядре сопряженного оператора в стандартном комплексном евклидовом пространстве.

- 4.18 Унитарные матрицы. Унитарные операторы в стандартном комплексном евклидовом пространстве.
- 4.19. Самосопряженные и унитарные операторы в стандартном комплексном евклидовом пространстве. Теорема о собственном базисе. Диагонализация самосопряженной и унитарной матриц. Случай вещественной ортогональной матрицы.

5. Квадратичные формы

- 5.1. Понятие квадратичной формы.
- 5.2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием.
- 5.3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа.
- 5.4. Закон инерции квадратичных форм.
- 5.5. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя переменными.
- 5.6. Поверхности второго порядка.
- 5.7. Схема приведения к каноническому виду уравнения второго порядка с тремя переменными.