САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ "ОБРАЗОВАНИЕ"

Проект "Инновационная образовательная среда в классическом университете"

Пилотный проект №22 «Разработка и внедрение инновационной образовательной программы «Прикладные математика и физика»»

Физический факультет

Кафедра высшей математики и математической физики

Т. А. Суслина

Высшая алгебра. Задачи к экзамену в первом семестре (усиленный поток)

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007 г.

- Рецензент: д. ф. м. н., профессор М. Ш. Бирман

- Печатается по решению методической комиссии физического факультета СПбГУ.

- Рекомендовано Ученым советом физического факультета СПбГУ.

Высшая алгебра. Задачи к экзамену в первом семестре (усиленный поток). — СПб., 2007

В учебно-методическом пособии содержится материал к экзамену по курсу "Высшая алгебра" в первом семестре для студентов, обучающихся в усиленном потоке. Приведен список теоретических вопросов к экзамену и набор типовых задач, предлагаемых студентам на экзамене, с образцами решений и комментариями.
Пособие предназначено для студентов 1-го курса.

Высшая алгебра.
Задачи к экзамену в первом семестре
(усиленный поток)

Материал, который выносится на экзамен по курсу "Высшая алгебра" в первом семестре, содержит разделы "Матрицы", "Определители", "Системы линейных алгебраических уравнений". Теоретическому изложению указанных разделов посвящены пособия [1,2]. Раздел "Аналитическая геометрия", также входящий в программу курса в первом семестре, выносится на коллоквиум. (Вопросы и задачи к коллоквиуму можно найти в пособии [3]).

Предлагаемое пособие содержит набор типовых задач, предлагаемых студентам на экзамене, с образцами решений и комментариями. Задачи разделены по темам. При этом нумерация задач — сквозная. Задачи имеют разный уровень сложности. В скобках указана сложность задачи по десятибальной шкале.

Вначале приведен список теоретических вопросов, которые выносятся на экзамен.

Ниже через M^n обозначается класс квадратных $(n \times n)$-матриц. Символ I означает единичную матрицу класса M^n. Используем обозначение $[A, B] := AB - BA$ для коммутатора матриц $A, B \in M^n$ и обозначение $\{A, B\} = AB + BA$ для антикоммутатора. Через A^t обозначим транспонированную матрицу для A, а через A^* — эрмитово сопряженную матрицу. Используем обозначения $\det A$ для определителя и $\operatorname{rank} A = r_A$ для ранга матрицы A.

Вопросы к экзамену

1. Матрицы и действия над ними: линейные действия, транспонирование, сопряжение, умножение матриц.
2. Квадратные матрицы. Треугольные матрицы; диагональные матрицы. След и его свойства.
3. Одностолбцовые матрицы. Координатные пространства. Линейные отображения.
4. Перестановки и подстановки.
5. Определители: определение и свойства.
6. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу).

7. Теорема об определителе произведения квадратных матриц.
8. Неособые квадратные матрицы. Обратная матрица.
9. Линейные системы с неособой квадратной матрицей коэффициентов. Формулы Крамера.
10. Метод Гаусса.
11. Характеристический многочлен и спектр квадратной матрицы.
12. Функции от квадратных матриц.
13. Тождество Кэли.
14. Подобие матриц. Диагонализуемые матрицы.
15. Специальные классы квадратных матриц: симметричные, кососимметричные, эрмитовы матрицы.
16. Ортогональные и унитарные матрицы. Группы матриц.
17. Три определения ранга прямоугольной матрицы. Теорема о ранге (формулировка) и ее следствия.
18. Доказательство теоремы о ранге.
19. Общие свойства систем линейных алгебраических уравнений.
20. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Критерий существования нетривиального решения. Структура общего решения. Фундаментальная система решений.
21. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений. Критерий существования решения (теорема Кронекера-Капелли). Условия разрешимости. Структура общего решения.
22. Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Альтернатива Фредгольма.

Задачи к экзамену

Тема 1. Матрицы и действия над ними

Задача 1. (6 баллов). Найдите все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.

Задача 2. (6 баллов). Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

Задача 3. (7 баллов). Докажите, что для коммутирующих матриц $A, B \in M^n$ справедлива формула "бинома Ньютона"

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j A^j B^{m-j}, \quad \text{где} \quad C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Задача 4. (5 баллов). Пусть $A, B \in M^n$ и $[A, B] = \alpha I$. Докажите, что тогда $\alpha = 0$.

Задача 5. (7 баллов). Докажите следующее утверждение: для того, чтобы матрица $A \in M^n$ коммутировала со всеми диагональными матрицами, необходимо и достаточно, чтобы матрица A сама была диагональной.

Задача 6. (7 баллов). Докажите следующее утверждение: если $A \in M^n$ — диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица $B \in M^n$, коммутирующая с A, тоже диагональна.

Задача 7. (10 баллов). Докажите, что матрица $A \in M^n$, коммутирующая с любой матрицей $B \in M^n$, кратна единичной.

Задача 8. (10 баллов). Рассматриваются матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Проверьте, что $\{\sigma_j, \sigma_l\} = 2\delta_{jl} I$. б) Докажите, что не существует матрицы $\sigma \in M^2$ со следующими свойствами:

$$\sigma = \sigma^*, \quad \sigma^2 = I, \quad \{\sigma, \sigma_j\} = 0, \; j = 1, 2, 3.$$

Тема 2. Определители

Задача 9. (5 баллов). Как изменится определитель порядка n, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

Задача 10. (6 баллов). Как изменится определитель, если каждый элемент a_{ik} матрицы умножить на γ^{i-k} (где $\gamma > 0$)?

Задача 11. (9 баллов). Вычислите определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Тема 3. Обратная матрица

Задача 12. (9 баллов). Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:

а) переставить i-ю и j-ю строки?

б) i-ую строку умножить на число $c \neq 0$?

в) к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на число c?

Задача 13. (8 баллов). Пусть $A \in M^n$ — обратимая матрица с целочисленными элементами. Докажите, что A^{-1} — также целочисленная матрица тогда и только тогда, когда матрица A унимодулярна (то есть $\det A = \pm 1$).

Тема 4. Функции от матриц. Тождество Кэли

Задача 14. (8 баллов). Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти e^A.

Задача 15. (8 баллов). Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $\sin A$.

Задача 16. (9 баллов). Дана $(n \times n)$-матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Найти e^A.

Задача 17. (9 баллов). Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти A^{20}.

Тема 5. Специальные классы матриц

Задача 18. (5 баллов). Докажите, что определитель эрмитовой матрицы есть вещественное число.

Задача 19. (5 баллов). Показать, что произведение двух кососимметричных матриц A и B тогда и только тогда будет симметричной матрицей, когда A и B коммутируют.

Задача 20. (5 баллов). Показать, что произведение двух кососимметричных матриц A и B тогда и только тогда будет кососимметричной матрицей, когда A и B антикоммутируют.

Задача 21. (7 баллов). Доказать, что для ортогональности квадратной матрицы A необходимо и достаточно, чтобы $\det A = \pm 1$ и каждый элемент a_{ij} был равен своему алгебраическому дополнению A_{ij}, взятому со знаком " $+$ ", если $\det A = 1$, и со знаком " $-$ ", если $\det A = -1$.

Тема 6. Ранг матрицы. Линейная зависимость векторов в $\mathbb{R}^n$

Задача 22. (7 баллов). Чему равен ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

при различных значениях $\lambda \in \mathbb{C}$?

Задача 23. (7 баллов). Чему равен ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

при различных значениях $\lambda \in \mathbb{C}$?

Задача 24. (6 баллов). Доказать, что если три ненулевых вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы и вектор $\mathbf{a}_3$ не выражается линейно через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, то векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ различаются лишь числовым множителем.

Задача 25. (8 баллов). Найти все значения λ, при которых вектор $\mathbf{b} = (7, -2, \lambda)$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -6, 1)$.

Задача 26. (9 баллов). Докажите, что ранг произведения (прямоугольных) матриц не превосходит ранга каждой матрицы-сомножителя.

Тема 7. Системы линейных алгебраических уравнений

Задача 27. (6 баллов). Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\left.\begin{array}{rrrl} (1+\lambda)x_1 + & x_2 + & x_3 & = 1 \\ x_1 + & (1+\lambda)x_2 + & x_3 & = \lambda \\ x_1 + & x_2 + & (1+\lambda)x_3 & = \lambda^2 \end{array}\right\}$$

Задача 28. (6 баллов). Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\left.\begin{array}{rrrl} (1+\lambda)x_1 + & x_2 + & x_3 & = \lambda^2 + 3\lambda \\ x_1 + & (1+\lambda)x_2 + & x_3 & = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x_1 + & x_2 + & (1+\lambda)x_3 & = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{array}\right\}$$

Задача 29. (5 баллов). Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы а) сумма двух решений системы линейных уравнений была бы снова решением; б) произведение решения на число $\lambda \neq 1$ было бы снова решением.

Задача 30. (6 баллов). При каких условиях данная линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений снова будет решением этой системы?

Задача 31. (7 баллов). Найти условия разрешимости в неоднородной системе

$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 + & x_2 - & 3x_3 & = f_1 \\ 2x_1 + & x_2 - & 2x_3 & = f_2 \\ x_1 + & x_2 + & x_3 & = f_3 \\ x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 & = f_4 \end{array}\right\}$$

Задача 32. (7 баллов). Найти условия разрешимости в неоднородной системе

$$\left.\begin{array}{rrrrl} 5x_1 - & 3x_2 + & 2x_3 + & 4x_4 & = f_1 \\ 2x_1 - & x_2 + & 3x_3 + & 5x_4 & = f_2 \\ 4x_1 - & 3x_2 - & 5x_3 - & 7x_4 & = f_3 \\ x_1 + & & 7x_3 + & 11x_4 & = f_4 \end{array}\right\}$$

Задача 33. (8 баллов). Доказать, что для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными при $m = n+1$ была совместной, необходимо (но не достаточно), чтобы определитель матрицы $(n+1)$-го порядка, составленной из всех коэффициентов при неизвестных и из свободных членов, был равен нулю. Показать, что это условие будет также достаточным, если $r_A = n$ (где r_A — ранг матрицы системы).

Образцы решений

Решение задачи 7. По условию, матрица A коммутирует с любой матрицей B. В качестве матриц B будем перебирать матрицы, все элементы которых равны нулю, кроме одного элемента, который равен единице (такие матрицы называют "матричными единицами"). Пусть сначала элемент 1 стоит в матрице B на диагонали на k-ом месте. Тогда, по правилу "строка на столбец" получаем:

$$[AB]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } j \neq k \\ a_{ik}, \text{ если } j = k \end{array} \right. ,$$

$$[BA]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } i \neq k \\ a_{kj}, \text{ если } i = k \end{array} \right. .$$

По условию выполнено $[AB]_{ij} = [BA]_{ij}$. Отсюда следует, что $a_{ik} = 0$, если $i \neq k$. Перебирая все такие матрицы B, получаем, что все недиагональные элементы матрицы A равны нулю. Таким образом, мы доказали, что матрица A диагональна.

Пусть теперь элемент 1 стоит в матрице B в k-ой строке и m-ом столбце, причем $k \neq m$. С учетом того, что матрица A диагональна, имеем:

$$[AB]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} = a_{ii} b_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } (i,j) \neq (k,m) \\ a_{ii}, \text{ если } (i,j) = (k,m) \end{array} \right. ,$$

$$[BA]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj} = b_{ij} a_{jj} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i,j) \neq (k,m) \\ a_{jj}, & \text{если } (i,j) = (k,m) \end{cases}.$$

По условию выполнено $[AB]_{ij} = [BA]_{ij}$. При $(i,j) = (k,m)$ отсюда следует, что $a_{kk} = a_{mm}$. Перебирая все такие матрицы B, получаем, что все диагональные элементы матрицы A равны между собой. Тогда матрица A кратна единичной матрице.

Комментарий к задаче 8. Решение задачи 8 о матрицах Паули можно найти в пособии [1], см. §2, п. 5*.

Комментарий к задаче 11. Решение задачи 11 об определителе Вандермонда можно найти в пособии [1], см. §5, п. 4.

Решение задачи 13. Пусть A — обратимая матрица с целочисленными элементами.

1) Пусть известно, что обратная матрица A^{-1} также является матрицей с целочисленными элементами. Очевидно, при наших предположениях числа $\det A$ и $\det A^{-1}$ являются целыми. При этом их произведение равно единице: $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$. Это возможно только в случае, когда $\det A = \pm 1$.

2) Обратно, пусть $\det A = \pm 1$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \check{A} = \pm \check{A},$$

где $\check{A}$ — матрица, присоединенная к A (то есть, транспонированная матрица, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A). Поскольку все элементы матрицы A — целые числа, то и алгебраические дополнения A_{ij} оказываются целочисленными. Таким образом, матрица A^{-1} оказывается матрицей с целочисленными элементами.

Комментарий к задаче 14. Решение задачи 14 о матричной экспоненте можно найти в пособии [2], см. §8, п. 3. Другой возможный способ решения описан ниже — см. решение задачи 16. (Матрица A из задачи 14 является частным случаем матрицы (1) из задачи 16.)

Решение задачи 16. Рассмотрим $(n \times n)$-матрицу

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу (1) запишем в виде $A = \alpha I + \beta A_0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{\alpha+\beta x} = e^{\alpha}e^{\beta x}$. Имеем: $e^A = f(A_0)$. Тогда $e^A = e^{\alpha}e^{\beta A_0}$. Остается вычислить $e^{\beta A_0}$. Матрица A_0 — нильпотентная, уже вторая степень этой матрицы (а тогда и все старшие степени) равна нулевой матрице: $A_0^2 = \mathbf{0}$. Поэтому

$$e^{\beta A_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} A_0^k = I + \beta A_0.$$

Окончательно получаем:

$$e^A = e^{\alpha}(I + \beta A_0) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta e^{\alpha} \\ 0 & e^{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Комментарий к задаче 17. Решение похожей задачи о возведении матрицы в степень приведено в пособии [2], см. §8, п. 4. Решение основано на применении тождества Кэли.

Решение задачи 21. *Необходимость.* Если матрица A ортогональна, то $A^tA = I$. По теореме об определителе произведения матриц, имеем: $\det(A^tA) = (\det A^t) \cdot (\det A) = (\det A)^2 = 1$. (Мы учли, что определитель не меняется при транспонировании матрицы.) Следовательно, $\det A = \pm 1$. Отсюда, используя формулу для обратной матрицы, получаем:

$$A^t = A^{-1} = \pm \check{A},$$

где $\check{A}$ — присоединенная матрица. Таким образом, транспонированная матрица A^t совпадает с точностью до знака с транспонированной матрицей, составленной из алгебраических дополнений. Поэтому $a_{ij} = \pm A_{ij}$, причем знак "+" отвечает случаю $\det A = 1$, а знак "$-$" отвечает случаю, когда $\det A = -1$.

Достаточность. Предположим, что $\det A = \pm 1$, и $a_{ij} = \pm A_{ij}$. (Знак "+" отвечает случаю $\det A = 1$, а знак "$-$" отвечает случаю, когда $\det A = -1$.) Из этого условия непосредственно следует, что $A^t = \pm \check{A}$. С другой стороны, по формуле для обратной матрицы имеем: $A^{-1} = \pm \check{A}$. Следовательно, $A^t = A^{-1}$, т. е. A — ортогональная матрица.

Решение задачи 22. Обозначим ранг матрицы (2) через r_A. Рассмотрим матрицу B, составленную из первого, третьего и четвертого столбцов матрицы A. Вычислим определитель матрицы B:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - \lambda.$$

При $\lambda \neq 3$ имеем: $\det B \neq 0$. Тогда $r_A = 3$.

Если $\lambda = 3$, то матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки первую, а из второй строки — удвоенную первую, переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы при таких преобразованиях не меняется. Очевидно, в последней матрице число линейно независимых строк равно двум. Поэтому $r_A = 2$.

Ответ. Если $\lambda \neq 3$, то $r_A = 3$. Если $\lambda = 3$, то $r_A = 2$.

Решение задачи 33. По теореме Кронекера-Капелли для того, чтобы система

$$A\mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{3}$$

была совместной (то есть, имела решение), *необходимо*, чтобы ранг расширенной матрицы $(A|\mathbf{f})$ был равен рангу матрицы A. В случае, когда число уравнений равно $m = n + 1$, а число неизвестных равно n, матрица A имеет размер $(n+1) \times n$, а матрица $(A|\mathbf{f})$ — квадратная порядка $n + 1$. Тогда $\operatorname{rank} A \leq n$. Следовательно, $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) \leq n$. Поэтому

$$\det(A|\mathbf{f}) = 0. \tag{4}$$

Условие (4) *не является достаточным* для существования решения системы (3). Действительно, это условие означает лишь, что $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) \leq n$, что не гарантирует равенства $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) = \operatorname{rank} A$.

Если дополнительно известно, что $\operatorname{rank} A = n$, то условие (4) оказывается достаточным для совместности системы (3). Действительно, в этом случае $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) \geq \operatorname{rank} A = n$ и одновременно $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) \leq n$. Следовательно, $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) = n$. Таким образом, $\operatorname{rank}(A|\mathbf{f}) = \operatorname{rank} A$, что в силу теоремы Кронекера-Капелли *достаточно* для совместности системы (3).

Литература

1. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Линейная алгебра. Выпуск 1. Матрицы. Определители*, Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса, СПбГУ, 1999, 42 с.
2. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, М. М. Фаддеев, *Линейная алгебра. Выпуск 2. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений*, Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса, СПбГУ, 1999, 50 с.
3. Т. А. Суслина, *Аналитическая геометрия. Задачи к коллоквиуму (усиленный поток)*, Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса, СПбГУ, 2007, 18 с.