

Список вопросов к экзамену по функциональному анализу

1. Метрическое пространство: основные свойства, примеры. Сходимость в метрическом пространстве; открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве; непрерывность; полнота метрического пространства.
2. Определение и примеры топологического пространства. Основные понятия.
3. Хаусдорфовы, регулярные и нормальные топологические пространства.
4. Сходимость и непрерывность в топологическом пространстве.
5. Определение и примеры нормированного пространства. Банахово пространство.
6. Линейные оболочки в нормированном пространстве. Фактор-пространство.
7. Пространства последовательностей s, l_∞, c_0, c .
8. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского для последовательностей. Пространства $l_p, p \in [1, +\infty)$.
9. Пространство ограниченных функций. Пространство ограниченных и непрерывных функций.
10. Пространство дифференцируемых функций. Класс Шварца.
11. Пространство голоморфных функций.
12. Измеримые функции: определение, примеры, простейшие свойства.
13. Пространство измеримых функций $S(\mathcal{X}, d\rho)$: определение, простейшие свойства, метрика, сходимость, полнота.
14. Пространство $L_\infty(\mathcal{X}, d\rho)$.
15. Интегральные неравенства Гельдера и Минковского, пространство $L_p(\mathcal{X}, d\rho), p \in [1, +\infty)$.
16. Сепарабельность абстрактного метрического пространства (определение, признаки).
17. Сепарабельность пространств \mathbb{K}^d, c_0, c и $l_p, p \in [1, +\infty)$. Сепарабельность $C[a, b]$. Несепарабельность пространства l_∞ .
18. Сепарабельность пространства $L_p, p \in [1, +\infty)$; несепарабельность пространства $L_\infty(0, 1)$.
19. Плотность $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.
20. Изоморфность метрических и нормированных пространств. Пополнение метрического и нормированного пространств (определение и единственность).
21. Существование пополнения метрического пространства.
22. Существование пополнения нормированного пространства.
23. Лемма о вложенных шарах.
24. Теорема Бэра-Хаусдорфа.
25. Бикомпактность и секвенциальная компактность в топологическом пространстве.
26. Бикомпактность и секвенциальная компактность в метрическом пространстве.
27. Прекомпактность в метрических пространствах. Теорема Хаусдорфа.
28. Прекомпактность в банаховых пространствах. Лемма о почти перпендикуляре. Непрекомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.
29. Простейшие признаки прекомпактности в абстрактном метрическом пространстве.
30. Прекомпактность в c_0, c, l_p (теоремы типа Арцела).
31. Прекомпактность в $C[a, b]$ (теорема Арцела-Асколи).
32. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах. Пространство $\mathcal{L}(E, F)$.
33. Банаховость пространства $\mathcal{L}(E, F)$.
34. Распространение линейного ограниченного оператора по непрерывности.
35. Оператор умножения на функцию.
36. «Правильные» интегральные операторы. Лемма Шура. Операторы Гильберта-Шмидта.
37. Преобразование Фурье.
38. Принцип равномерной ограниченности (первый принцип функционального анализа).
39. Сильная сходимость. Теорема Банаха-Штейнгауза.
40. Оператор сдвига в $L_p(\mathbb{R}^d), p \in [1, +\infty]$.
41. Оператор сдвига в $L_p(\Omega), p \in [1, +\infty]$.
42. Ядро усреднения. Оператор усреднения.
43. Прекомпактность в L_p .
44. Компактные операторы в нормированных пространствах.
45. Примеры компактных операторов.
46. Обратный оператор; ряд Неймана.
47. Принцип открытости отображения. Второй принцип функционального анализа.
48. График оператора. Теорема о замкнутом графике. Замкнутый оператор.

49. Регулярные точки замкнутого оператора. Резольвента замкнутого оператора. Спектр замкнутого оператора.
50. Аксиома выбора. Частично упорядоченные множества. Теорема о неподвижной точке.
51. Теорема Хаусдорфа. Лемма Цорна.
52. Теорема Хана-Банаха вещественный случай ($\dim E/E_0 = 1$).
53. Теорема Хана-Банаха вещественный случай (произвольные E, E_0).
54. Теорема Хана-Банаха комплексный случай ($\dim E/E_0 = 1$).
55. Теорема Хана-Банаха комплексный случай (произвольные E, E_0).
56. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве (как в вещественном, так и в комплексном случае). Следствия. Двойственное пространство.
57. Двойственные пространства: $c'_0, c', l'_p, p \in [1, +\infty)$.
58. Вариация функции, простейшие свойства вариации.
59. Интеграл Римана-Стилтьеса.
60. Теорема Рисса; C' .
61. Пространство двойственное к $L_p(\mathcal{X}, d\rho), p \in [1, +\infty)$.
62. Пространство двойственное к пространству $S(\mathcal{X}, d\rho)$ в «специальном» случае.
63. Второе двойственное пространство. Каноническое вложение. Рефлексивные пространства.
64. Примеры рефлексивных и нерефлексивных пространств.
65. Слабая сходимость.
66. *-слабая сходимость. Теорема Банаха-Алаоглу.
67. Пример «слабой неполноты». Нерефлексивность $C[a, b]$.